Операторы композиции в BV-пространствах на группах Карно

Сбоев Данил
e-mail: dnlsboev@gmail.com
ИМ СО РАН, Новосибирск

Вторая конференция математических центров России
Москва

10.11.2022

История проблемы[1]

Квазиконформные гомеоморфизмы как операторы L^1_n

Область G' предполагается ограниченной.
Пусть $\varphi\colon G \to G'$ – отображение, определенное п.вс. в G и индуцирующее ограниченный оператор

$$\varphi^*\colon L^1_n(G') \to L^1_n(G)$$

по правилу: для $f \in L^1_n(G)$, $\varphi^* f = f \circ \varphi$. Тогда отображение φ есть квазиконформный гомеоморфизм.
Всякий квазиконформный гомеоморфизм $\varphi\colon G \to G'$ индуцирует ограниченный линейный изоморфизм $\varphi^*\colon L^1_n(G') \to L^1_n(G)$ по правилу $\varphi^* u = u \circ \varphi$.

[1] Водопьянов С.К. О регулярности отображений, обратных к соболевским, и теория $\mathscr{Q}_{q,p}$-гомеоморфизмов, *Сиб. матем. журн.*, 2020.

Операторы композиции BV-пространствах на $\mathbb{R}^n$

Теорема (Kleprlik L. Composition operator for functions of bounded variation, *arXiv*, 2020)

Пусть $f\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ – гомеоморфизм класса BV_{loc} открытых множеств $\Omega_1,\ \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$. Допустим, что существует константа $K > 0$ такая, что

$$(\star) \quad |Df|(f^{-1}(A)) \leq K\mathcal{L}^n(A) \text{ для всех борелевских } A \subset \Omega_2.$$

Тогда оператор $T_f(u) = u \circ f$ отображает функции из $BV(\Omega_2)$ в $BV(\Omega_1)$ и

$$|D(u \circ f)|(\Omega_1) \leq K|Du|(\Omega_2).$$

С другой стороны, если гомеоморфизм $f\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ такой, что $T_f\colon C_0(\Omega_2) \cap BV(\Omega_2) \to BV(\Omega_1)$, тогда $f \in BV_{\mathrm{loc}}(\Omega_1, \Omega_2)$ и существует $K > 0$, что выполнено $(\star)$.

Группы Карно[2]

Группа Карно G – связная и односвязная группа Ли, алгебра Ли $\mathfrak{g}$ которой допускает стратификацию, то есть

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{r} V_i,$$

где $[V_1, V_j] = V_{j+1}$ для $j = 1, \dots, r-1$ и $[V_1, V_r] = \{0\}$. Векторные поля в V_1 мы будем называть *горизонтальными*, $\dim V_1 = n$.

Экспоненциальное отображение $\mathrm{Exp}\colon \mathfrak{g} \to G$ является глобальным диффеоморфизмом.

[2] Folland G.B., Stein E.M. Hardy spaces on homogeneous groups, 1982
Lanconelli E. Stratified Lie groups and potential theory for their sub-Laplacians, 2007

Группы Карно

Фиксируем канонический базис горизонтального подространства $\mathfrak{X} = \{\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n\}$ и считаем этот набор ортонормированным.

Кусочно-гладкая кривая $\gamma\colon [a, b] \to G$ называется *горизонтальной*, если $\dot\gamma \in V_1$ в точках, где $\dot\gamma$ имеет смысл. Тогда метрика Карно-Каратеодори определяется следующим образом:

$$d_{cc}(x, y) = \inf\{l_{riem}(\gamma) \mid \gamma \text{ – гор. кривая, соед. } x \text{ и } y\}.$$

Группа Гейзенберга $\mathbb{H}^1$

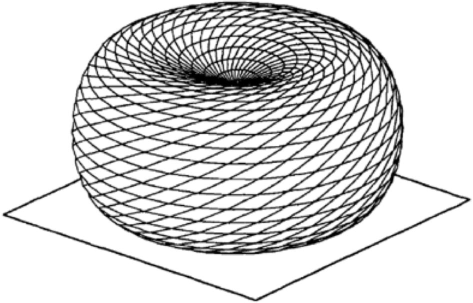
$\mathbb{H}^1 = (\mathbb{R}^3, \circ)$, где операция задана следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' + \frac{1}{2}(yx' - xy') \end{pmatrix}.$$

Горизонтальные векторные поля $\mathbf{X} = \partial_x + \frac{y}{2}\partial_z$, $\mathbf{Y} = \partial_y - \frac{x}{2}\partial_z$ и $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \mathbf{Z} = -\partial_z$.

Алгебра Ли допускает стратификацию $\mathfrak{h}^1 = V_1 \oplus V_2$, где $V_1 = \mathrm{span}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ и $V_2 = \mathrm{span}(\mathbf{Z})$.

Шар в группе Гейзенберга[3]



[3] F. Baudoin, An introduction to the geometry of stochastic flows, 2004

Функции ограниченной вариации[4]

Пусть $G \supset U$ – открытое множество.
Если для функции $u \in L^1(U)$ выполнено

$$|Du|(U) = \sup\left\{ \int_U u \operatorname{div} \psi \, dx \mid \psi \in C_0^1(U, \mathbb{R}^n),\ |\psi| \leq 1 \right\} < \infty,$$

где $\operatorname{div} \psi = \sum_1^n \mathbf{X}_i \psi_i$, то $u \in BV(U)$.

Мы говорим, что $u \in BV_{\mathrm{loc}}(U)$, если $u \in BV(\Omega)$ для всех $\Omega \Subset U$.

[4] Эванс Л.К., Гариепи Р.Ф. Теория меры и тонкие свойства функций, 2002
Ambrosio L., Fusco N., Pallara D. Functions of bounded variation and free discontinuity problems, 2000
Garofalo N., Nhieu D.M. Isoperimetric and Sobolev inequalities for Carnot-Caratheodory spaces and the existence of minimal surfaces, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1996

Функции ограниченной вариации

Эквивалентно предыдущему, $u \in BV(U)$, если $u \in L^1(U)$ и существует конечная мера Радона $Du = (\mathbf{X}_1 u, \ldots, \mathbf{X}_n u)$ такая, что

$$\int_U u \mathbf{X}_i \varphi \, dx = - \int_U \varphi \, d\mathbf{X}_i u, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(U), \; i = 1, \ldots, n.$$

Естественно включение $W^{1,1}(U) \subset BV(U)$.

Отображения ограниченной вариации[5]

Пусть $\varphi\colon \Omega \to \Omega'$, тогда $\varphi \in BV_{\mathrm{loc}}(\Omega, \Omega')$, если существует мера Радона σ и выполнены следующие условия:

1) $\varphi \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega, \Omega')$, то есть $\int_A d_{cc}(z_0, \varphi(x))\, dx < \infty$ для произвольного измеримого $A \Subset \Omega$ и некоторой точки $z_0 \in \Omega'$,

2) для любой функции $v \in 1\text{-}\operatorname{Lip}(\Omega')$ композиция $v \circ \varphi \in BV_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ и $|Dv \circ \varphi| \leq \sigma$.

Наименьшая из таких мажорант $\sigma_0 = |D\varphi|$.

[5] Ambrosio L. Metric space valued functions of bounded variation, *Annali Della Scuola Normale Superiore Di Pisa-classe Di Scienze*, 1990

Основной результат

Теорема

Допустим, что гомеоморфизм $\varphi\colon \Omega \to \Omega'$ индуцирует ограниченный оператор композиции
$\varphi^*\colon BV(\Omega') \cap C(\Omega') \to BV(\Omega)$.
Тогда следующие условия необходимы:
1) $\varphi \in BV_{\mathrm{loc}}(\Omega, \Omega')$;
2) $|D\varphi|(\varphi^{-1}(A)) \le C|A|$, где $A \subset \Omega'$ – произвольное борелевское множество.

Обратно, если гомеоморфизм φ удовлетворяет 1, 2, то он индуцирует ограниченный оператор φ^*.

О горизонтальном слоении[6]

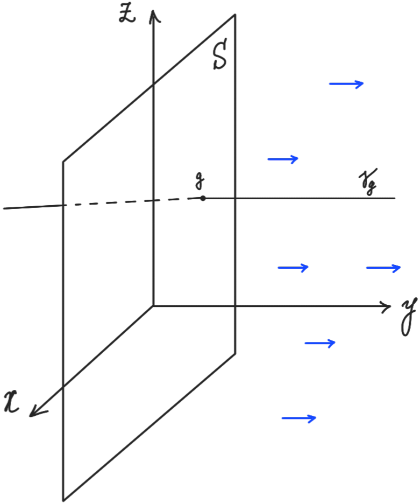
Для $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}$ рассмотрим гладкое слоение открытого множества $A \subset G$.

Роль слоя играют интегральные кривые $\gamma_g(t) = g\,\mathrm{Exp}(t\mathbf{X})$, g – точка на трансверсальной к $\mathbf{X}$ поверхности S.

Данное слоение снабжено мерой $d\gamma = i(\mathbf{X})dx$

[6] Koranyi A., Reimann H.M. Foundations for the Theory of Quasiconformal Mappings on the Heisenberg Group, *Advances in Mathematics*, 1995

О горизонтальном слоении



$$S=\{(x,y,z)\in R^3 : y=0\}$$

$$g=(x,0,z)\in S$$

$$\gamma_g(t)=(x,t,z)$$

$$d\gamma=\mathcal{H}^2$$

Свойства класса BV на интегральных линиях

Существенная вариация на линии

Пусть $f\colon \gamma_g(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ – измеримая функция. Определим существенную вариацию на $\gamma_g(a,b)$, где $a<b$, следующим образом:

$$\operatorname{ess} \mathrm{V}_{\gamma_g(a,b)} f = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{m} |f(\gamma_g(t_{j+1})) - f(\gamma_g(t_j))| \right\},$$

где супремум берется по всем разбиениям $a < t_1 < \dots < t_{m+1} < b$ и каждая точка t_j является точкой аппроксимативной непрерывности $f \circ \gamma_g$.

Свойства класса BV на интегральных линиях

Существенная вариация отображения на линии

Пусть $\varphi\colon G \to G$ – непрерывное отображение группы Карно. Определим существенную вариацию на $\gamma_g(a,b)$, где $a<b$, следующим образом:

$$\operatorname{ess} \mathrm{V}_{\gamma_g(a,b)}\, \varphi = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{m} d_{cc}(\varphi(\gamma_g(t_{j+1})), \varphi(\gamma_g(t_j))) \right\},$$

где супремум берется по всем разбиениям $a < t_1 < \cdots < t_{m+1} < b$.

Свойства класса BV на интегральных линиях

Теорема

Если $\varphi \in L^1_{\mathrm{loc}}(G, G)$ – непрерывное отображение, то $\varphi \in BV_{\mathrm{loc}}(G, G)$ тогда и только тогда, когда

$$\int_K \operatorname{ess} \mathrm{V}_{\gamma_g^k(a,b)} \varphi \, d\gamma^k(g) < \infty,$$

для любых $k = 1, \ldots, n$, $a < b$ и компактного подмножества $K \subset S^k$.

Оценки на дифференциал композиции[7]

Для простоты будем считать, что φ – непрерывное отображение.

Правило дифференцирования композиции в $\mathbb{R}^n$

Пусть $\varphi \in BV(\Omega, \mathbb{R}^m)$ и $u \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$ – липшицева функция, удовлетворяющая условию: $u(0) = 0$, если $|\Omega| = \infty$.
Тогда $v = u \circ \varphi \in BV(\Omega, \mathbb{R}^p)$ и

$$Dv = \nabla u(\varphi) \nabla \varphi \mathcal{L}^n + \nabla u(\varphi) D^c \varphi.$$

[7] Вольперт А.И. Пространства BV и квазилинейные уравнения, *Матем. сб.*, 1967
Ambrosio L., Fusco N., Pallara D. Functions of bounded variation and free discontinuity problems, 2000

Оценки на дифференциал композиции

Теорема

Пусть $\varphi\colon \Omega \to \Omega'$ – гомеоморфизм класса $BV_{\mathrm{loc}}(\Omega, \Omega')$, $u \in C^1(\Omega')$. Тогда $v = u \circ \varphi \in BV_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ и при этом имеет место оценка:

$$|Dv|(U) \leq C \int_U |\nabla u(\varphi(x))| \, d|D\varphi|$$

для любого борелевского компактно вложенного множества $U \subset \Omega'$.

Константа $C > 0$ зависит только от стуктуры и свойств группы G.

Описание ограниченных операторов композиции пространств BV

Теорема

Допустим, что гомеоморфизм $\varphi\colon \Omega \to \Omega'$ индуцирует ограниченный оператор композиции
$\varphi^*\colon BV(\Omega') \cap C(\Omega') \to BV(\Omega)$.
Тогда следующие условия необходимы:
1) $\varphi \in BV_{\mathrm{loc}}(\Omega, \Omega')$;
2) $|D\varphi|(\varphi^{-1}(A)) \leq C|A|$, где $A \subset \Omega'$ – произвольное борелевское множество.

Обратно, если гомеоморфизм φ удовлетворяет 1, 2, то он индуцирует ограниченный оператор φ^*.

Необходимые условия

С помощью стандартных методов получаем оценку

$$|Dv \circ \varphi|(\varphi^{-1}(B)) \le C|B|,$$

где $v \in 1\text{-}\operatorname{Lip}(\Omega')$, $2B \subset \Omega'$,

$\Rightarrow \varphi \in BV_{\mathrm{loc}}(\Omega, \Omega')$.

$\Rightarrow |D\varphi|(\varphi^{-1}(A)) \le C|A|$.

Достаточность условий

Лемма (Koskela P., Malý J. Mappings of finite distortion: The zero set of the Jacobian, *J. Eur. Math. Soc.*, 2003)

Если φ – гомеоморфизм, удовлетворяющий условиям 1, 2, то существует $c > 0$ такая, что

$$\rho(x) = \lim_{r\to 0+} \frac{|D\varphi|(B(x,r))}{|B(x,r)|} > c.$$

$\Rightarrow$ φ обладает $\mathcal{N}^{-1}$-свойством Лузина,

$\Rightarrow$ Если $u \in L^1(\Omega')$, то $u\circ\varphi \in L^1(\Omega)$.

$\Rightarrow$ Если $u_n \xrightarrow{L^1(\Omega')} u$, то $u_n\circ\varphi \xrightarrow{L^1(\Omega)} u\circ\varphi$.

Достаточность условий

I. Аппроксимировать $u \in BV(\Omega')$ гладкими функциями $u_n \in C^\infty(\Omega') \cap BV(\Omega')$.

II. Оценить $|Du_n \circ \varphi|$.

III. Воспользоваться полунепрерывностью снизу BV-производной:

$$|Du \circ \varphi|(\Omega) \leq \liminf |Du_n \circ \varphi|(\Omega) \leq \\ \leq \liminf C \int |\nabla u_n(\varphi(x))| \, d|D\varphi|(x) \leq \\ \leq C \liminf \int |\nabla u_n| \, dy = C|Du|(\Omega').$$

Спасибо за внимание!