Неравенства Харди для веса Якоби и их применения

Рамиль Насибуллин
email: NasibullinRamil@gmail.com

Научно-образовательный математический центр
Приволжского федерального округа

Вторая конференция Математических центров России
7-11 ноября 2022 г. в Москве

Классическое одномерное неравенство Харди для произвольной абсолютно непрерывной функции $y : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ такой, что $y(0) = 0$ и $y' \in L^2(0, +\infty)$. Оно имеет следующий вид

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{y^2(t)}{t^2} dt \leq 4 \int\limits_0^{+\infty} y'^2(t) dt. \tag{1}$$

В этом неравенстве константа 4 является точной, т.е. её нельзя уменьшить, и равенство достигается лишь на функции $y(t) \equiv 0$. Точность константы стоит понимать в следующем смысле: *при любом* $\varepsilon > 0$ *найдется функция* y_ε *такая, что*

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{y_\varepsilon(t)^2}{t^2} dt > (4 - \varepsilon) \int\limits_0^{+\infty} y_\varepsilon'(t)^2 dt.$$

Недостижимость точной константы в неравенств х тип Харди — это отличительная особенность неравенств такого вида.

Классическое неравенство Харди обобщалось в различных направлениях. Известны:

- неравенств для произвольных весовых функций (В.И. Левин, В.Д. Степанов, Л.Э. Персон);
- неравенств с логарифмическими весами(Ю.А. Дубинский);
- неравенств с весами, зависящими от функции Бесселя (Р.Г. Насибуллин, Р.В. Макаров);
- пространственные неравенства (В.Г. Мазья, Ф.Г. Авхадиев, Е.Б. Дэвис);
- неравенства Харди в гомогенных группах (М. Ружанский, Д. Сураган)
- Неравенства с дополнительными слагаемыми (Х. Брезис, М. Маркус, А. Лаптев).
- ...

1. Авхадиев Ф.Г. Конформно инвариантные неравенств / Ф.Г. Авхадиев. - Казань: Издательство Казанского университет, 2020. - 260 с. - ISBN 978-5-00130-295-7.
2. Ruzhansky M., Suragan D. Hardy inequalities on homogeneous groups (Progress in Mathematics, Birkhauser, 2019).
3. Balinsky A.A., Evans W.D., Lewis R.T. The Analysis and Geometry of Hardy's Inequality (Springer, Heidel-berg - New York- Dordrecht - London, 2015).
4. Kufner A., Persson L.E. Weighted inequalities of Hardy type (World Scientific, New Jersey-London-Singapore-Hong Kong, 2003).
5. Мазья В.Г. Пространства С.Л. Соболева (Изд-во Ленингр. ун-т , Л., 1985).

Ряд точных неравенств со степенными особенностями на конечном отрезке был доказан В.И. Левиным, чьим научным руководителем по кандидатской диссертации был Г.Х. Харди. Например, он показал, что константа 4 также является точной в следующем соотношении

$$\int_0^1 \frac{y^2(t)}{t^2}dt < 4\int_0^1 y'^2(t)dt \tag{2}$$

для всех абсолютно непрерывных тождественно не равных нулю функций y таких, что $y(0) = 0$ и $y' \in L^2(0,1)$.

Ф.Г. Авхадиева и К.-Й. Вирса построили мостик между неравенствами Харди и Пуанкаре-Фридрихса. Они показали, что при $q > 0$ и $\nu \in \left[0, \frac{1}{q}\right]$ для всех непрерывно дифференцируемых функций $y \in C^1([0,1])$ таких, что $y(0) = 0$, справедливо точное неравенство

$$(1-\nu^2 q^2)\int\limits_0^1 \frac{y^2(t)}{t^2}dt + q^2\lambda^2 \int\limits_0^1 \frac{y^2(t)}{t^{2-q}}dt \le 4\int\limits_0^1 y'^2(t)dt. \qquad (3)$$

Здесь константа λ является первым положительным решением специального уравнения типа Лэмба

$$J_\nu(\lambda) + q\lambda J'_\nu(\lambda) = 0, \quad \lambda \in (0, j_\nu),$$

для функции Бесселя J_ν порядка $\nu \ge 0$.

В.И. Левин также для всех непрерывно дифференцируемых функций y таких, что $y(0) = 0$ и $y \not\equiv 0$, получил следующее с точной константой неравенство

$$\int_0^1 \frac{y^2(x)}{x^2(2-x)^2}dx < \int_0^1 y'^2(x)dx, \tag{4}$$

которое можно переписать в виде

$$\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{y^2(x)}{x^2}dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{y^2(x)}{x(2-x)}dx + \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{y^2(x)}{(2-x)^2}dx < \int_0^1 y'^2(x)dx.$$

Например, мы показали, что для любой абсолютно непрерывной функции $y : [0,1] \to \mathbb{R}$ такой, что $y(0) = 0$ и $y' \in L_2([0,\rho])$, при $q \in (0,\infty)$ и $\nu \in \left[0, \frac{1}{q}\right]$ имеет место точное неравенство

$$(1-\nu^2 q^2)\int\limits_0^\rho \frac{y^2(t)}{t^2(2-t)^2}dt + q^2 C_\nu^2(q)\frac{(2-\rho)^q}{\rho^q}\int\limits_0^\rho \frac{y^2(t)}{(2-t)^{2+q}t^{2-q}}dt$$

$$\leq \int\limits_0^\rho y'^2(t)dt,$$

а при $q \in [1,2]$

$$\int\limits_0^\rho \frac{y^2(t)}{t^{2-q}(2-t)^{2-q}}dt \leq \kappa'(q,\rho)\int\limits_0^\rho y'^2(t)dt,$$

где $\rho \in (0,1]$, $C_\nu(q)$ и $\kappa'(q,\rho)$ некоторые известные константы.

Пусть $\rho \in (0,1)$, $p>0, q>0$ и $\nu \in [0, p/q]$, а функция u является абсолютно непрерывной такой, что $u(0)=0$. Тогда справедливо следующее неравенство

$$\int\limits_0^\rho \frac{u'^2(t)}{z(t)^{p-1}}\,dt \geq (p^2-q^2\nu^2)\int\limits_0^\rho \frac{u^2(t)}{z(t)^{p+1}}\,dt + q^2\lambda_0^2 \int\limits_0^\rho \frac{u^2(t)}{z(t)^{p+1-q}}dt,$$

где $z(t)=t(2-t)$ и константа λ_0 находится как решение следующего уравнения

$$(p-p^2+q^2\nu^2-q\nu-q^2\lambda^2)J_\nu(\lambda)+q\lambda J_{\nu-1}(\lambda)=0.$$

Theorem

Если $q \in [1,2]$ *и* $\rho \in (0,1)$, *то для любой абсолютно непрерывной функции* y *такой, что* $y(-\rho) = y(\rho) = 0$ *и* $y \not\equiv 0$, *справедливо неравенство*

$$\int\limits_{-\rho}^{\rho} \frac{y^2(t)}{(1-t^2)^{2-q}} dt < \kappa'(q) \int\limits_{-\rho}^{\rho} y'^2(t) dt,$$

где постоянная

$$\kappa'(q) = \frac{1}{2} \left(\int\limits_0^1 B_t^2(1/2, q-1) \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt \right)^{1/2},$$

а $B_t(x,y) = \int_0^t \tau^{x-1}(1-\tau)^{y-1} d\tau$ — *неполная бета функция.*

Теперь сравним $\kappa'(q)$ с постоянными в уже известных неравенствах. Например, Авхадиев Ф.Г. показал, что в неравенстве теоремы 1 вместо $\kappa'(q)$ можно поставить величину

$$C(q) = 2^{3q-4}\pi^{2(1-q)}.$$

Преимущество константы $C(q)$ в том, что случаи $C(1)$ и $C(2)$ неулучшаемы. Несмотря на это, существуют два значения $\widehat{q}_0$ и $\widehat{q}_1$ такие, что $\kappa'(q) \le C(q)$ для любого $q \in [\widehat{q}_0, \widehat{q}_1]$.
Действительно, при $q = 3/2$ имеем

$$\kappa'(3/2) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3\pi^2}{2} - 14} \approx 0.448444 < C(3/2) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \approx 0.450158,$$

а также

$$\kappa'(1.3) \approx 0.469203 < C(1.3) \approx 0.469469,$$

$$\kappa'(1.4) \approx 0.458389 < C(1.4) \approx 0.459712,$$

$$\kappa'(1.6) \approx 0.439246 < C(1.6) \approx 0.440803,$$

$$\kappa'(1.7) \approx 0.430701 < C(1.7) \approx 0.431641.$$

На первый взгляд может показаться, что усиление константы $C(q)$ незначительное. Из сравнения нашего неравенства и одномерного варианта неравенства Ф.Г. Авхадиева и К.-Й. Вирса при $\nu = 1/q$, константа $k'(q)$ при любом $q \in [0, 2]$ не может быть меньше чем

$$\lambda(q) = \frac{2^q}{q^2 j_{1/q-1}^2}.$$

Например, $\lambda(3/2) \approx 0.360891$. Добавим, что оценка $\lambda(q) \leq \kappa'(q)$ — достаточно "грубая".

Пусть $\rho \in (0,1)$, $q > 0$ и $\nu = 1/q$, а функция g является абсолютно непрерывной такой, что $g(-\rho) = g(\rho) = 0$ и $g \in L_2(-\rho,\rho)$. Тогда справедливо следующее неравенство

$$P_q \int_{-\rho}^{\rho} \frac{g^2(t)}{(1-t^2)^{2-q}}\, dt < \int_{-\rho}^{\rho} g'^2(t)\, dt,$$

где постоянная

$$P_q = \begin{cases} 1 & , \quad \text{при} \quad q = 0, \\ \lambda_q & , \quad \text{при} \quad q \in (0, q_0), \\ \left(\frac{\lambda_\alpha}{2^\alpha}\right)^{\frac{1-q}{1-\alpha}} 2^q & , \quad \text{при} \quad q \in (q_0, 1], \\ 2 & , \quad \text{при} \quad q = 1, \end{cases}$$

для любого $\alpha \in (0, q_0)$, константа $\sqrt{\lambda_q}/q$ определяется как решение следующего уравнения

$$-q^2\lambda^2 J_\nu(\lambda) + q\lambda J_{\nu-1}(\lambda) = 0, \quad \lambda \in (0, j_\nu),$$

а $q_0 \approx \frac{\pi^2}{18}$ является корнем уравнения

$$-2^q J_\nu\left(\frac{2^{q/2}}{q}\right) + 2^{q/2} J_{\nu-1}\left(\frac{2^{q/2}}{q}\right) = 0.$$

Здесь j_ν — первый положительный корень функции Бесселя J_ν.

Theorem

Мероморфная в $\mathbb{D}$ функция $f(z)$ будет однолистной в $\mathbb{D}$, если $f'(z) \neq 0$ в $\mathbb{D}$ и при некотором наборе вещественных неотрицательных параметров n, a_k и $q_k, k = \overline{1, n}$ выполняется неравенство

$$|S_f(z)| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k R(q_k)}{(1 - |z|^2)^{2-q_k}}, \quad z \in \mathbb{D},$$

причем $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq 1$, $0 \leq q_1 \leq q_2 \leq \ldots \leq q_n \leq 2$ и

$$R(q) = \begin{cases} 2^{1+q}, & 0 \leq q \leq 1, \\ 2^{5-3q}\pi^{2(q-1)}, & 1 \leq q \leq \widehat{q}_0, \\ \frac{2}{\kappa'(q)}, & \widehat{q}_0 \leq q \leq \widehat{q}_1, \\ 2^{5-3q}\pi^{2(q-1)}, & \widehat{q}_1 \leq q \leq 2. \end{cases}$$

Достаточно интересным по форме и содержанию является аналог неравенства (4) на отрезке $[0, 2b]$ для абсолютно непрерывных функций таких, что $y(0) = y(2b) = 0$. А именно,

$$\int_0^{2b} \frac{y^2(t)}{\rho^2(t)}dt + 2\int_0^{2b} \frac{y^2(t)}{\rho(t)\mu(t)}dt + \int_0^{2b} \frac{y^2(t)}{\mu^2(t)} < 4\int_0^{2b} y'^2(t)dt, \qquad (4'),$$

где $\rho(t) = \min\{t, 2b - t\}$ и $\mu(t) = 2b - \rho(t)$. Более слабая версия этого неравенства

$$\int_0^{2b} \frac{y^2(t)}{\rho^2(t)}dt + \int_0^{2b} \frac{y^2(t)}{\rho(t)\mu(t)}dt \le 4\int_0^{2b} y'^2(t)dt, \qquad (5)$$

неявным образом использована М. Хоффманн-Остенхофом, Т. Хоффманн-Остенхофом и А. Лаптевым для доказательства многомерного аналога.

Нельзя не отметить родственный результат, в котором В.Д. Эванс и Р.Т. Льюис показали, что справедливо неравенство

$$\int_0^{2b} \frac{y^2(t)}{\rho^2(t)}dt + 4\int_0^{2b} \frac{y^2(t)}{\rho(t)\mu(t)}dt + 4\int_0^{2b} \frac{y^2(t)}{\mu^2(t)} \leq 4\int_0^{2b} y'^2(t)dt,$$

но судя уже по его доказательству функция y должна принадлежать более узкому классу, а именно, $y \in C^1([0,2b])$ такая, что $y(0) = y(b) = y(2b) = 0$, то есть в отличие от предыдущих случаев дополнительно накладывается условие $y(b) = 0$.

Theorem

Пусть $\nu \in (0,1]$, $\rho(t) = \min\{t, 2b - t\}$ *и* $\mu(t) = 2b - \rho(t)$. *Тогда для любой функции* $y \in C_c^1(0, 2b)$ *справедливы неравенства*

$$\int_0^{2b} y'^2(t)dt \geq \frac{1-\nu^2}{4}\int_0^{2b}\frac{y^2(t)}{\rho(t)^2}dt + \frac{2-2\nu^2+j_\nu'^2}{4}\int_0^{2b}\frac{y^2(t)}{\rho(t)\mu(t)}dt$$

$$+\frac{1-\nu^2+2j_\nu'^2}{4}\int_0^{2b}\frac{y^2(t)}{\mu(t)^2}d\tau + \frac{j_\nu'^2}{4}\int_0^{2b}\frac{y^2(t)\rho(t)}{\mu(t)^3}dt,$$

$$\int_0^{2b} y'^2(t)dt \geq \frac{1}{4}\int_0^{2b}\frac{y^2(t)}{\rho(t)^2}d\tau + \frac{C_0^2(1)}{4}\int_0^{2b}\frac{y^2(t)}{\rho(t)\mu(t)}dt +$$

$$\frac{3C_0^2(1)}{4}\int_0^{2b}\frac{y^2(t)}{\mu(t)^2}dt + \frac{C_0^2(1)}{2}\int_0^{2b} y^2(t)\frac{\rho(t)}{\mu(t)^3}dt,$$

где j'_ν — первый положительный корень производной J'_ν функции Бесселя J_ν и $C_0(1) \approx 1.25578$ — первое положительное решение уравнения

$$1 - z\frac{J_1(z)}{J_0(z)} = 0, \quad z \in (0, j_0).$$

Особый интерес и множество интересных результатов по неравенствам типа Харди усиленным дополнительными слагаемыми последовало после результата Х. Брезиса и М. Маркуса, в которой именно подчеркивается возможность усиления точного неравенства (2). Поэтому иногда неравенства с дополнительными слагаемыми называют неравенствами Брезиса-Маркуса. Приведем для начала одномерный результат, который запишем в виде

$$\int_0^1 \frac{y^2(t)}{t^2}\,(1+t)\,dt \le 4\int_0^1 y'^2(t)(1-t)dt.$$

Х. Брезис и М. Маркус

$$\int_0^1 \frac{y^2(t)}{t^2}(1+t)\,dt \le 4\int_0^1 y'^2(t)(1-t)dt.$$

$$\frac{1}{4}\int_\Omega \frac{|g(x)|^2}{\delta(x)^2}dx + \frac{1}{4D^2(\Omega)}\int_\Omega |g(x)|^2 dx \le \int_\Omega |\nabla g(x)|^2 dx.$$

Ф.Г. Авхадиев и К.-Й. Вирс

$$(1-\nu^2q^2)\int\limits_0^1 \frac{y^2(t)}{t^2}dt + q^2\lambda^2\int\limits_0^1 \frac{y^2(t)}{t^{2-q}}dt \le 4\int\limits_0^1 y'^2(t)dt.$$

$$\frac{1-\nu^2q^2}{4}\int\limits_\Omega \frac{g^2(x)}{\delta(x)^2}dx + \frac{q^2\lambda_q^2}{4\delta_0^2(\Omega)}\int\limits_\Omega \frac{g^2(x)}{\delta(x)^{2-q}}dx \le \int\limits_\Omega |\nabla g(x)|^2dx, \tag{6}$$

М. Хофман-Остенхоф, Т. Хофман-Остенхоф и А. Лаптев

$$\frac{1}{4}\int\limits_0^1 \frac{y^2(x)}{x^2}dx + \frac{1}{4}\int\limits_0^1 \frac{y^2(x)}{x(2-x)}dx < \int\limits_0^1 y'^2(x)dx.$$

$$\frac{1}{4}\int\limits_\Omega \frac{|g(x)|^2}{\delta(x)^2}dx + \frac{1}{4}\frac{K(n)}{|\Omega|^{2/n}}\int\limits_\Omega |g(x)|^2dx \le \int\limits_\Omega |\nabla g(x)|^2dx, \quad \forall g \in C_c^1(\Omega),$$

где $K(n) = n\left[\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right]^{2/n}$ и $|\mathbb{S}^{n-1}|$ — площадь поверхности $n-1$-мерной единичной сферы.

Пусть $\nu \in (0,1]$ и Ω — открытое выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n$ с конечным объемом. Тогда для любой функции $g \in C_c^1(\Omega)$ справедливы неравенства

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla g(x)|^2 dx \geq \frac{1-\nu^2}{4} \int\limits_{\Omega} \frac{g^2(x)}{\delta^2(x)} dx +$$

$$K(n) \frac{5-5\nu^2+4{j'}_{\nu}^{2}}{8|\Omega|^{\frac{2}{n}}} \int\limits_{\Omega} g^2(x) dx + \frac{{j'}_{\nu}^{2} K(n) n}{32|\mathbb{S}^{n-1}||\Omega|^{\frac{3}{n}}} \int\limits_{\Omega} g^2(x)\delta(x) dx,$$

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla g(x)|^2 dx \geq \frac{1}{4} \int\limits_{\Omega} \frac{g^2(x)}{\delta^2(x)} dx +$$

$$\frac{5C_0^2(1)K(n)}{8|\Omega|^{2/n}} \int\limits_{\Omega} g^2(x) dx + \frac{C_0^2(1)K(n)n}{16|\mathbb{S}^{n-1}||\Omega|^{3/n}} \int\limits_{\Omega} g^2(x)\delta(x) dx,$$

где $j'_{\nu-1}$ — первый положительный корень производной $J'_{\nu-1}$ функции Бесселя и $C_0(1) \approx 1.25578$.

Задача добавления дополнительного слагаемого связана с классическими оценками первого собственного числа $\lambda_1(\Omega)$ для лапласиана при граничных условиях Дирихле и со следующим неравенством Пуанкаре:

$$\lambda_1(\Omega) \int\limits_{\Omega} |g(x)|^2 dx \leq \int\limits_{\Omega} |\nabla g(x)|^2 dx, \quad \forall g \in C_c^1(\Omega).$$

В случае выпуклых областей с фиксированным объемом в виде следствия результата М. Хофман-Остенхоф, Т. Хофмана-Остенхофа и А. Лаптева можно получить следующую оценку первого собственного числа

$$\lambda_1(\Omega) \geq \frac{1}{4} \frac{K(n)}{|\Omega|^{2/n}}.$$

Как следствие многомерных неравенств мы получим новые оценки для первого собственного числа $\lambda_1(\Omega)$ в различных областях. Например, в выпуклых областях Ω с фиксированным объемом или диаметром, соответственно, имеем

$$\lambda_1(\Omega) \geq \frac{j'^2_1}{2} \frac{K(n)}{|\Omega|^{2/n}} \quad \text{и} \quad \lambda_1(\Omega) \geq \frac{j'^2_1}{2} \frac{3n}{D^2(\Omega)},$$

где $j'_1 \approx 1.84118$ — первый положительный корень производной $J_1{}'$ функции Бесселя J_1, а в случае областей λ-близких к выпуклым получим

$$\lambda_1(\Omega) \geq \frac{2.75972n}{D^2(\Omega)}.$$

Спасибо за внимание!