

Новые оценки в задаче дискретизации интегральных норм

Е. Д. Косов

Математический институт им. В.А. Стеклова

09.11.22

Задача дискретизации по значениям в точках

- $C > c > 0$ — фиксированы
- $L \subset L^p := L^p(\Omega, \mu) \cap C(\Omega)$ — N -мерное
- $\|f\|_p := \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{1/p}$

Задача:

Для каких $m \in \mathbb{N} \exists X_1, \dots, X_m \in \Omega$:

$$c\|f\|_p^p \leq \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m |f(X_j)|^p \leq C\|f\|_p^p \quad \forall f \in L?$$

Несколько комментариев

- $m \geq N \Rightarrow$ основной вопрос в том, при каких условиях на L можно выбрать m «близким» к N

- **Весовая дискретизация:**

Для каких $m \in \mathbb{N} \exists X_1, \dots, X_m \in \Omega$ и $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m$:

$$c \|f\|_p^p \leq \sum_{j=1}^m \lambda_j |f(X_j)|^p \leq C \|f\|_p^p \quad \forall f \in L?$$

- **Дискретизация с ε :**

$$C = 1 + \varepsilon, c = 1 - \varepsilon, \varepsilon > 0$$

Вероятностный подход

- Точки $X_1, \dots, X_m$ выбираются случайно, независимо друг от друга, с распределением μ
- Пусть $B \subset L \subset L^p$, зададим погрешность приближения

$$Er_p(B, X) := \sup_{f \in B} \left| \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m |f(X_j)|^p - \|f\|_p^p \right|$$

- $X = \{X_1, \dots, X_m\}$
- $B_p(L) := \{f \in L: \|f\|_p \leq 1\}$
- Задача: оценить $Er_p(B_p(L), X)$

Теорема Рудельсона

Теорема (М. Rudelson, 99)

$$\mathbb{E}[Er_2(B_2(L), X)] \leq C(A + \sqrt{A}),$$

$$\text{где } A = \frac{\log N}{m} \mathbb{E} \left[\sup_{f \in B_2(L)} \max_{1 \leq j \leq m} |f(X_j)|^2 \right].$$

Следствие. Если

$$\sup_{x \in \Omega} |f(x)| = \|f\|_\infty \leq MN^{\frac{1}{2}} \|f\|_2 \quad \forall f \in L$$

то $\exists m = C(\varepsilon, M) N \log N$ точек $X_1, \dots, X_m$:

$$(1-\varepsilon) \|f\|_2^2 \leq \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m |f(X_j)|^2 \leq (1+\varepsilon) \|f\|_2^2 \quad \forall f \in L.$$

Условие типа Никольского

Определение. Подпространство L удовлетворяет (∞, q) условию типа Никольского (с постоянной $M > 0$), если

$$\sup_{x \in \Omega} |f(x)| = \|f\|_{\infty} \leq MN^{\frac{1}{q}} \|f\|_q \quad \forall f \in L.$$

Замечание: Подпространство $L \subset L^2$ удовлетворяет $(\infty, 2)$ условию типа Никольского $\Leftrightarrow$

$\exists$ ортонормированный базис $\{u_1, \dots, u_N\}$:

$$|u_1(x)|^2 + \dots + |u_N(x)|^2 \leq M^2 N$$

Случай $p \in (1, 2)$

Теорема (Е.К., 21). Пусть $p \in (1, 2)$, L удовлетворяет $(\infty, 2)$ условию типа Никольского
 $\Rightarrow$

$$\mathbb{E}[Er_p(B_p(L), X)] \leq C(A + \sqrt{A}),$$

где $A = \frac{[\log m]^{1+\frac{p}{2}} [\log 4M^2N]^{1-\frac{p}{2}}}{m} M^2 N$.

Следствие. Пусть $p \in (1, 2)$, L удовлетворяет $(\infty, 2)$ условию типа Никольского $\Rightarrow$
 $\exists m = C(\varepsilon, M, p) N[\log N]^2$ точек $X_1, \dots, X_m$:

$$(1-\varepsilon)\|f\|_p^p \leq \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m |f(X_j)|^p \leq (1+\varepsilon)\|f\|_p^p \quad \forall f \in L.$$

Случай $p = 1$

Теорема (F. Dai, A. Prymak, A. Shadrin, V. Temlyakov, S. Tikhonov, 20).

Пусть $p \in [1, 2)$, L удовлетворяет $(\infty, 2)$ условию типа Никольского

$\Rightarrow$

$\exists m = C(\varepsilon, M, p) N[\log N]^3$ точек $X_1, \dots, X_m$:

$$(1-\varepsilon)\|f\|_p^p \leq \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m |f(X_j)|^p \leq (1+\varepsilon)\|f\|_p^p \quad \forall f \in L.$$

Теорема (I. Limonova, V. Temlyakov, 20).

$\exists C_1, C_2, C_3 > 0$: $\forall$ N -мерного подпространства $L \subset L^2$, удовлетворяющего $(\infty, 2)$ условию типа Никольского, $\exists m \leq C_1 M^2 N$ точек $X_1, \dots, X_m$:

$$C_2 \|f\|_2^2 \leq \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m |f(X_j)|^2 \leq C_3 M^2 \|f\|_2^2 \quad \forall f \in L.$$

Замечание (Е.К., 21).

На самом деле всегда можно взять $C_1 = C\varepsilon^{-2}$, $C_2 = 1 - \varepsilon$, $C_3 = 1 + \varepsilon$ для каждого $\varepsilon \in (0, 1)$.

Тригонометрические многочлены

Следствие. Пусть $Q \subset \mathbb{Z}^d$, $\varepsilon \in (0, 1) \Rightarrow$
 $\exists m \leq C\varepsilon^{-2}|Q|$ точек $X_1, \dots, X_m$:

$$(1-\varepsilon)\|f\|_2^2 \leq \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m |f(X_j)|^2 \leq (1+\varepsilon)\|f\|_2^2 \quad \forall f \in \mathcal{T}(Q)$$

где $\mathcal{T}(Q) = \{f: f = \sum_{k \in Q} c_k e^{i\langle k, x \rangle}, c_k \in \mathbb{C}\}$.

Схема доказательства

Доказательство основано на следующей теореме.

Теорема (Marcus, Spielman, Srivastava, 15)

$v_1, \dots, v_m \in \mathbb{C}^N$:

$$1) \sum_{k=1}^m |\langle w, v_k \rangle|^2 = |w|^2 \quad \forall w \in \mathbb{C}^N;$$

$$2) |v_k| \leq \theta \quad \forall k \in \{1, \dots, m\}$$

$$\Rightarrow \exists S_1, S_2: S_1 \sqcup S_2 = \{1, 2, \dots, m\},$$

$$\sum_{k \in S_j} |\langle w, v_k \rangle|^2 \leq \frac{(1 + \sqrt{2}\theta)^2}{2} |w|^2 \quad \forall w \in \mathbb{C}^N$$

Переформулировка теоремы Marcus–Spielman–Srivastava

- $X = \{X_1, \dots, X_m\}$, $\|f\|_{2,X} := \left(\sum_{k=1}^m |f(X_k)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$
- L — N -мерное подпространство функций на X :

$$\max_{1 \leq j \leq m} |f(X_j)| \leq \theta \|f\|_{2,X} \quad \forall f \in L$$

$$\Rightarrow \exists S_1, S_2: S_1 \sqcup S_2 = \{1, 2, \dots, m\},$$

$$\left(\frac{1}{2} - 3\theta\right) \|f\|_{2,X}^2 \leq \sum_{k \in S_j} |f(X_k)|^2 \leq \left(\frac{1}{2} + 3\theta\right) \|f\|_{2,X}^2 \quad \forall f \in L$$

Итерации

(Lunin–Talagrand–Nitzan–Olevskii–Ulanovskii)

- Предположим, что

$$\max_{1 \leq j \leq m} |f(X_j)| \leq \theta \|f\|_{2,X} \quad \forall f \in L.$$

- Пусть $Y \subset X$, причем $\exists b \geq a > 0$

$$a\|f\|_{2,X}^2 \leq \|f\|_{2,Y}^2 \leq b\|f\|_{2,X}^2 \quad \forall f \in L.$$

- Тогда найдется такое $Z \subset Y$, что $\forall f \in L$

$$a\left(\frac{1}{2} - \frac{3\theta}{\sqrt{a}}\right)\|f\|_{2,X}^2 \leq \|f\|_{2,Z}^2 \leq b\left(\frac{1}{2} + \frac{3\theta}{\sqrt{a}}\right)\|f\|_{2,X}^2,$$

и $|Z| \leq \frac{1}{2}|Y|$.

- Итерируем пока $\frac{3\theta}{\sqrt{a}} \leq \frac{\varepsilon}{100}$.

Теорема (F.Dai, Е.К., V.Temlyakov, 22).

Если L удовлетворяет $(\infty, 2)$ условию типа
Никольского

$\Rightarrow \exists m = C\varepsilon^{-2}M^2 \cdot N \log N$ точек $X_1, \dots, X_m$:

$$(1 - \varepsilon)\|f\|_1 \leq \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m |f(X_j)| \leq (1 + \varepsilon)\|f\|_1 \quad \forall f \in L$$

и

$$(1 - \varepsilon)\|f\|_2^2 \leq \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m |f(X_j)|^2 \leq (1 + \varepsilon)\|f\|_2^2 \quad \forall f \in L.$$

Теорема (F.Dai, E.K., V.Temlyakov, 22).

Если L удовлетворяет $(\infty, 2)$ условию типа

Никольского

$\Rightarrow \exists m = C(\varepsilon, p, M) \cdot N[\log N][\log \log N]^2$ точек $X_1, \dots, X_m$:

$$(1-\varepsilon)\|f\|_p^p \leq \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m |f(X_j)|^p \leq (1+\varepsilon)\|f\|_p^p \quad \forall f \in L$$

и

$$(1-\varepsilon)\|f\|_2^2 \leq \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m |f(X_j)|^2 \leq (1+\varepsilon)\|f\|_2^2 \quad \forall f \in L.$$

Набросок доказательства для $p = 1$: одновременная дискретизация

Одновременная первичная дискретизация L^1 и L^2 норм с помощью вероятностных результатов:

$\exists m_0 = C(\varepsilon)N[\log N]^3$ точек $X_1, \dots, X_{m_0}$:

$$(1 - \frac{\varepsilon}{100})\|f\|_1 \leq \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m_0} |f(X_j)| \leq (1 + \frac{\varepsilon}{100})\|f\|_1 \quad \forall f \in L$$

$$(1 - \frac{\varepsilon}{100})\|f\|_2^2 \leq \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m_0} |f(X_j)|^2 \leq (1 + \frac{\varepsilon}{100})\|f\|_2^2 \quad \forall f \in L.$$

В частности, $\forall f \in L$,

$$\max_{1 \leq j \leq m_0} |f(X_j)| \leq \sqrt{\frac{2M^2N}{m_0}} \|f\|_{2,X} := \sqrt{\frac{2M^2N}{m_0}} \left(\sum_{j=1}^{m_0} |f(X_j)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Набросок доказательства для $p = 1$: разбиение носителя

- $B_{q,X}(L) := \{f \in L : \|f\|_{q,X} \leq 1\}$, $\|f\|_{q,X} := \left(\sum_{j=1}^{m_0} |f(X_j)|^q \right)^{\frac{1}{q}}$

- Пусть $\max_{1 \leq j \leq m_0} |f(X_j)| \leq \theta \|f\|_{2,X} \quad \forall f \in L$.

Для $q \in \{1, 2\}$, мы хотим найти подмножества $S_1, S_2 \subset \{1, 2, \dots, m\} : S_1 \sqcup S_2 = \{1, 2, \dots, m\}$

$$\left(\frac{1}{2} - \alpha(\theta)\right) \|f\|_{q,X}^q \leq \sum_{k \in S_1} |f(X_k)|^q \leq \left(\frac{1}{2} + \alpha(\theta)\right) \|f\|_{q,X}^q \quad \forall f \in L.$$

- Равносильно: $\exists$ выбор знаков $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m_0}$:

$$\sup_{f \in B_{q,X}(L)} \left| \sum_k \varepsilon_k |f(X_k)|^q \right| \leq 2\alpha(\theta).$$

- Выбираем $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m_0}$ случайно

Теорема (M. Rudelson, 99).

Если $\max_{1 \leq j \leq m_0} |f(X_j)| \leq \theta \|f\|_{2,X} \quad \forall f \in L$, то

$$\mathbb{E}_\varepsilon \sup_{f \in B_{2,X}(L)} \left| \sum_{j=1}^m \varepsilon_j |f(X_j)|^2 \right| \leq C\theta \sqrt{\log N}.$$

Теорема (M. Talagrand, 90).

Если $\max_{1 \leq j \leq m_0} |f(X_j)| \leq \theta \|f\|_{2,X} \quad \forall f \in L$, то

$$\mathbb{E}_\varepsilon \sup_{f \in B_{1,X}(L)} \left| \sum_{j=1}^m \varepsilon_j f(X_j) \right| \leq 2\sqrt{\pi}\theta \sqrt{\log N}.$$

Итерации

- Пусть $\max_{1 \leq j \leq m} |f(X_j)| \leq \theta \|f\|_{2,X} \quad \forall f \in L$.

- Пусть $Y \subset X$, причем $\exists b \geq a > 0$

$$a\|f\|_{1,X} \leq \|f\|_{1,Y} \leq b\|f\|_{1,X} \quad \forall f \in L$$

$$a\|f\|_{2,X}^2 \leq \|f\|_{2,Y}^2 \leq b\|f\|_{2,X}^2 \quad \forall f \in L.$$

- Тогда $\exists Z \subset Y$: $|Z| \leq \frac{1}{2}|Y|$ and $\forall f \in L$

$$a\left(\frac{1}{2} - \frac{C\theta\sqrt{\log N}}{\sqrt{a}}\right)\|f\|_{1,X} \leq \|f\|_{1,Z} \leq b\left(\frac{1}{2} + \frac{C\theta\sqrt{\log N}}{\sqrt{a}}\right)\|f\|_{1,X}$$

$$a\left(\frac{1}{2} - \frac{C\theta\sqrt{\log N}}{\sqrt{a}}\right)\|f\|_{2,X}^2 \leq \|f\|_{2,Z}^2 \leq b\left(\frac{1}{2} + \frac{C\theta\sqrt{\log N}}{\sqrt{a}}\right)\|f\|_{2,X}^2.$$

- Итерируем пока $\frac{C\theta\sqrt{\log N}}{\sqrt{a}} \leq \frac{\varepsilon}{100}$.

Случай $p > 2$

Теорема (Е.К., 21). Пусть $p \in (2, 3)$, L удовлетворяет (∞, p) условию типа Никольского $\Rightarrow \exists m = C(\varepsilon, M, p) N[\log N]^p$ точек $X_1, \dots, X_m$:

$$(1-\varepsilon)\|f\|_p^p \leq \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m |f(X_j)|^p \leq (1+\varepsilon)\|f\|_p^p \quad \forall f \in L.$$

Теорема (F.Dai, V.Temlyakov, 21). Пусть $p \geq 3$, L удовлетворяет (∞, p) условию типа Никольского $\Rightarrow \exists m = C(\varepsilon, M, p) N[\log N]^3$ точек $X_1, \dots, X_m$:

$$(1-\varepsilon)\|f\|_p^p \leq \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m |f(X_j)|^p \leq (1+\varepsilon)\|f\|_p^p \quad \forall f \in L.$$

- F. Dai, E. Kosov, V. Temlyakov, Some improved bounds in sampling discretization of integral norms, arXiv:2208.09762
- E. Kosov, Marcinkiewicz-type discretization of L^p -norms under the Nikolskii-type inequality assumption, JMAA, 504(1) (2021), 125358
- E. Kosov, Remarks on sampling discretization of integral norms of functions, Proc. Steklov Inst. Math., 2022, 318 (to appear)
- B. Kashin, E. Kosov, I. Limonova, and V. Temlyakov, Sampling discretization and related problems, J. Complexity, 71 (2022), 101653
- M. Rudelson, Random vectors in the isotropic position, J. Funct. Anal. 164(1) (1999) 60–72.
- M. Talagrand, Embedding subspaces of L_1 into ℓ_1^N , Proc. Amer. Math. Soc. 108(2) (1990), 363–369
- M. Talagrand, Embedding Subspaces of L_p in ℓ_p^N , GAFA, 1995, 311–326

Спасибо за внимание!