Оценки числа многомерных разбиений

Кристина Оганесян

МГУ им. М.В. Ломоносова, МЦФПМ

Вторая конференция Математических центров России

11 ноября 2022

Разбиения числа

Для натурального n обозначим через $p_2(n)$ число его **разбиений**, т.е. представлений в виде

$$n = n_1 + \ldots + n_m, \quad n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_m, \ n_i \in \mathbb{N}.$$

Разбиения числа

Для натурального n обозначим через $p_2(n)$ число его **разбиений**, т.е. представлений в виде

$$n = n_1 + \ldots + n_m, \quad n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_m, \ n_i \in \mathbb{N}.$$

Производящая функция для p_2

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 - x^k)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} p_2(n) x^n.$$

Разбиения числа

Для натурального n обозначим через $p_2(n)$ число его **разбиений**, т.е. представлений в виде

$$n = n_1 + \ldots + n_m, \quad n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_m, \; n_i \in \mathbb{N}.$$

Производящая функция для p_2

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1 - x^k)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} p_2(n)x^n.$$

Теорема A (Hardy, Ramanujan, 1917)

$$p_2(n) \sim \frac{e^{\sqrt{\frac{2n}{3}}\pi}}{4\sqrt{3n}}.$$

Здесь $f(n) \sim g(n)$ означает $\lim_{n\to\infty} f(n)/g(n) = 1$.

Плоские разбиения

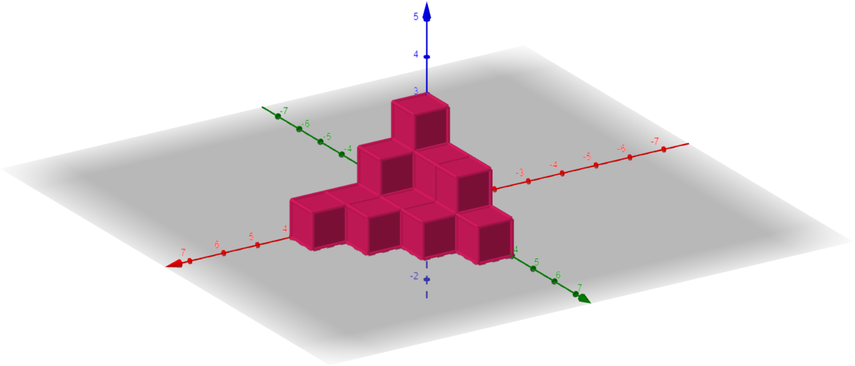
Далее $p_3(n)$ — число **плоских разбиений**

$$n = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} n_{ij}, \quad n_{ij} \geq n_{i+1,j},\ n_{ij} \geq n_{i,j+1},\ n_i \in \mathbb{Z}_+.$$

Плоские разбиения

Далее $p_3(n)$ — число **плоских разбиений**

$$n = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} n_{ij}, \quad n_{ij} \geq n_{i+1,j}, \; n_{ij} \geq n_{i,j+1}, \; n_i \in \mathbb{Z}_+.$$



Плоские разбиения

Далее $p_3(n)$ — число **плоских разбиений**

$$n = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} n_{ij}, \quad n_{ij} \geq n_{i+1,j},\ n_{ij} \geq n_{i,j+1},\ n_i \in \mathbb{Z}_+.$$

Производящая функция для p_3 (MacMahon, 1912)

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 - x^k)^{-k} = \sum_{n=0}^{\infty} p_3(n) x^n$$

Плоские разбиения

Далее $p_3(n)$ — число **плоских разбиений**

$$n = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} n_{ij}, \quad n_{ij} \geq n_{i+1,j},\ n_{ij} \geq n_{i,j+1},\ n_i \in \mathbb{Z}_+.$$

Производящая функция для p_3 (MacMahon, 1912)

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 - x^k)^{-k} = \sum_{n=0}^{\infty} p_3(n) x^n$$

Теорема B (Wright, 1931)

$$p_3(n) \sim \frac{(2\zeta(3))^{\frac{7}{36}} e^{\zeta'(-1)}}{\sqrt{2\pi} n^{\frac{25}{36}}} e^{3(\zeta(3))^{\frac{1}{3}} 2^{-\frac{2}{3}} n^{\frac{2}{3}}},$$

где $\zeta'(-1) = 2 \int_0^\infty \frac{y \log y}{e^{2\pi y} - 1}\, dy \approx -0.165421.$

Многомерные разбиения и нижние множества

Теперь d-**мерные разбиения** определим аналогично:

$$n = \sum_{i_1=1}^{\infty} \dots \sum_{i_d=1}^{\infty} n_{i_1 \dots i_d}, \ \ n_{i_1 .. i_d} \geq n_{i_1, \dots, i_k+1, \dots i_d} \text{ при всех } k, \ \ n_{i_1 \dots i_d} \in \mathbb{Z}_+.$$

Многомерные разбиения и нижние множества

Теперь d-**мерные разбиения** определим аналогично:

$$n = \sum_{i_1=1}^{\infty} \dots \sum_{i_d=1}^{\infty} n_{i_1 \dots i_d}, \;\; n_{i_1 .. i_d} \geq n_{i_1, \dots, i_k+1, \dots i_d} \text{ при всех } k, \;\; n_{i_1 \dots i_d} \in \mathbb{Z}_+.$$

Нижним множеством будем называть визуализацию такого разбиения.

Многомерные разбиения и нижние множества

Теперь d-**мерные разбиения** определим аналогично:

$$n = \sum_{i_1=1}^{\infty} \dots \sum_{i_d=1}^{\infty} n_{i_1 \dots i_d}, \;\; n_{i_1 .. i_d} \geq n_{i_1, \dots, i_k+1, \dots i_d} \text{ при всех } k, \;\; n_{i_1 \dots i_d} \in \mathbb{Z}_+.$$

Нижним множеством будем называть визуализацию такого разбиения.

- Для заданного d назовём множество $S \subset \mathbb{Z}_+^d$ **нижним множеством**, если для любой точки $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}_+^d$ условие $\mathbf{x} \in S$ влечёт $\mathbf{x}' = (x_1', \dots, x_d') \in S$ для всех точек $\mathbf{x}' \in \mathbb{Z}_+^d$ с $x_i' \leq x_i, \; 1 \leq i \leq d$.

Многомерные разбиения и нижние множества

Теперь d-**мерные разбиения** определим аналогично:

$$n = \sum_{i_1=1}^{\infty} \dots \sum_{i_d=1}^{\infty} n_{i_1\dots i_d}, \;\; n_{i_1..i_d} \geq n_{i_1,\dots,i_k+1,\dots i_d} \text{ при всех } k, \;\; n_{i_1\dots i_d} \in \mathbb{Z}_+.$$

Нижним множеством будем называть визуализацию такого разбиения.

- Для заданного d назовём множество $S \subset \mathbb{Z}_+^d$ **нижним множеством**, если для любой точки $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}_+^d$ условие $\mathbf{x} \in S$ влечёт $\mathbf{x}' = (x_1', \dots, x_d') \in S$ для всех точек $\mathbf{x}' \in \mathbb{Z}_+^d$ с $x_i' \leq x_i, \; 1 \leq i \leq d$.

Обозначим через $p_d(n)$ число d-мерных нижних множеств мощности n.

Нижние множества в пространствах малой размерности

Теорема C (Bhatia, Prasad, Arora, 1997)

$$C_1(d) \leq \frac{\log p_d(n)}{n^{1-\frac{1}{d}}} \leq C_2(d).$$

Нижние множества в пространствах малой размерности

Теорема C (Bhatia, Prasad, Arora, 1997)

$$C_1(d) \le \frac{\log p_d(n)}{n^{1-\frac{1}{d}}} \le C_2(d).$$

- Dai, Prymak, Shadrin, Tikhonov, Temlyakov, 2021: При $n \ge 21^d$

$$C_1(d) = \frac{d}{(d!)^{\frac{1}{d}}} \log 2, \quad C_2(d) = C_2(2) d^{c \log d},$$

где c — абсолютная константа.

Нижние множества в пространствах малой размерности

Теорема C (Bhatia, Prasad, Arora, 1997)

$$C_1(d) \le \frac{\log p_d(n)}{n^{1-\frac{1}{d}}} \le C_2(d).$$

- Dai, Prymak, Shadrin, Tikhonov, Temlyakov, 2021: При $n \ge 21^d$

$$C_1(d) = \frac{d}{(d!)^{\frac{1}{d}}} \log 2, \quad C_2(d) = C_2(2)^{d^{c \log d}},$$

где c — абсолютная константа. Заметим, что $C_1(d)$ ограничены снизу абсолютной константой, т.к. в силу формулы Стирлинга

$$C_1(d) \ge \frac{e \log 2}{(2\pi d e^{\frac{1}{24}})^{\frac{1}{2d}}} \ge \frac{e \log 2}{(4\pi e^{\frac{1}{24}})^{\frac{1}{4}}} > 1.34,$$

так что при $n \ge 21^d$ имеем $\log p_d(n) > n^{1-1/d}$.

Основной результат

Теорема 1

Для любых $d \geq 2$ *и* $n \geq (30d)^{2d^2}$,

$$n^{1-\frac{1}{d}} < \log p_d(n) < 7200 n^{1-\frac{1}{d}}.$$

Если же n *удовлетворяет более слабому условию* $n \geq d^{12d \log d}$, *то*

$$n^{1-\frac{1}{d}} < \log p_d(n) < d^2 n^{1-\frac{1}{d}}.$$

Доступные подмножества нижнего множества

Чтобы доказать основной результат, мы будем оценивать мощности "внешних" подмножеств нижних множеств.

Доступные подмножества нижнего множества

Чтобы доказать основной результат, мы будем оценивать мощности "внешних" подмножеств нижних множеств.

Будем называть подмножество Q' нижнего множества Q **доступным**, если для любой точки $q' = (q'_1, ..., q'_d) \in Q'$, не найдётся $q = (q_1, ..., q_d) \in Q \setminus \{q'\}$ такой, что $q_i \geq q'_i$ при всех $i = 1, ..., d$.

Доступные подмножества нижнего множества

Чтобы доказать основной результат, мы будем оценивать мощности “внешних” подмножеств нижних множеств.

Будем называть подмножество Q' нижнего множества Q **доступным**, если для любой точки $q' = (q'_1, \dots, q'_d) \in Q'$, не найдётся $q = (q_1, \dots, q_d) \in Q \setminus \{q'\}$ такой, что $q_i \geq q'_i$ при всех $i = 1, \dots, d$.

Иными словами, доступное подмножество — такое, которое можно извлечь из нижнего множества в любом порядке, не нарушая структуру нижнего множества.

Доступные подмножества нижнего множества

Чтобы доказать основной результат, мы будем оценивать мощности “внешних” подмножеств нижних множеств.

Будем называть подмножество Q' нижнего множества Q **доступным**, если для любой точки $q' = (q'_1, \dots, q'_d) \in Q'$, не найдётся $q = (q_1, \dots, q_d) \in Q \setminus \{q'\}$ такой, что $q_i \geq q'_i$ при всех $i = 1, \dots, d$.

Иными словами, доступное подмножество — такое, которое можно извлечь из нижнего множества в любом порядке, не нарушая структуру нижнего множества.

Обозначим через $M(Q)$ максимальное доступное подмножество Q.

Оценки на мощность доступных подмножеств

Лемма 1

Для любых $d \geq 2$ и $n \geq d^{6d \log d}$, любого d-мерного нижнего множества Q, $|Q| = n$,

$$|M(Q)| \leq \prod_{k=1}^{d-1} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) n^{1-\frac{1}{d}} < \frac{\sinh \pi}{\pi} n^{1-\frac{1}{d}}.$$

Оценки на мощность доступных подмножеств

Лемма 1

Для любых $d \geq 2$ и $n \geq d^{6d \log d}$, любого d-мерного нижнего множества Q, $|Q| = n$,

$$|M(Q)| \leq \prod_{k=1}^{d-1} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) n^{1-\frac{1}{d}} < \frac{\sinh \pi}{\pi} n^{1-\frac{1}{d}}.$$

Таким образом, для достаточно больших k нижние множества Q_k в d-мерном пространстве такие, что $q \in Q_k \Leftrightarrow q_1 + \ldots + q_d \leq k$ имеют с точностью до константы максимально возможные доступные подмножества.

Оценки на мощность доступных подмножеств

Лемма 1

Для любых $d \geq 2$ и $n \geq d^{6d \log d}$, любого d-мерного нижнего множества Q, $|Q| = n$,

$$|M(Q)| \leq \prod_{k=1}^{d-1} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) n^{1-\frac{1}{d}} < \frac{\sinh \pi}{\pi} n^{1-\frac{1}{d}}.$$

Таким образом, для достаточно больших k нижние множества Q_k в d-мерном пространстве такие, что $q \in Q_k \Leftrightarrow q_1 + \ldots + q_d \leq k$ имеют с точностью до константы максимально возможные доступные подмножества.

- Кроме того, можно показать, что без каких-либо ограничений на d и n всегда имеет место

$$|M(Q)| \leq dn^{1-\frac{1}{d}}.$$

Число нижних подмножеств нижнего множества

Обозначим

$$T(n) := \max_{\text{нижние множества } Q\colon\, |Q|=n} |M(Q)|.$$

Число нижних подмножеств нижнего множества

Обозначим

$$T(n) := \max_{\text{нижние множества } Q:\ |Q|=n} |M(Q)|.$$

То есть мы знаем, что при $n \geq d^{6d \log d}$ выполнено $T(n) < \frac{\sinh \pi}{\pi} n^{1-1/d}$.

Число нижних подмножеств нижнего множества

Обозначим
$$T(n) := \max_{\text{нижние множества } Q:\ |Q|=n} |M(Q)|.$$

То есть мы знаем, что при $n \geq d^{6d \log d}$ выполнено $T(n) < \frac{\sinh \pi}{\pi} n^{1-1/d}$.

Лемма 2

Для числа $C(Q,k,d)$ всех нижних подмножеств Q', $|Q'| \geq n-k$, нижнего множества Q, $|Q| = n$, в d-мерном пространстве
$$C(Q,k,d) < \left(\max\left\{8, \frac{4eT(n)}{k}\right\}\right)^k.$$

Число нижних подмножеств нижнего множества

Обозначим

$$T(n) := \max_{\text{нижние множества } Q\colon |Q|=n} |M(Q)|.$$

То есть мы знаем, что при $n \geq d^{6d \log d}$ выполнено $T(n) < \frac{\sinh \pi}{\pi} n^{1-1/d}$.

Лемма 2

Для числа $C(Q,k,d)$ всех нижних подмножеств Q', $|Q'| \geq n-k$, нижнего множества Q, $|Q| = n$, в d-мерном пространстве

$$C(Q,k,d) < \left(\max\left\{8, \frac{4eT(n)}{k}\right\}\right)^k.$$

- Тогда если $n \geq d^{6d \log d}$, то

$$C(Q,k,d) < \left(e^4 \max\left\{1, \frac{n^{1-\frac{1}{d}}}{k}\right\}\right)^k, \quad C(Q,k,d) < 2^{2k+4n^{1-\frac{1}{d}}}.$$

Случай пространств большой размерности

Случай пространств большой размерности

Теорема D (Cohen, Migliorati, Nobile, 2017)

Для всех натуральных d и n,

$$p_d(n) \leq 2^{dn}$$

и

$$p_d(n) \leq d^{n-1}(n-1)!$$

Случай пространств большой размерности

Теорема D (Cohen, Migliorati, Nobile, 2017)

Для всех натуральных d и n,

$$p_d(n) \leq 2^{dn}$$

и

$$p_d(n) \leq d^{n-1}(n-1)!$$

Теорема E (Dai, Prymak, Shadrin, Tikhonov, Temlyakov, 2021)

Для любого $d \geq 2$ и любого натурального n,

$$\binom{d+n-2}{n-1} \leq p_d(n) \leq d^{n-1}.$$

Случай пространств большой размерности

Теорема D (Cohen, Migliorati, Nobile, 2017)

Для всех натуральных d и n,

$$p_d(n) \leq 2^{dn}$$

и

$$p_d(n) \leq d^{n-1}(n-1)!$$

Теорема E (Dai, Prymak, Shadrin, Tikhonov, Temlyakov, 2021)

Для любого $d \geq 2$ и любого натурального n,

$$\binom{d+n-2}{n-1} \leq p_d(n) \leq d^{n-1}.$$

Заметим, что $\binom{d+n-2}{n-1} > d^{n-1}/(n-1)!$

Случай пространств большой размерности

Теорема 2

(a) Если $d \geq n^3$, то

$$\binom{d+n-2}{d-1} \leq p_d(n) < 2\binom{d+n-2}{d-1}.$$

Случай пространств большой размерности

Теорема 2

(a) Если $d \geq n^3$, *то*

$$\binom{d+n-2}{d-1} \leq p_d(n) < 2\binom{d+n-2}{d-1}.$$

(b) Если $dn^{-2} \to \infty$ *при* $n \to \infty$, *то*

$$\log p_d(n) = (n-1)(\log d - \log n + 1) + o(n).$$

(c) Если выполнено $cn^2 \leq d \leq Cn^2$ *для некоторых констант* c *и* C, *то*

$$\log p_d(n) = n \log n + O(n).$$

(d) Если $dn^{-2} \to 0$ *и* $\log d \geq \log n + o(\log n)$ *при* $n \to \infty$, *то*

$$\log p_d(n) = n \log n + o(n \log n).$$

Спасибо за внимание!