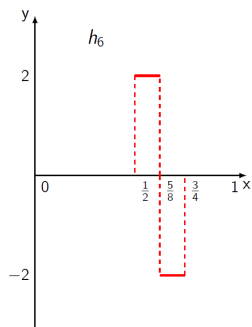
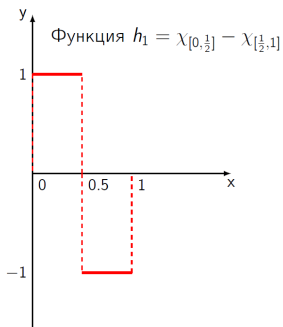
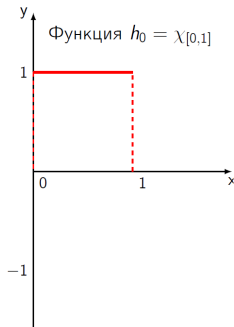


## 2-тайлы и растягивающие полиномы

Т.Зайцева (МГУ), В.Протасов (L'Aquila, МГУ)

10.11.2022

# Система Хаара на отрезке, 1909



# Система Хаара

На отрезке  $[0, 1]$ :  $\varphi = \chi_{[0,1]}$  и функции  $h_{j,k}$  для  $j \in \mathbb{Z} \geq 0$ ,  $k = 0, \dots, 2^j - 1$ :

$$h_{j,k}(t) = \begin{cases} (\sqrt{2})^j & t \in [\frac{k}{2^j}, \frac{k+\frac{1}{2}}{2^j}) \\ -(\sqrt{2})^j & t \in [\frac{k+\frac{1}{2}}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

Все функции  $h_{j,k}$  получаются из

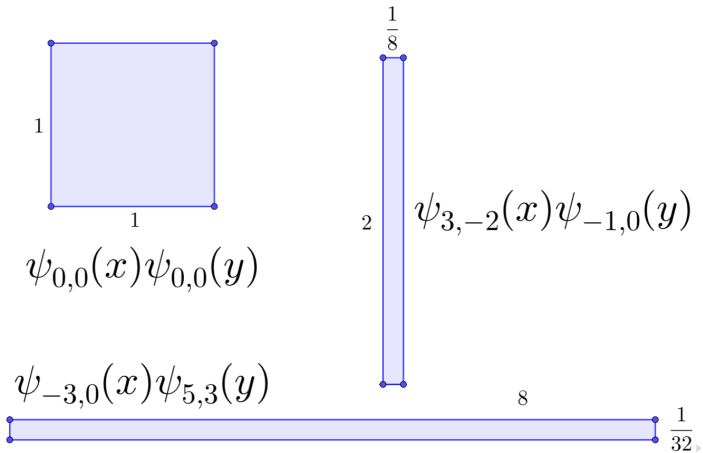
$$\psi = \chi_{[0, \frac{1}{2})} - \chi_{[\frac{1}{2}, 1]}.$$

Базиса Хаара на прямой  $\mathbb{R}$ : убрать  $\varphi$ , сдвиги вдоль всей прямой, двоичные растяжения функции  $\psi$ :

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}$$

# Системы Хаара в $\mathbb{R}^d$

Как построить многомерные аналоги базиса Хаара?  
Можно перемножать одномерные системы Хаара –  
оказывается не самым эффективным способом.



# Системы Хаара в $\mathbb{R}^d$

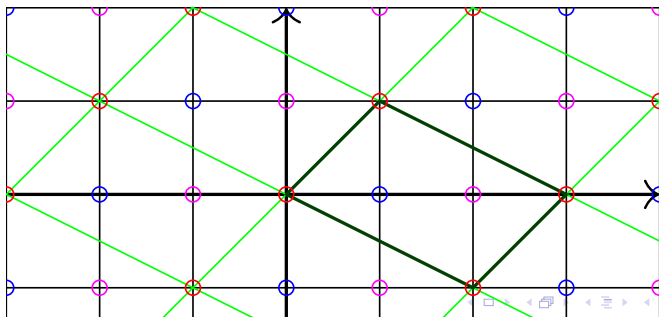
В более общей конструкции двоичное растяжение  $\rightarrow$  умножение на степени растягивающей матрицы  $M \in \mathbb{Z}^{d \times d}$  (т.е. все собственные значения  $|\lambda_j| > 1$ ).

В  $\mathbb{R}^1$  носитель функции  $\varphi$  — единичный отрезок. Что будет в  $\mathbb{R}^d$  — ?

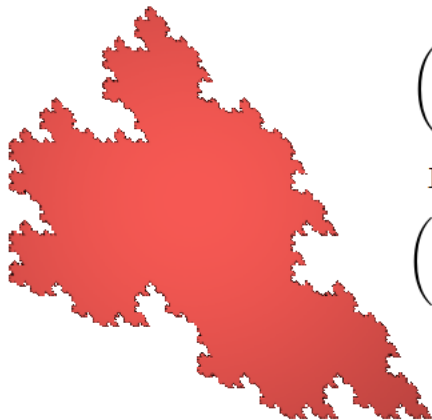
# Система счисления в $\mathbb{R}^d$

Двоичная система счисления в  $\mathbb{R}^1$ : коэффициент  $M = 2$ , цифры  $D = \{0, 1\}$ . Точка  $x = \sum_{j=1}^{\infty} M^{-j} s_j$ ,  $s_j \in \{0, 1\}$ , пробегает отрезок  $[0, 1]$ .

$M$ -ичная система: цифры  $D(M)$  – целочисленные вектора, представители разных классов эквивалентности  $\mathbb{Z}^d / M\mathbb{Z}^d$ , т.е. при  $d_1 \neq d_2 \in D(M)$  выполнено  $d_1 - d_2 \notin M\mathbb{Z}^d$ ,  $m = |\det M|$ .



# Пример 1: $G$ с корректными $M, D(M)$



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

цифры

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

# Свойства множества $G$

Множество  $G = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} M^{-i} s_i : s_i \in D(M) = \{d_0, \dots, d_{m-1}\} \right\}$   
можно разделить на части в зависимости от  $s_1$ .

Если выбрать  $s_1 = d_0$ , получаем 1-й кусок

$$\left\{ M^{-1}d_0 + M^{-1} \sum_{i=2}^{\infty} M^{-(i-1)} s_i : s_i \in D(M) \right\} = M^{-1}d_0 + M^{-1}G.$$

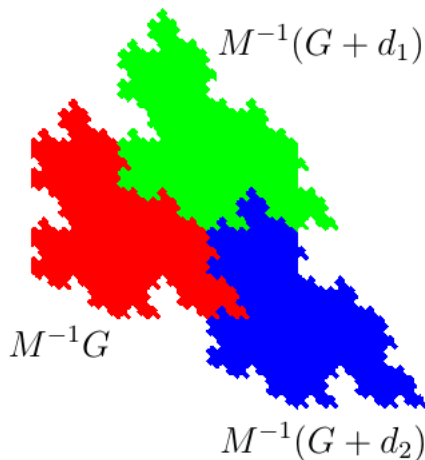
...

Если выбрать  $s_1 = d_{m-1}$ , получаем  $m$ -й кусок

$$\left\{ M^{-1}d_{m-1} + M^{-1} \sum_{i=2}^{\infty} M^{-i+1} s_i : s_i \in D(M) \right\} = M^{-1}d_{m-1} + M^{-1}G.$$



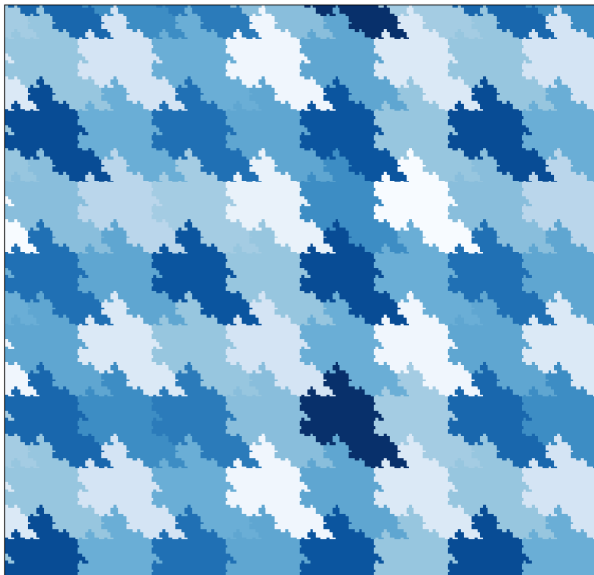
# Разделение на 3 части для примера 1



# Свойства множества $G$

- **Самоподобие (self-affinity):**  $G$  представляется как объединение множеств  $M^{-1}(G + d_i)$ , подобных  $G$ . Разные множества могут иметь пересечение только по мере нуль.
- **Замощение параллельными сдвигами (tiling):** Всевозможные целочисленные сдвиги  $G$  замощают пространство в фиксированное целое число слоёв. Множество  $G$  в общем случае будем называть **аттрактором**. Слой один  $\Rightarrow$  называется **тайлом** (tile). Именно тайлы порождают многомерные системы Хаара.

# Замощение для $G$ из примера 1



# Многомерная система Хаара

Тайл однозначно определяет систему Хаара. Вместо одной порождающей функции  $\psi$  их будет  $m - 1$  штук.

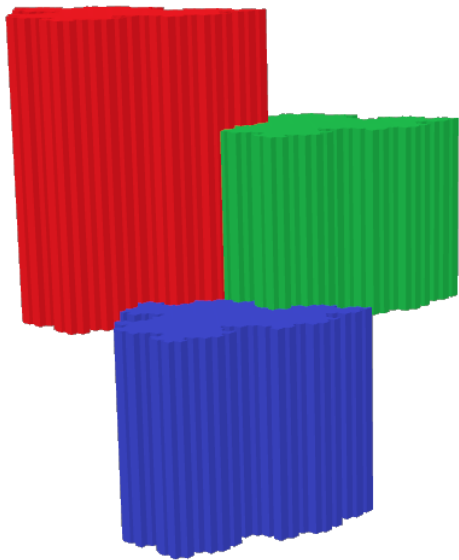
Порождающие функции  $\psi_s$  для многомерного случая – несколько ступенек на множествах  $M^{-1}(G + d_k)$ .

Ограничения на размеры ступенек – из условий ортогональности разных порождающих функций и их нормировки.

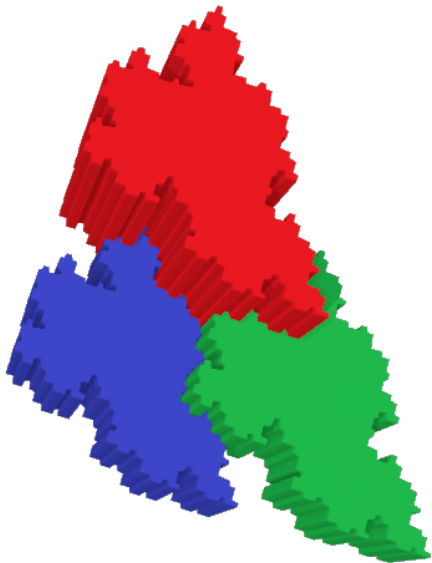
Порождающие функции системы Хаара:  $\forall s = 1, \dots, m - 1$

$$\psi_s(x) = \sqrt{m} \sum_{k=0}^{m-1} e_{s,k+1} \cdot \chi_{M^{-1}(G+d_k)}$$

Функция Хаара: вид  
сбоку



Функция Хаара: вид  
сверху



# Многомерная система Хаара

Сдвигая и растягивая порождающие функции, аналогично одномерному случаю, получаем

$\{ m^{j/2} \psi_s(M^j x - k) \}_{j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^d, s=1, \dots, m-1}$  — базис в  $L_2(\mathbb{R}^d)$

Таким образом, построение многомерных систем Хаара сводится к тайлам.

Начиная с 1990:

J.Lagarias, Y.Wang, K.Grochenig, K.Heil, D.Cabrelli, B.Han,

...

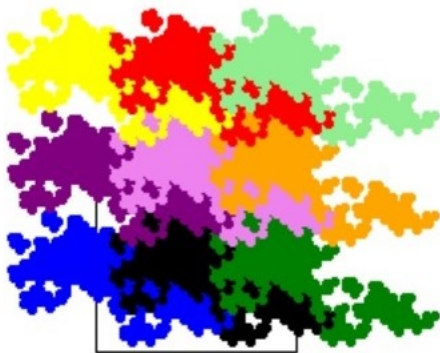
# Примеры

-1 -3

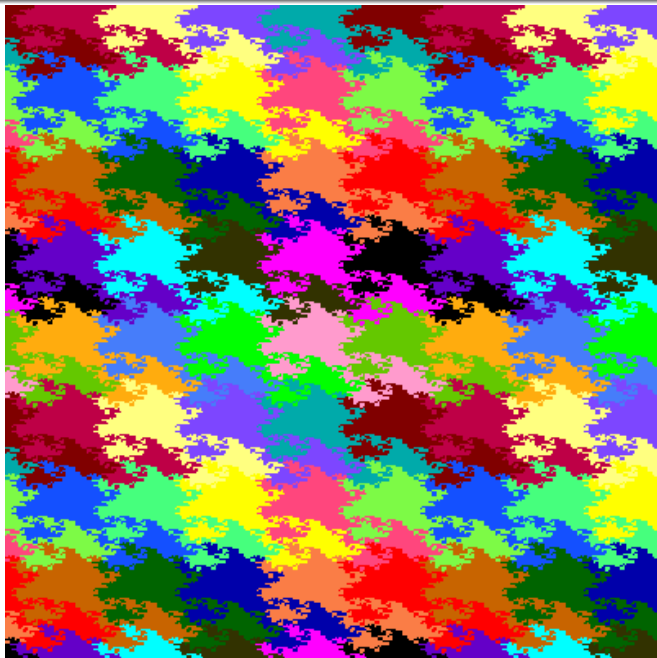
1 0

(1, 0)

(1, 1)







# Гладкость

В многомерном случае разные системы Хаара могут иметь разную гладкость.

Гладкость в  $L_2$  по Гёльдеру:

$$\alpha_\varphi = \sup \{ \alpha \geq 0 \mid \exists c : \|\varphi(\cdot) - \varphi(\cdot + h)\|_2 \leq c \cdot h^\alpha \}$$

Гладкость в  $L_2$  по Соболеву (эквивалентно):

$$s_\varphi = \sup \{ s > 0 \mid \int |\hat{\varphi}|^2 (|\xi|^2 + 1)^s d\xi < \infty \}$$

M. Charina and V. Yu. Protasov, *Smoothness of anisotropic wavelets, frames and subdivision schemes*, Applied and Computational Harmonic Analysis, 2017

# Классификация двоичных тайлов

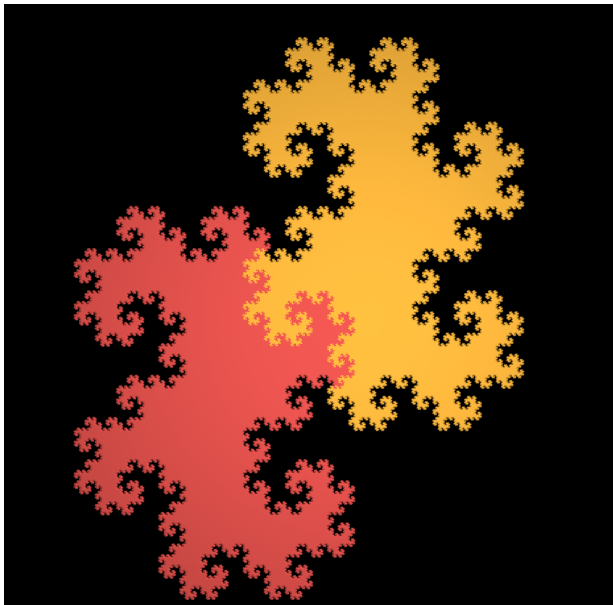
*“Двухциферный” случай  $m = 2$  аналогичен Хаару на прямой. Сосредоточимся на нем.*

## Теорема

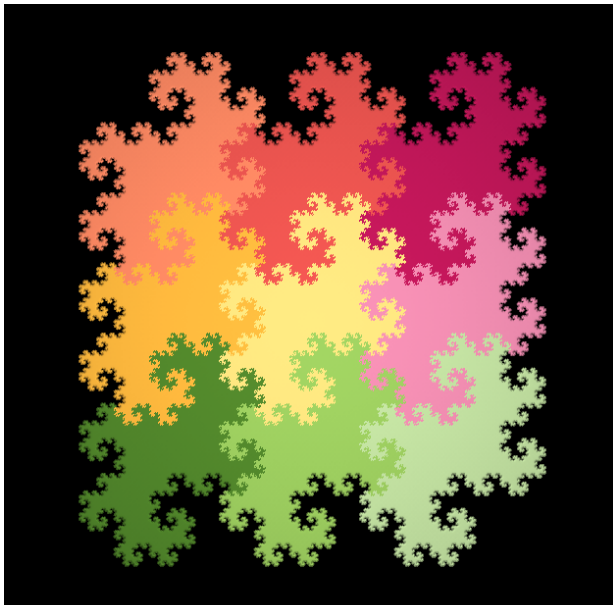
При  $m = 2, d = 2$  существуют ровно три аттрактора, с точностью до аффинного подобия. Все они являются тайлами.

- *Дракон (twindragon)*  
 $\alpha = 0.23819$
- *Медведь (tame twindragon)*  
 $\alpha = 0.39462$
- *Прямоугольник*  
 $\alpha = 0.5$

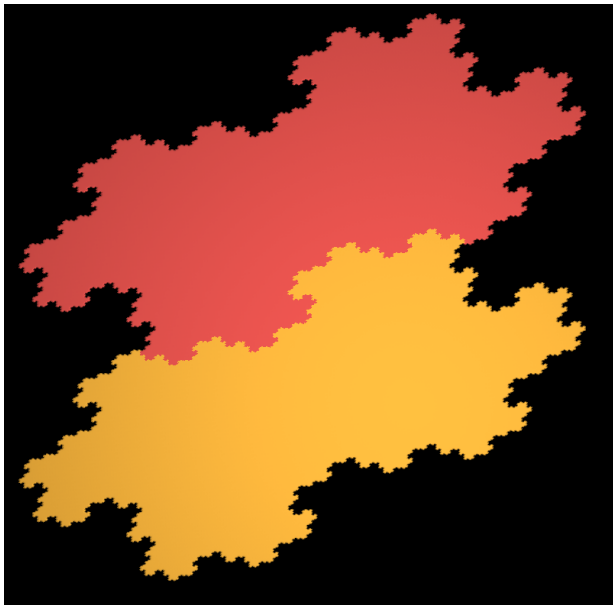
# Дракон и его разбиение на 2 части



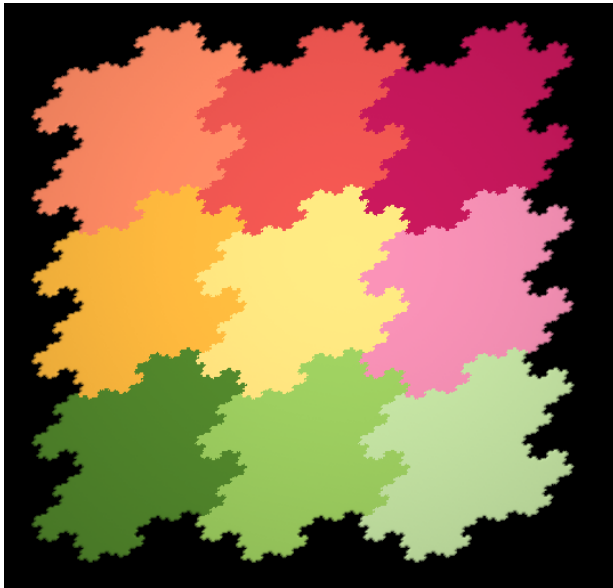
# Замощение драконом



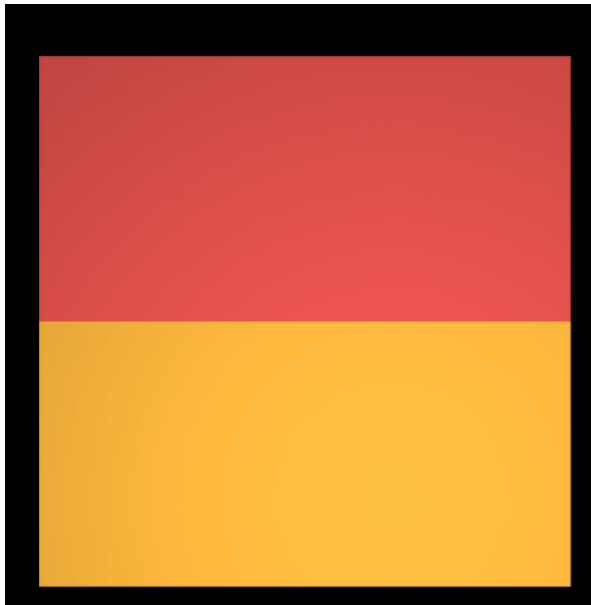
# Медведь и его разбиение на 2 части



# Замощение медведем

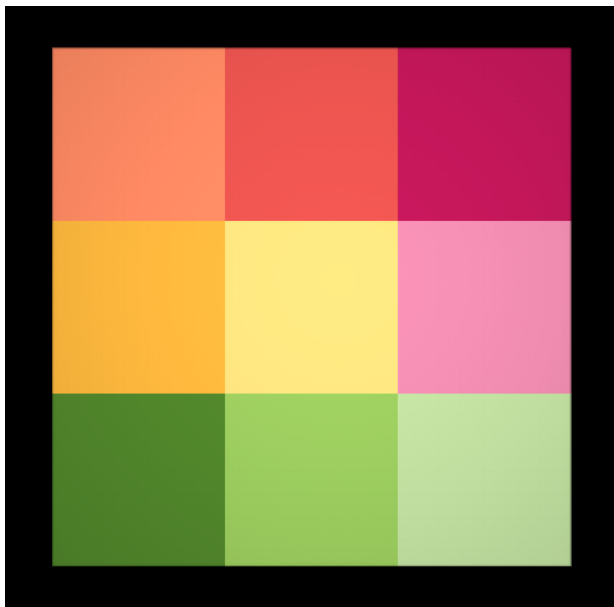


# Прямоугольник и его разбиение на 2 части

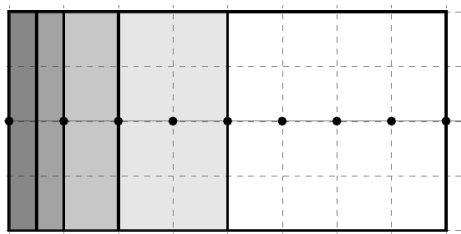




# Замоцнение прямоугольником

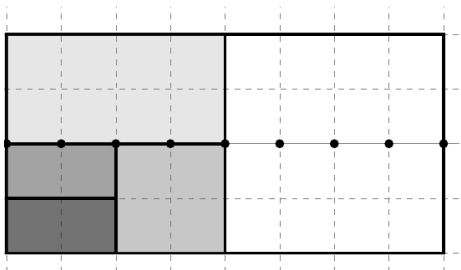


# Чем матричное сжатие лучше прямого произведения



$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

так нельзя!



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

так можно!

# Общий двухциферный случай

- Двухциферный аттрактор определяется, с точностью до аффинного подобия, характеристическим многочленом матрицы  $M$ .
- Любому целому приведённому растягивающему полиному со свободным коэффициентом  $\pm 2$  соответствует единственный с точностью до аффинного подобия двухциферный аттрактор.

$p(z) = z^d + a_{d-1}z^{d-1} + \dots + a_0, a_0 = \pm 2 \Rightarrow$   
сопровождающая матрица

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{d-1} \end{pmatrix}$$

# Общий двухциферный случай

## Определение

Аттрактор называется **изотропным**, если он порождён *изотропной матрицей*  $M$  (диагонализируемая матрица с равными по модулю собственными значениями).

В  $\mathbb{R}^2$  есть три 2-аттрактора – прямоугольник, дракон и медведь, все изотропные.

В  $\mathbb{R}^3$  семь 2-аттракторов, среди них только один изотропный – куб.

# Классификация изотропных 2-аттракторов

## Теорема

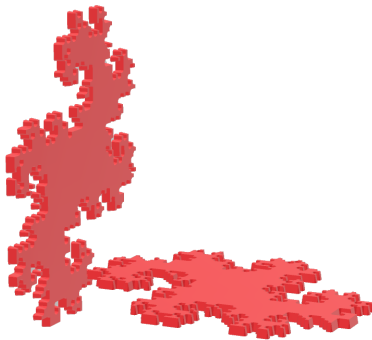
Если  $d$  нечётно, то все изотропные 2-аттракторы в  $\mathbb{R}^d$  – параллелепипеды.



# Классификация изотропных 2-аттракторов

## Теорема

Если  $d = 2k$  – чётно, то в  $\mathbb{R}^d$  существуют, с точностью до аффинного подобия, ровно три изотропных 2-аттрактора: параллелепипед, прямое произведение  $k$  драконов и прямое произведение  $k$  медведей.



# Количество различных 2-аттракторов в $\mathbb{R}^d$

Предложение [I. Kirat, K.-S. Lau, 2000]

Каждый 2-аттрактор центрально-симметричен.

Доказательство. Пусть  $D = \{\mathbf{0}, \mathbf{e}\}$ . Обозначим

$\mathbf{c} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} M^{-j} \mathbf{e}$ . Тогда  $G = \mathbf{c} + \sum_{j=1}^{\infty} \pm \frac{1}{2} M^{-j} \mathbf{e}$ . Множество

$\sum_{j=1}^{\infty} \pm \frac{1}{2} M^{-j} \mathbf{e}$  симметрично относительно нуля, поэтому  $G$  симметрично относительно точки  $\mathbf{c}$ .



## Определение.

Алгебраические полиномы  $p = \sum_{k=0}^d p_k t^k$  и  $q = \sum_{k=0}^d q_k t^k$  называются *противоположными*, если  $q_k = (-1)^{d-k} p_k$ ,  $k = 0, \dots, d$ .

Корни полинома  $q$  – это корни  $p$ , взятые с обратным знаком. Матрицы  $M$  и  $-M$  имеют противоположные характеристические полиномы.

## Предложение

Полиномы порождают один и тот же 2-аттрактор  $\Leftrightarrow$  они равны или противоположны.

**Пример.** Полиномы  $p(z) = z^3 + 2z^2 + 2z + 2$  и  $q(z) = z^3 - 2z^2 + 2z - 2$  порождают равные аттракторы.



# Количество различных 2-аттракторов в $\mathbb{R}^d$

Число различных аттракторов в  $\mathbb{R}^d$  равно числу  $N(d)$  приведенных растягивающих целых полиномов степени  $d$ , с точностью до противоположных.

Что известно?

$d=2$  Три аттрактора:

Многочлен	Тайл	Показатель Гёльдера в $L_2$
$z^2 + 2$	Квадрат	0.5
$z^2 + 2z + 2$	Дракон	0.2382
$z^2 + z + 2$	Медведь	0.3446

Таблица: Двумерные 2-аттракторы (тайлы)

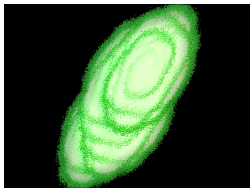
# Количество различных 2-аттракторов в $\mathbb{R}^3$

**d=3** Семь аттракторов:

Многочлен	Показатель Гёльдера в $L_2$
$z^3 + 2z^2 + 2z + 2$	0.06822
$z^3 + z^2 + z + 2$	0.23148
$z^3 + 2$	0.5
$z^3 - z^2 - z + 2$	0.23282
$z^3 - z + 2$	0.1173
$z^3 - 2z + 2$	0.02563
$z^3 + z^2 + 2$	0.04713

Таблица: Трёхмерные 2-аттракторы

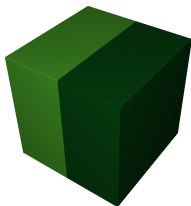
Среди них только один изотропный – куб.



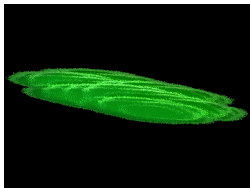
1 a)  $\alpha = 0.06822$



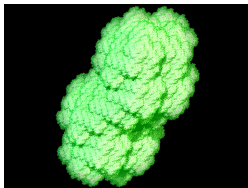
2 a)  $\alpha = 0.23148$



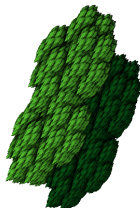
3  $\alpha = 0.5$



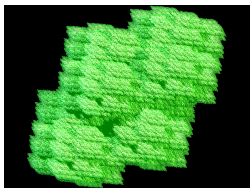
1 b)



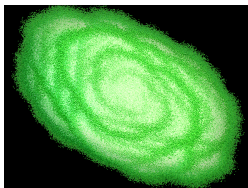
2 b)



4 a)  $\alpha = 0.23282$



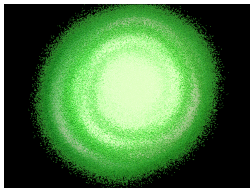
4 6)



5 a)  $\alpha = 0.1173$



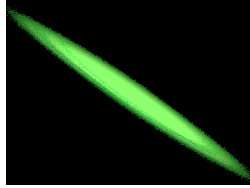
6 a)  $\alpha = 0.02563$



7  $\alpha = 0.04713$



5 6)



6 6)

Будем оценивать число  $N(d)$  растягивающих полиномов степени  $d$  со свободным коэффициентом  $\pm 2$ , с точностью до противоположных.

Что известно?

В литературе известны две серии таких полиномов:

- $p(z) = z^d - z^m + 2$  при нечетном  $\frac{m}{(m,d)}$ .

(Варианты:  $\pm z^m$  и  $\pm 2$  при других условиях на четность степеней.)

- $p(z) = \frac{z^m + z^q - 2}{z^{(m,q)} - 1}$

(Вариант  $\frac{z^m + z^q + 2}{z^{(m,q)} + 1}$  при условии, что  $m, q$  делятся на одинаковую максимальную степень двойки.)

В обеих сериях число полиномов линейно по  $d$ .

# Количество различных 2-аттракторов в $\mathbb{R}^d$

## Теорема

Для любого  $d \geq 2$  имеем  $\frac{1}{16} d^2 \leq N(d) \leq 2^{d+\varepsilon}$

Доказательство верхней оценки опирается на теорему Дубицкаса-Конягина о количестве полиномов с ограниченной мерой Малера.

Для доказательства оценки снизу нужно предъявить  $\frac{1}{16} d^2$  полиномов.

**Определение.** Вектор  $(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{R}^3$  называется плохим, если он пропорционален вектору  $(3x + s, 3y + s, 3z + s)$ , где  $s \in \{1, 2\}$ , и  $x, y, z \in \mathbb{Z}$ . Иначе вектор хороший.

#### Предложение

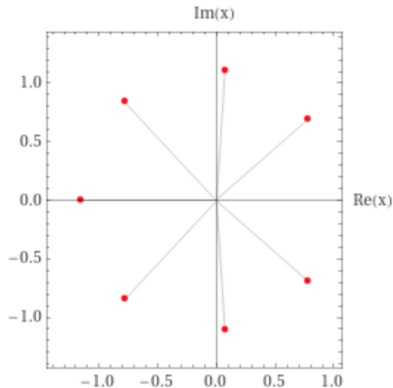
Любой многочлен вида  $P(z) = (1 + z^m)(1 + z^q)(1 + z^k) + 1$  является растягивающим, если  $d = m + q + k$  и  $(m, q, k)$  является хорошим вектором.

В этой серии  $\frac{1}{16} d^2 + O(d)$  полиномов.

# Количество различных 2-аттракторов в $\mathbb{R}^d$

## Пример

$$P(z) = (1+z)(1+z^2)(1+z^4) + 1$$

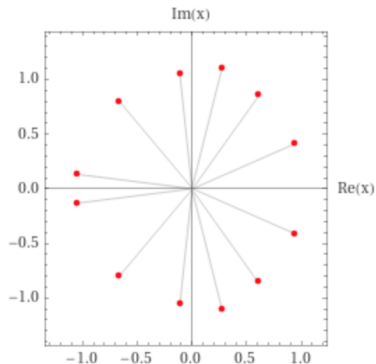




# Количество различных 2-аттракторов в $\mathbb{R}^d$

## Пример

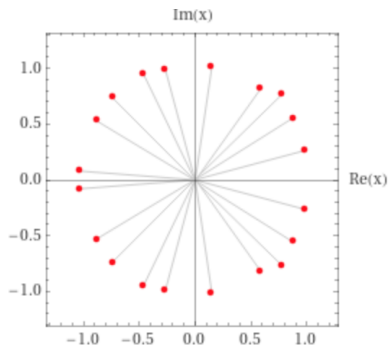
$$P(z) = (1 + z^2)(1 + z^3)(1 + z^7) + 1$$



# Количество различных 2-аттракторов в $\mathbb{R}^d$

## Пример

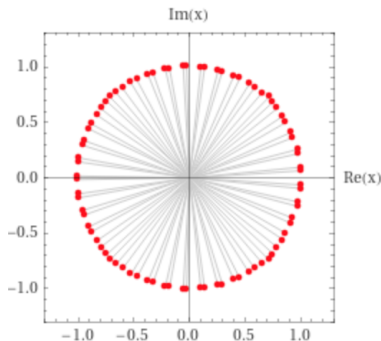
$$P(z) = (1 + z^4)(1 + z^5)(1 + z^{11}) + 1$$



# Количество различных 2-аттракторов в $\mathbb{R}^d$

## Пример

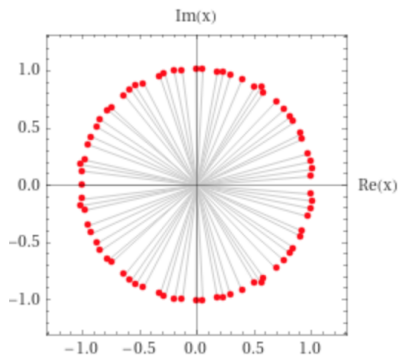
$$P(z) = (1 + z^4)(1 + z^{37})(1 + z^{41}) + 1$$



# Количество различных 2-аттракторов в $\mathbb{R}^d$

## Пример

$$P(z) = (1 + z^{16})(1 + z^{22})(1 + z^{35}) + 1$$



# Верхняя оценка $N(d) \leq 2^{d+\varepsilon}$

## Определение

*Мерой Малера* алгебраического полинома  $p(t) = a_d t^d + \dots + a_1 t + a_0$  называется число  $\mu(p) = |a_d| \prod_{i=1}^d \max\{1, |\lambda_i|\}$ , где  $\lambda_1, \dots, \lambda_d$  – корни полинома  $p$  с учётом кратности.

Следующую теорему приводим в упрощенной формулировке. Обозначим  $\theta = 1.32471\dots$  – корень полинома  $x^3 - x - 1$ .

## Теорема (Дубицкас, Конягин, 1998)

Если  $T \geq \theta$ , то количество целых полиномов со старшим коэффициентом 1, мера Малера которых не больше  $T$ , не превосходит  $T^d \left(1 + \frac{16 \ln \ln d}{\ln d}\right)$ .

### Доказательство верхней оценки для $N(d)$ .

У растягивающего полинома с коэффициентами  $a_d = 1, a_0 = \pm 2$  мера Малера равна  $\prod_{i=1}^d |\lambda_i| = |a_0| = 2$ . Поэтому  $N(d)$  не превосходит числа целых полиномов, у которых  $\mu(p) \leq 2$ . Применяя для  $T = 2$ , завершаем доказательство.



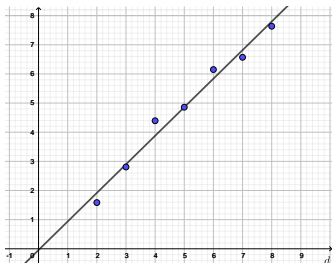
### Теорема

Количество  $N(d)$  не аффинно-подобных 2-аттракторов размерности  $d$  удовлетворяет неравенствам

$$\frac{d^2}{16} - \frac{43d}{36} - \frac{5}{6} \leq N(d) \leq 2^d \left(1 + \frac{16 \ln \ln d}{\ln d}\right)$$

$d$	Число полиномов	$N(d)$
2	6	3
3	14	7
4	36	21
5	58	29
6	128	71
7	190	95
8	362	199

Таблица: Оценка снизу на число 2-аттракторов



# Критерий устойчивости Шура-Кона

Пусть

$$p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

$$p^*(x) = a_0 x^n + \dots + a_{n-1} x + a_n.$$

Определим преобразование Шура

$$Tp = a_0 p - a_n p^*.$$

Коэффициенты многочлена  $Tp = \sum_k b_k x^k$  при этом

$$b_k = a_0 a_k - a_n a_{n-k}.$$

$p$  растягивающий  $\Leftrightarrow Tp$  растягивающий и  $|a_0| > |a_n|$ .

Schur-Cohn algorithm, Lehmer-Schur algorithm.

$$\delta = Tp(0) = b_0 = a_0^2 - a_n^2 > 0.$$



# Пример применения критерия Шура-Кона

$$p_0(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x + 2 = \frac{x^{n+1} + x - 2}{x - 1}$$

$$p_0^*(x) = 2x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1$$

$$\begin{aligned} p_1 = Tp_0(x) &= 2x^n + 2x^{n-1} + \dots + 2x + 4 - (2x^n + x^{n-1} + \dots + 1) = \\ &= x^{n-1} + \dots + x + 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_2 = Tp_1(x) &= 3x^{n-1} + \dots + 3x + 9 - (3x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1) = \\ &= 2x^{n-2} + \dots + 2x + 8 \Rightarrow x^{n-2} + \dots + x + 4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_3 = Tp_2(x) &= 4x^{n-2} + \dots + 4x + 16 - (4x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + 1) = \\ &= 3x^{n-3} + \dots + 3x + 15 \Rightarrow x^{n-3} + \dots + x + 5. \end{aligned}$$

# Для случая целочисленных коэффициентов

M. Uray, On the expansivity gap of integer polynomials, 2019.

$$d_{i,j} = a_{j-i} \pm a_{i+j+n-k-1} \quad 1 \leq i, j \leq k$$

$F_k^\pm$  – определители.  $a_0 > 0$ .

$p$  – растягивающий  $\Leftrightarrow p(\pm 1) > 0$ , все определители  $F_k^\pm$  больше нуля.

Пример  $n = 7$ :

$$F^-(6) = \begin{vmatrix} a_0 - a_2 & a_1 - a_3 & a_2 - a_4 & a_3 - a_5 & a_4 - a_6 & a_5 - a_7 \\ -a_3 & a_0 - a_4 & a_1 - a_5 & a_2 - a_6 & a_3 - a_7 & a_4 \\ -a_4 & -a_5 & a_0 - a_6 & a_1 - a_7 & a_2 & a_3 \\ -a_5 & -a_6 & -a_7 & a_0 & a_1 & a_2 \\ -a_6 & -a_7 & 0 & 0 & a_0 & a_1 \\ -a_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 \end{vmatrix}$$

# Критерий Бистрица

Адаптация под проверку на растягиваемость:

$$T_n(x) = p_0(x) + p_0^*(x)$$

$$T_{n-1}(x) = \frac{p_0^*(x) - p_0(x)}{x - 1}$$

$$\delta_{m+1} = \frac{T_{m+1}(0)}{T_m(0)}$$

$$T_{m-1}(x) = \frac{\delta_{m+1}(1+x)T_m(x) - T_{m+1}(x)}{x}$$

Критерий: все  $T_m(0) \neq 0$ ,  $T_m(1)$  имеют одинаковый знак.

# Пример применения критерия Бистрица

$$p_0(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x + 2 \quad p_0^*(x) = 2x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1$$

$$T_n(x) = 3x^n + 2x^{n-1} + \dots + 2x + 3$$

$$T_{n-1}(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1, \delta_n = 3$$

$$T_{n-2}(x) = \frac{3x^n + 3x^{n-1} + \dots + 3 + 3x^{n+1} + 3x^n + \dots + 3x}{x} -$$
$$- \frac{3x^n + 2x^{n-1} + \dots + 2x + 3}{x} = 4(x^{n-2} + \dots + x + 1), \delta_{n-1} = 1/4$$

$$T_{n-3}(x) = \frac{x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1 + x^{n+1} + x^n + \dots + x}{x} -$$
$$- \frac{x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1}{x} = x^{n-2} + \dots + x + 1, \delta_{n-2} = 4$$