О ЗАДАЧАХ НАЗНАЧЕНИЯ АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Попова С.Н.
Удмуртский государственный университет, г. Ижевск

Вторая конференция Математических центров России

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № 075-01265-22-00 (проект FEWS-2020-0010) и РФФИ (проект 20-01-00293).

В докладе рассмотрены задачи управления асимптотикой решений линейных дифференциальных систем под действием линейной обратной связи. Основной объект исследований — линейная нестационарная управляемая система

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

с кусочно непрерывными и ограниченными на $\mathbb{R}$ матрицами коэффициентов $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$.

Пусть управление $u(\cdot)$ в системе

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

формируется в виде линейной обратной связи

$$u = U(t)x. \tag{2}$$

В итоге получаем замкнутую систему вида

$$\dot{x} = \big(A(t) + B(t)U(t)\big)x, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

Будем называть $U(\cdot)$ *матричным управлением* для системы (3). Будем говорить, что матричное управление $U(\cdot)$ *допустимо* для системы (3), если матрица $U(\cdot)$ кусочно непрерывна и ограничена на $\mathbb{R}$.

Пусть зафиксировано некоторое допустимое для системы

$$\dot{x} = \big(A(t) + B(t)U(t)\big)x, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{3}$$

матричное управление $U(\cdot)$. Тогда для этой системы с выбранным управлением $U(\cdot)$ определены всевозможные асимптотические инварианты, то есть величины и свойства, которые не меняются под действием преобразований Ляпунова и характеризуют поведение решений системы при $t \to +\infty$.

Возникает вопрос: можно ли выбором подходящего матричного управления $U(\cdot)$ назначить произвольное наперед заданное поведение решений замкнутой системы (3)?
Здесь будет рассмотрена задача назначения спектра показателей Ляпунова.

Рассмотрим систему (1) с нулевым управлением, то есть свободную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad t \in \mathbb{R}, \ x \in \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

Показателем Ляпунова произвольного нетривиального решения $x(\cdot)$ системы (4) называется величина

$$\lambda[x] = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln \|x(t)\|. \tag{5}$$

Равенство $\lambda[x] = \alpha$ означает, что решение $x(\cdot)$ при $t \to +\infty$ растет «примерно» как $e^{\alpha t}$.

Обозначим

$$\Lambda(A) \doteq \{\lambda[x] \colon x(\cdot) \text{ — нетривиальное решение системы (4)}\}$$

спектр показателей Ляпунова системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

Оказывается, что спектр показателей Ляпунова системы (4) состоит не более, чем из n различных чисел.

Пусть

$$\Lambda(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\},$$

где $s \leqslant n$ и $\lambda_1 < \ldots < \lambda_s$.

Каждому показателю λ_j припишем *кратность* k_j — максимальное количество линейно независимых решений системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

имеющих показатель λ_j, $j = 1, \ldots, s$. Можно доказать, что $k_1 + \ldots + k_s = n$.

Полным спектром показателей Ляпунова системы (4) называется набор n чисел

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_1, \ldots, \lambda_s, \ldots, \lambda_s,$$

где каждое число λ_j повторяется k_j раз.

Полный спектр показателей Ляпунова системы (4) переобозначим через $\lambda(A) = \big(\lambda_1(A), \ldots, \lambda_n(A)\big)$. Всюду считаем, что полный спектр показателей Ляпунова этой и каждой рассматриваемой ниже системы n-го порядка принадлежит множеству $\mathbb{R}^n_{\leqslant}$ упорядоченных по неубыванию наборов n чисел.

Будем рассматривать задачу назначения спектра Ляпунова системы

$$\dot{x} = \big(A(t) + B(t)U(t)\big)x, \quad t \in \mathbb{R}, \ x \in \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

в двух формулировках — глобальной и локальной.

Определение 1

Полный спектр показателей Ляпунова системы (5) называется *глобально управляемым*, если для любого набора $\mu \in \mathbb{R}^n_{\leqslant}$ найдется допустимое матричное управление $U(\cdot)$ такое, что $\lambda(A + BU) = \mu$, где $\lambda(A + BU)$ — полный спектр системы (5).

Определим δ-окрестность полного спектра $\lambda(A)$ свободной системы (4) равенством

$$\mathcal{O}_\delta\big(\lambda(A)\big) \doteq \big\{\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \mathbb{R}^n_\leqslant : |\nu_j - \lambda_j(A)| < \delta \ \forall j \in \{1, \ldots, n\}\big\}. \tag{6}$$

Определение 2

Полный спектр показателей Ляпунова системы

$$\dot{x} = \big(A(t) + B(t)U(t)\big)x, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

называется *локально управляемым*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого набора чисел $\mu \in \mathcal{O}_\delta\big(\lambda(A)\big)$ существует допустимое для системы (5) матричное управление $U(\cdot)$ такое, что $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|U(t)\| < \varepsilon$ и $\lambda(A + BU) = \mu$.

Задачи назначения спектра Ляпунова традиционно решаются в предположении равномерной полной управляемости системы

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m. \tag{1}$$

Определение 3

Система (1) называется *равномерно вполне управляемой*, если существуют такие $\alpha > 0$ и $\vartheta > 0$, что матрица Калмана

$$W(t, t+\vartheta) \doteq \int_t^{t+\vartheta} X(t,s)B(s)B^T(s)X^T(t,s)\,ds \tag{9}$$

системы (1) удовлетворяет неравенству

$$W(t, t+\vartheta) \geqslant \alpha E \tag{10}$$

при всех $t \in \mathbb{R}$; здесь $X(t,s)$ — матрица Коши свободной системы (4), E — единичная матрица.

Критерий равномерной полной управляемости (Е.Л. Тонков)

Система

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

равномерно вполне управляема тогда и только тогда, когда найдутся такие $\vartheta > 0$ и $\ell > 0$, что для каждых $x^0 \in \mathbb{R}^n$ и $t_0 \in \mathbb{R}$ существует кусочно непрерывное управление $u\colon [t_0, t_0 + \vartheta] \to \mathbb{R}^m$, такое, что решение $x(\cdot)$ системы (1) с $u = u(\cdot)$ и начальным условием $x(t_0) = x^0$ удовлетворяет равенству $x(t_0 + \vartheta) = 0$, при этом $\max\limits_{t \in [t_0, t_0+\vartheta]} \|u(t)\| \leqslant \ell \|x^0\|$.

Теорема 1

Если система

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

равномерно вполне управляема, то полный спектр показателей Ляпунова системы

$$\dot{x} = \big(A(t) + B(t)U(t)\big)x, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

глобально управляем.

Определение 4

Полный спектр показателей Ляпунова системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad t \in \mathbb{R}, \; x \in \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

называется *устойчивым*, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всякой кусочно непрерывной функции $Q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, удовлетворяющей условию $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|Q(t)\| < \delta$, выполнено включение

$$\lambda(A+Q) \in \mathcal{O}_\varepsilon\big(\lambda(A)\big), \tag{7}$$

где $\lambda(A+Q)$ — полный спектр показателей Ляпунова системы

$$\dot{x} = \big(A(t)+Q(t)\big)x, \quad t \in \mathbb{R}, \; x \in \mathbb{R}^n. \tag{8}$$

Теорема 2

Если система

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

равномерно вполне управляема, а показатели Ляпунова системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

устойчивы, то полный спектр показателей Ляпунова системы

$$\dot{x} = \big(A(t) + B(t)U(t)\big)x, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

локально управляем.

Приведем пример, показывающий, что существует не вполне управляемая система вида

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

такая, что показатели Ляпунова свободной системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

устойчивы, но при этом полный спектр показателей Ляпунова замкнутой системы

$$\dot{x} = \big(A(t) + B(t)U(t)\big)x, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

локально (и глобально) управляем.

Пример 1

Определим последовательность моментов времени $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ рекуррентными формулами

$$t_1 = 1, \quad t_{2k} = kt_{2k-1}, \quad t_{2k+1} = k + t_{2k}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{11}$$

и кусочно-линейную и непрерывную на $\mathbb{R}$ функцию

$$b(t) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad t \in (-\infty, 2], \\ 1 & \text{при} \quad t \in [t_{2k-1}, t_{2k}], \\ 0 & \text{при} \quad t \in [t_{2k} + 1/2, t_{2k+1} - 1/2], \end{cases} \tag{12}$$

где $k = 2, 3, \ldots$.

Пример 1

Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{x} = A_0(t)x + B_0(t)u, \; t \in \mathbb{R}, \; x \in \mathbb{R}^2, \; u \in \mathbb{R}^2, \tag{13}$$

где

$$A_0(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_0(t) = \begin{pmatrix} b(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Для каждого $\vartheta > 0$ найдется номер $k \doteq [\vartheta] + 2$ такой, что для матрицы Калмана этой системы и любого вектора $\xi \in \mathbb{R}^2$ справедливы неравенства

$$0 \leqslant \xi^T W\big(t_{2k} + 1/2, t_{2k} + 1/2 + \vartheta\big)\xi \leqslant \xi^T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k-1 \end{pmatrix} \xi. \tag{15}$$

Это означает, что система (13) не является равномерно вполне управляемой.

Пример 1

Так как свободная система

$$\dot{x} = A_0(t)x = 0,\ t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^2,$$

стационарна, то ее полный спектр показателей Ляпунова $\lambda(A_0) = \big(0, 0\big)$ устойчив.

Пример 1

Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и любое $\big(\mu_1, \mu_2\big) \in \mathcal{O}_\varepsilon\big(\lambda(A_0)\big)$, в системе (13) выберем обратную связь $u = U(t)x$, где $U(t) = \operatorname{diag}\big(\mu_1, \mu_2\big)$. Тогда замкнутая система имеет вид

$$\dot{x} = \operatorname{diag}\big(b(t)\mu_1, \mu_2\big)x, \tag{16}$$

поэтому ее показатели Ляпунова совпадают с величинами

$$\lambda_1(A_0 + B_0U) = \varlimsup_{t\to+\infty} t^{-1} \int\limits_0^t b(s)\mu_1\, ds = \mu_1,$$

$$\lambda_2(A_0 + B_0U) = \varlimsup_{t\to+\infty} t^{-1} \int\limits_0^t \mu_2\, ds = \mu_2.$$

Пример 1

Кроме того, справедлива оценка

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|U(t)\| \leqslant \max_{j=1,2} \big|\mu_j - \lambda_j(A_0)\big| < \varepsilon.$$

Это означает, что для системы (16) выполнены условия определения 2, где $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$.
Так как $\varepsilon > 0$ здесь произвольно, то выполнены также и условия определения 1.

Таким образом, свойство равномерной полной управляемости не является необходимым условием для управляемости спектра показателей Ляпунова ни в локальной, ни в глобальной постановке.

Для нахождения необходимых и достаточных условий управляемости спектра применим концепцию оболочки Бебутова линейной управляемой системы.

Систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

с равномерно непрерывными и ограниченными на $\mathbb{R}$ коэффициентами отождествим с функцией $t \mapsto \sigma(t) \doteq \big(A(t), B(t)\big) \in \mathbb{R}^{n\times(n+m)}$. Обозначим $\sigma_s(t) \doteq \sigma(t+s)$ — сдвиг σ на $s \in \mathbb{R}$ и рассмотрим множество $\mathfrak{R}(\sigma)$ — замыкание множества $\{\sigma_s(\cdot)\colon s \in \mathbb{R}\}$ в топологии равномерной сходимости на отрезках. Метрика в $\mathfrak{R}(\sigma)$ может быть задана равенством

$$\rho(\widetilde{\sigma}, \widehat{\sigma}) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \min\{\|\widetilde{\sigma}(t) - \widehat{\sigma}(t)\|, |t|^{-1}\}. \tag{17}$$

Пространство $(\mathfrak{R}(\sigma), \rho)$ компактно. Оно называется *оболочкой Бебутова* системы (1).

Каждую функцию $\widehat{\sigma}(\cdot) = \big(\widehat{A}(\cdot), \widehat{B}(\cdot)\big) \in \mathfrak{R}(\sigma)$ отождествим с линейной управляемой системой

$$\dot{x} = \widehat{A}(t)x + \widehat{B}(t)u, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m. \tag{18}$$

Теорема 3

Система

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

с равномерно непрерывными и ограниченными на $\mathbb{R}$ коэффициентами равномерно вполне управляема тогда и только тогда, когда для каждой системы $\big(\widehat{A}(\cdot), \widehat{B}(\cdot)\big)$ из оболочки Бебутова системы (1) соответствующая замкнутая система

$$\dot{x} = \big(\widehat{A}(t) + \widehat{B}(t)U(t)\big)x, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{19}$$

обладает свойством глобальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова.

Теорема 4

Пусть показатели Ляпунова системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

устойчивы. Система

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

с равномерно непрерывными и ограниченными на $\mathbb{R}$ коэффициентами равномерно вполне управляема тогда и только тогда, когда для каждой системы $\big(\widehat{A}(\cdot), \widehat{B}(\cdot)\big)$ из оболочки Бебутова системы (1) соответствующая замкнутая система

$$\dot{x} = \big(\widehat{A}(t) + \widehat{B}(t)U(t)\big)x, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{19}$$

обладает свойством локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова.

Пример 1

Снова рассмотрим систему

$$\dot{x} = A_0(t)x + B_0(t)u,\ t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^2,\ u \in \mathbb{R}^2, \tag{13}$$

где

$$A_0(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_0(t) = \begin{pmatrix} b(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Так как она не является равномерно вполне управляемой, то из теорем 3 и 4 следует, что оболочка Бебутова этой системы содержит системы, полные спектры показателей которой не являются управляемыми — локально и глобально. Действительно, оболочка Бебутова содержит систему

$$\dot{x} = A_0(t)x + B(t)u, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{20}$$

где

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 1

Для произвольного матричного управления $U(\cdot) = \{u_{ij}(\cdot)\}_{i,j=1}^{2}$ замкнутая система для системы (20) имеет вид

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u_{21}(t) & u_{22}(t) \end{pmatrix} x, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{21}$$

Каждая фундаментальная система решений этой системы содержит решение $x(\cdot)$ с ненулевой постоянной первой координатой $x_1(\cdot)$, поэтому для показателя Ляпунова этого решения выполнено неравенство $\lambda[x] \geqslant \lambda[x_1] = 0$. Следовательно, $\lambda_2(A_0 + BU) \geqslant 0$ для каждого $U(\cdot)$. Это означает, что невозможно добиться выполнения равенства

$$\lambda_2(A_0 + BU) = \mu_2,$$

где $\mu_2 < 0$. Следовательно, спектр показателей Ляпунова системы (21) не является управляемым ни локально, ни глобально.