О сильной выпуклости множества достижимости линейной управляемой системы

Максим Балашов, balashov73@mail.ru,

Lab № 7 ИПУ РАН

Вторая конференция Математических центров России. Секция "Действительный и функциональный анализ"

Москва • 11.11.2022

Линейная система

$$x' \in Ax + U, \qquad x(0) = 0. \tag{1}$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклый компакт. Рассмотрим множество достижимости $\mathcal{R}(t)$ указанной системы,

$$\mathcal{R}(t) = \int\limits_0^t e^{As} U \, ds.$$

$$\mathcal{R}(t) = \{\int\limits_0^t e^{As} u(s) \, ds \;\; : \;\; u(s) \in U - \text{L-изм.}\}$$

$$\mathcal{R}(t) = \lim_{|\tau|\to 0} \sum_{i=0}^{l-1} F(s_i)(s_{i+1} - s_i),$$

Задача и известные факты

Множество $\mathcal{R}(t)$ выпукло (Ляпунов, 1940).

Можно ли сказать что-то большее?

Если $F : [0, t] \to 2^{\mathbb{R}^n}$ непрерывное в метрике Хаусдорфа многозначное отображение с выпуклыми компактными значениями и $F(s)$ сильно выпуклое с радиусом $R(s)$ $\forall s$, то множество $\int\limits_0^t F(s)\,ds$ сильно выпуклое с радиусом $R = \int\limits_0^t R(s)\,ds$ (Олех, Франковска 1981).

Если $\int\limits_0^T F(s)\,ds$ есть сильно выпуклое мн. с радиусом R, то для любого $t \in [0, T]$ $\int\limits_0^t F(s)\,ds$ с.в. с р. R.

Известные факты

G. Reissig 2014-15 гг.

Для выпуклого компакта $Q \subset \mathbb{R}^n$ определим

$s(p, Q) = \sup\limits_{x \in Q}(p, x)$ и

$Q(p) = \{x \in Q \ : \ (p, x) = s(p, Q)\}$.

Если для системы (1) для всякого единичного вектора $p \in \mathbb{R}^n$ множество $(e^{As}U)(p)$ одноточечно для п.в. $s \in [0, t]$, то опорное подмножество

$$\mathcal{R}(t)(p) = \int\limits_0^t (e^{As}U)(p)\, ds = \int\limits_0^t e^{As}U(e^{A^T s}p)\, ds$$

одноточечно и значит множество $\mathcal{R}(t)$ строго выпукло.

Важность сильной выпуклости

Множество $Q \subset \mathbb{R}^n$ сильно выпукло с радиусом $R \Leftrightarrow$ для любых единичных векторов $p, q \in \mathbb{R}^n$ выполнено условие Липшица

$$\|Q(p) - Q(q)\| \leq R\|p - q\|.$$

Условие критически важно для линейной сходимости методов проекции градиента.

$$s(p, \mathcal{R}(t)) = \int\limits_0^t s(p, e^{As}U)\, ds, \; \mathcal{R}(t)(p) = \int\limits_0^t (e^{As}U)(p)\, ds.$$

Можно применять алгоритмы 1-го порядка (метод проекции градиента) без аппроксимации $\mathcal{R}(t)$.

Один пример множества достижимости

Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$, $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$, $e^{As} = e^{\lambda s} \begin{bmatrix} 1 & s & \frac{1}{2}s^2 \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$U = \mathrm{co}\{(0,0,\pm 1)\}$. Для $\varepsilon \in (0,1)$ рассмотрим векторы $p = \frac{1}{3}(2,-2,1)$ и $q = q(\varepsilon) = \frac{(2,-2,1-\varepsilon)}{\sqrt{9-2\varepsilon+\varepsilon^2}}$. Легко проверить, что $\|p-q\| \asymp \varepsilon$, $\varepsilon \to 0$, и для $t > 1+\sqrt{\varepsilon}$ ($s_{1,2} = 1 \pm \sqrt{\varepsilon}$ есть корни уравнения $(e^{A^T s}q(\varepsilon), (0,0,1)^T) = 0$)

$$\|\mathcal{R}(t)(p) - \mathcal{R}(t)(q)\| = \| \int\limits_{1-\sqrt{\varepsilon}}^{1+\sqrt{\varepsilon}} e^{\lambda s}(s^2,\ 2s,\ 2)^T\, ds\| \asymp \sqrt{\varepsilon}.$$

$\mathcal{R}(t)$ строго выпукло.

Локальная сильная выпуклость

Выпуклый компакт $Q \subset \mathbb{R}^n$ локально сильно выпуклый в направлении $\|p_0\| = 1$, если

$$Q \subset B_R(Q(p_0) - Rp_0).$$

$\mathcal{S}_1 = \{x \ : \ \|x\| = 1\}$.
Пусть $0 \notin Q$, $z_0 = P_Q 0$. Рассмотрим задачу $\min_{p \in \mathcal{S}_1} s(p, Q)$.
Итерации $\{p_k\}$ алгоритма $p_{k+1} = P_{\mathcal{S}_1}(p_k - tz_k)$ при произвольном выборе $p_1 \in \mathcal{S}_1 \cap B_r(p_0)$, $\lambda \in (0, 1/R)$ и $z_k \in Q(p_k)$ удовлетворяют условию
$\|p_{k+1} - p_0\|^2 \leq$
$\leq \frac{1}{1+\lambda\|z_0\|} \left(\|p_k - p_0\|^2 - \lambda \left(\frac{1}{R} - \lambda\right) \|z_k - z_0\|^2\right).$

Локальная сильная выпуклость есть

Пусть множество U из (1) зонотоп, т.е. $U = \sum_{i=1}^{m} V_i$ и V_i — отрезки. Будем также считать, что 0 — середина V_i для всех i.

Пусть $U = [-u, u] \subset \mathbb{R}^n$.

Рассмотрим систему (1), где множество $U \subset \mathbb{R}^n$ — отрезок с центром в нуле, не параллельный никакому собственному подпространству матрицы A.

Зафиксируем единичный вектор $p \in \mathbb{R}^n$. Пусть уравнение $(p, e^{As}u) = 0$ имеет простые корни (корни кратности 1) на отрезке $[0, t]$. Тогда множество $\mathcal{R}(t)$ удовлетворяет локальному условию сильной выпуклости в направлении вектора p с некоторым радиусом $R > 0$.

Локальной сильной выпуклости нет

Рассмотрим систему (1), где множество $U \subset \mathbb{R}^n$ — отрезок с центром в нуле, не параллельный никакому собственному подпространству матрицы A.
Зафиксируем единичный вектор $p \in \mathbb{R}^n$. Пусть уравнение $(p, e^{As}u) = 0$ имеет корень кратности ≥ 2 на отрезке $[0, t]$. Тогда множество $\mathcal{R}(t)$ не удовлетворяет локальному условию сильной выпуклости в направлении вектора p.
Проверять кратность корней уравнения $(p, e^{As}u) = 0$ в некоторых случаях можно с помощью результанта.

Пример

Рассмотрим систему (1) на отрезке $[0, t]$ с $x \in \mathbb{R}^n$ и $A = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, где $\lambda_i = \frac{m_i}{N}$, $N \in \mathbb{N}$, $m_i \in \mathbb{Z}$, $m_n < m_{n-1} < \cdots < m_1$. Пусть $U = \operatorname{co}\{\pm u\}$, где $u = (u_1, \ldots, u_n)$ и $u_i \neq 0$ для всех i.

Тогда $(p, e^{As}u) = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i u_i e^{\frac{m_i}{N}s}$. Сделаем замену $\tau = e^{\frac{s}{N}}$, $\tau \in [1, e^{\frac{t}{N}}]$. Тогда надо исследовать корни $P(\tau) = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i u_i \tau^{m_i - m_n}$, $m_i - m_n \in \mathbb{N}$ при $1 \leq i \leq n-1$.

При условии $\operatorname{res}(P, P') \neq 0$ многочлен P имеет (если имеет) только простые корни при $\tau \in [1, e^{\frac{t}{N}}]$. Поэтому условие $\operatorname{res}(P, P') \neq 0$ достаточно для того, чтобы множество $\mathcal{R}(t)$ было л. с. в. в направлении p.

Спасибо!