

Восстановление и приближение интегрируемых функций

М. Г. Плотников

МГУ им. М. В. Ломоносова,

Московский центр фундаментальной и прикладной математики

Вторая конференция математических центров России

Москва, 10 октября 2022 г.

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ — измеримое пространство с неатомической мерой μ . В частности, $\forall s \in [0, \mu(X)] \exists$ множество $A_s \in \mathcal{A}$ меры s .

$L^1(X, \mu)$ — пространство интегрируемых по X относительно меры μ функций.

$f|_H$ — сужение функции $f \in L^1(X, \mu)$ на множество $H \subset X$.

Определение.

Для $\delta > 0$ назовем $H \subset X$ *δ -восстанавливающим множеством* для класса $\Lambda \subset L^1(X, \mu)$, если:

- $\mu(H) < \delta$;
- отображение $\text{Compr}: f \in \Lambda \mapsto f|_H$ инъективно.

Отображение $\text{Res}: f|_H \in \text{Compr}(\Lambda) \mapsto f$ мы называем *восстанавливающим отображением* для класса Λ .

Иначе говоря, $H \subset X$ — δ -восстанавливающее множество для класса $\Lambda \subset L^1(X, \mu)$, если каждую функцию $g \in L^1(H, \mu)$ можно продолжить до функции из класса Λ не более чем одним способом.

$\mathbb{T} = [-\pi, \pi)$, $f \in L^1(\mathbb{T})$, $f \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}_n \exp(inx)$ — ряд Фурье функции f .

Теорема (П, 21)

Пусть $A := \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, $A_n \downarrow 0$,

$$L_A^1(\mathbb{T}) := \{f \in L^1(\mathbb{T}) : |\hat{f}_n| \leq A_n, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Тогда для каждого $\delta > 0$ найдется δ -восстанавливающее для класса $L_A^1(\mathbb{T})$ множество H .

Теорема остается верной, если вместо $L_A^1(\mathbb{T})$ рассматривать класс

$$\left\{ f \in L^1(\mathbb{T}) : \omega^{(1)}\left(\frac{\pi}{n}, f\right) \leq A_n, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Пусть задано натуральное $p \geq 2$.

Функции Виленкина:

$$V_n(x) = \exp \left(\frac{2\pi i}{p} \sum_{k=0}^{\infty} n_k [p^{k+1}x] \right), \quad n = \sum_{k=0}^{\infty} n_k p^k, \quad n_k \in \{0, \dots, p-1\}.$$

Теорема (П, Асташонок, 22)

Пусть $A := \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, $A_n \downarrow 0$,

$$L_A^1[0, 1) := \{f \in L^1[0, 1): |\hat{f}_n| \leq A_n, n \in \mathbb{N}_0\},$$

$\hat{f}_n$ — коэффициенты Фурье–Виленкина функции f . Тогда для каждого $\delta > 0$ найдется δ -восстанавливающее для класса $L_A^1[0, 1)$ множество H .

Теорема остается верной, если вместо $L_A^1(\mathbb{T})$ рассматривать класс

$$\left\{ f \in L^1[0, 1): \omega^{(1)}\left(\frac{1}{n}, f\right) \leq A_n, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Вид множеств H из теоремы следующий. Пусть

$$G_{q,k} := \bigcup_{\substack{m=0,\dots,p^k-1, \\ m \equiv 0 \pmod{p^{k-q}}}} \left[\frac{m}{p^k}, \frac{m+1}{p^k} \right).$$

Найдутся (зависящие от A) возрастающие последовательности натуральных чисел $\{q(s)\}$ и $\{k(s)\}$ такие, что

$$H := \bigcup_{s=t}^{\infty} G_{q(s),k(s)}$$

для некоторого t .

Восстановление f по $f|_H$:

h_1 восстанавливает по значениям f на H величины f_{Δ} — средние значения f на p -ичных интервалах Δ ;

h_2 выдает по f_{Δ} саму функцию f :

$$f(x) = \lim_{\substack{|\Delta| \rightarrow 0, \\ \Delta \ni x}} f_{\Delta} \quad \text{п.в. на } \mathbb{G}_p.$$

Отображение $\text{Res} = h_2 \circ h_1$ восстанавливает f по $f|_H$.

Теорема (П, Асташонок, 22)

Если $f \in L^1(\mathbb{G}, \mu)$, то для некоторых $\{q(s)\}$ и $\{k(s)\}$ (зависящих от f и δ) п.в. значения функции f могут быть вычислены через ее значения на множестве $H := \bigcup_{s=t}^{\infty} G_{q(s), k(s)}$ при помощи описанного выше отображения $\text{Res} = h_2 \circ h_1$.

Теорема (II, 20)

Если $r \leq q < k$, Δ_r — p -ичный полуинтервал ранга r , $f \in L^1[0, 1)$, то

$$|f_{\Delta_r} - f_{G_{q,k} \cap \Delta_r}| \leq p^{-q+1+r} \sum_{j=q}^{k-1} p^j \cdot \max_{p^j \leq n \leq p^{j+1}} |\widehat{f}_n|;$$

$$|f_{\Delta_r} - f_{G_{q,k} \cap \Delta_r}| \leq p^{-q+r} \sum_{j=q}^{k-1} p^j \omega^{*(1)} \left(\frac{1}{p^{j+1}}, f \right).$$

Пусть $H \subset X$, $f \in L^1(X, \mu)$.

Вопрос: насколько точно можно предсказать значение функции f на X , зная ее значения лишь на H ?

Пусть заданы целые неотрицательные $r \leq q < k$.

$X = [0, 1)$, $H = G_{q,k}$, VP_r — пространство функций, постоянных на каждом p -ичном полуинтервале ранга r . VP_r совпадает со множеством полиномов Виленкина степени не выше p^r .

Строим оператор (приближенного) восстановления $\widetilde{\text{Rec}} = \widetilde{\text{Rec}}(r, q, k)$:

$$\widetilde{\text{Rec}}: f \in L^1[0, 1) \mapsto \tilde{f} \in VP_r, \quad \tilde{f}(x) = f_{G_{q,k} \cap \Delta_r(x)},$$

$\Delta_r(x)$ — единственный p -ичный полуинтервал ранга k , содержащий точку x .

Теорема

1. Если $f \in L^1[0, 1)$, то

$$\|f - \tilde{f}\|_1 \leq C(p) \left(\omega^{*(1)}\left(\frac{1}{p^r}, f\right) + p^{-q+r} \sum_{j=q+1}^k p^j \omega^{*(1)}\left(\frac{1}{p^j}, f\right) \right). \quad (1)$$

2. Если $f \in L^2[0, 1)$, то

$$\|f - \tilde{f}\|_2 \leq C(p) \left(\omega^{*(2)}\left(\frac{1}{p^r}, f\right) + p^{-q+r/2} \sum_{j=q+1}^k p^j \omega^{*(2)}\left(\frac{1}{p^j}, f\right) \right). \quad (2)$$

$\omega^{*(q)}(\delta, f)$ — p -ичные интегральные модули непрерывности:

$$\omega^{*(q)}(\delta, f) := \sup_{0 < h < \delta} \|f(x \oplus h) - f(x)\|_{L^q[0,1)},$$

$\oplus$ — p -ичное сложение чисел из $[0, 1)$.

Более грубые, чем (1) и (2), оценки:

$$\|f - \tilde{f}\|_1 \leq C(p) \left(\omega^{*(1)}\left(\frac{1}{p^r}, f\right) + p^{k-q+r} \omega^{*(1)}\left(\frac{1}{p^{q+1}}, f\right) \right);$$

$$\|f - \tilde{f}\|_2 \leq C(p) \left(\omega^{*(2)}\left(\frac{1}{p^r}, f\right) + p^{k+q-r/2} \omega^{*(2)}\left(\frac{1}{p^{q+1}}, f\right) \right),$$

соответственно.

Теорема

Для всякой функции $f \in L^1[0, 1)$ найдутся последовательности натуральных чисел $\{r(s)\}$, $\{q(s)\}$ и $\{k(s)\}$, $s \in \mathbb{N}$, причем

- $r(s) \leq q(s) < k(s)$ для всех s ,
- $\sum_{s \in \mathbb{N}} p^{q(s)-k(s)} < \infty$,
- $\lim_{s \rightarrow \infty} \widetilde{\text{Rec}}(r(s), q(s), k(s)) (f|_{G(q(s), k(s))}) \stackrel{L^1}{=} f$.

Условие $\sum_{s \in \mathbb{N}} p^{q(s)-k(s)} < \infty$ означает, что множество $H = \bigcup_{s=t}^{\infty} G(q(s), k(s))$ имеет сколь угодно малую меру при достаточно больших t .

Пример

Пусть $f \in \text{Lip}_{1,\alpha}[0, 1)$. Тогда

$$\omega^{*(1)}\left(\frac{1}{p^j}, f\right) \leq \frac{1}{p^{j\alpha}}$$

(грубая оценка),

$$\|f - \tilde{f}\|_1 \leq p^{1-r\alpha} + p^{k-q(1+\alpha)+r-1-\alpha}.$$

Возьмем $r = q - \left\lfloor \frac{k}{1+\alpha} \right\rfloor$, тогда

$$\|f - \tilde{f}\|_1 \leq Cp^{-q\alpha + \frac{k\alpha}{1+\alpha}}.$$

Видим, что $\|f - \tilde{f}\|_1 \rightarrow 0$, когда $k - (1 + \alpha)q \rightarrow -\infty$.

Теорема (II)

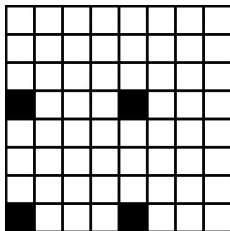
Пусть $A = \{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $C = \{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ — стремящиеся к нулю и к ∞ , соответственно, последовательности положительных чисел,

$$L_{A,C,d}^1[0,1) := \{f \in L^1[0,1)^d : |\hat{f}_{n_1,\dots,n_d}| \leq A_{n_d}, \quad |n_u - n_d| \leq C_{n_d}\},$$

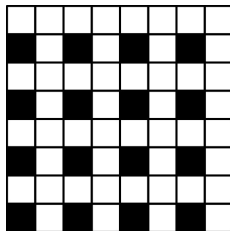
Тогда для каждого $\delta > 0$ найдется δ -восстанавливающее для класса $L_{A,C,d}^1[0,1)$ множество H .

Рассмотрим два многомерных аналога множеств $G_{q,k}$. Ограничимся двумерным случаем.

Положим $\mathbf{G}_{q,k} = G_{q,k} \times G_{q,k}$ ($q < k$).



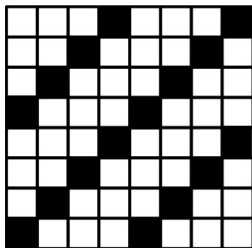
$G_{1,3}$ ($p = 2$)



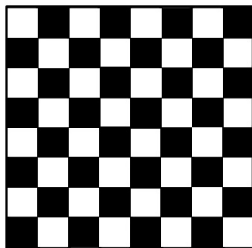
$G_{2,3}$ ($p = 2$)

Определим ($q < k$)

$$\mathbf{H}_{q,k} = \bigsqcup_{\substack{\alpha, \beta=0, \dots, p^k, \\ \alpha=\beta \pmod{p^{k-q}}}} \left[\frac{\alpha}{p^k}, \frac{\alpha+1}{p^k} \right] \times \left[\frac{\beta}{p^k}, \frac{\beta+1}{p^k} \right].$$



$H_{1,3} \ (p=2)$



$H_{2,3} \ (p=2)$

Пусть $r \leq q < k$.

Положим $X = [0, 1)^2$, $H = \mathbf{G}_{q,k}$.

Теорема

Пусть $VP_r \subset L^1[0, 1)^2$ — пространство функций, постоянных на каждом $\underline{p}$ -ичном полуоткрытом квадрате ранга r . Возьмем оператор $\widetilde{\text{Rec}} = \widetilde{\text{Rec}}(r, q, k)$,

$$\widetilde{\text{Rec}}: f \in L^1[0, 1)^2 \mapsto \widetilde{f} \in VP_r, \quad \widetilde{f}(x, y) = f_{\mathbf{G}_{q,k} \cap (\Delta_r(x) \times \Delta_r(y))}.$$

Если $f \in L^1[0, 1)^2$, то

$$\|f - \widetilde{f}\|_1 \leq C(p) \left(\omega^{*(1)}\left(\frac{1}{p^r}, \frac{1}{p^r}, f\right) + p^{-2q+2r} \sum_{i=q+1}^k \sum_{j=q+1}^k p^{i+j} \omega^{*(1)}\left(\frac{1}{p^i}, \frac{1}{p^j}, f\right) \right).$$

$$\omega^{*(q)}(\delta_1, \delta_2, f) := \sup_{0 < h_1 < \delta_1, 0 < h_2 < \delta_2} \|\Delta f(h_1, h_2)(x)\|_{L^q[0,1)^2},$$

$$\Delta f(h_1, h_2)(x) := f(x \oplus h_1 \oplus h_2) - f(x \oplus h_1) - f(x \oplus h_2) + f(x).$$

Пусть $r \leq q < k$.

Положим $X = [0, 1)^2$, $H = \mathbf{H}_{q,k}$.

Теорема

Возьмем оператор $\widetilde{\text{Rec}} = \widetilde{\text{Rec}}(r, q, k)$,

$$\widetilde{\text{Rec}}: g \in L^1[0, 1)^2 \mapsto \widetilde{f} \in VP_r, \quad \widetilde{f}(x, y) = f_{\mathbf{H}_{q,k} \cap (\Delta_r(x) \times \Delta_r(y))}.$$

Если $f \in L^1[0, 1)^2$, то

$$\|f - \widetilde{f}\|_1 \leq C(p) \left(p^2 \omega^{*(1)}\left(\frac{1}{p^r}, \frac{1}{p^r}, f\right) + p^{-q+2r} \sum_{j=q+1}^k p^j \omega^{*(1)}\left(\frac{1}{p^j}, \frac{1}{p^j}, f\right) \right).$$