

Произведения хаотических групп гомеоморфизмов

Н. И. Жукова
(совместная работа с А.Г. Коротковым)

Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики"

Вторая Конференция математических центров России
Москва, 7 – 11 ноября, 2022

— исследовать соотношения между хаотическим поведением и свойствами:

- топологической транзитивности,
- чувствительности к начальным условиям,
- плотности замкнутых орбит

групп гомеоморфизмов и их счетных произведений;

— построить серии примеров.

Дивани хаос (Robert Devaney, 1986)

Пусть $f : X \rightarrow X$ – непрерывное отображение метрического пространства. $\{f^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ обозначается (X, f) и называется Д.С. или каскадом.

Определение

(Дивани) Д.С. (X, f) называется хаотической, если:

- 1 (X, f) топологически транзитивна;
- 2 множество периодических точек всюду плотно в X ;
- 3 (X, f) чувствительна к н.у.

Д.С. (X, f) называется топологически транзитивной, если для любых открытых множеств U и V существует $n \in \mathbb{N}$: $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Д.С. (X, f) на метрическом пространстве (X, d) чувствительна к начальным условиям, если

$$\exists \delta > 0 : \forall \text{ open } U \exists x, y \in U, \exists n \in \mathbb{N} :$$

$$d(f^n(x), f^n(y)) > \delta.$$

The number δ is called a sensitive constant of (X, f) .

Butterfly effect

Чувствительность к начальным условиям известна как "butterfly effect".

Этот термин связан со статьей "Prediction: A Butterfly Flap in Brazil Will Cause a Tornado in Texas" (Прогноз: Взмах бабочки в Бразилии вызовет торнадо в Техасе), которую Эдвард Лоренс представил в 1972 Американской ассоциации содействия развитию науки в Вашингтоне.

Термин "Чувствительность к начальным условиям" принадлежит Руэлю, 1977.

В определении Дивани $(1) + (2) \implies (3)$

J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis, P. Stacey.

On Devaney's definition of chaos. Amer. Math. Monthly. 99:4 (1992):

В определении Дивани $(1) + (2) \Rightarrow (3)$.

Y.V. Bazaikin, A.S. Galaev, and N.I. Zhukova, Chaos in Cartan foliations, Chaos, 2020.

Определение

Группа G гомеоморфизмов топологического пространства X называется хаотической, если:

- 1) существует незамкнутая всюду плотная орбита группы G в X (существование плотной орбиты);
- 2) объединение замкнутых орбит плотно в X (плотность замкнутых орбит).

Достаточные условия для чувствительности группы гомеоморфизмов к н.у.

Нами получено следующее обобщение результата Banks, Brooks, Cairns, Davis, Stacey в случае обратимых Д.С.

Теорема

Пусть (X, d) — локально компактное метрическое пространство Бэра и $G \subset \text{Homeo}(X)$. Если

- (1) $\exists$ плотная незамкнутая орбита $G.x$ в X ;
- (2) объединение минимальных множеств G — собственное плотное подмножество в X ,

то группа G чувствительна к н.у. Более того, G чувствительна к н.у. в $\forall (X, \rho)$ таком, что ρ и d определяют одну и ту же топологию на X .

Чувствительность к начальным условиям хаотических групп гомеоморфизмов

Для непрерывных действий топологических C -полугрупп S на метрическом пространстве при компактности минимальных множеств чувствительность S доказана Конторовичем и Мегрелишвили (2008).

Следствие

Пусть (X, d) — локально компактное пространство Бэра. Если группа $G \subset \text{Homeo}(X)$ хаотична на X , то G чувствительна к н.у.

Теорема

$\forall A$ пусть $G_\alpha \subset \text{Homeo}(X_\alpha)$, $G = \prod_{\alpha \in A} G_\alpha$ канонически действует на тихоновском произведении $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.

Тогда

G хаотична на $X \iff G_\alpha$ хаотична на $X_\alpha \quad \forall \alpha \in A$.

Резидуально конечные группы

Определение

Группа G резидуально конечна или остаточно конечна, если пересечение всех ее нормальных подгрупп конечного индекса тривиально.

Примеры

- (1) $SL(n, \mathbb{Z}) \quad \forall n \geq 2$;
- (2) конечно порожденные линейные группы;
- (3) прямые произведения резидуально конечных групп;
- (4) счетно порожденные свободные группы;
- (5) факторы резидуально конечных групп по конечным нормальным подгруппам;
- (6) фундаментальные группы компактных **3**-многообразий и некоторые другие.

Простые группы не резидуально конечны.

Счетные произведения счетных групп гомеоморфизмов

Теорема

Пусть $G_i \subset \text{Homeo}(X_i)$, $i \in \mathbb{N}$, — счетная группа, компактного (X_i, d_i) . Если G_i хаотична на $X_i \forall i$, то:

- (1) $G = \prod_{i \in \mathbb{N}} G_i$ хаотична на $X = \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$;
- (2) $\exists$ плотное континуальное $F \subset X$, состоящее из компактных орбит, совершенных подмножеств X ;
- (3) $\exists$ плотная орбита группы G мощности континуум;
- (4) все группы G_i , $i \in \mathbb{N}$, и G — резидуально конечны;
- (5) $\forall G_i$, $i \in \mathbb{N}$, и G чувствительна к н.у.;
- (6) если $\forall G_i$ имеет неподвижную точку, то объединение конечных орбит группы G плотно в X , и $\exists$ неподвижная точка для G .

Примеры хаотических групп гомеоморфизмов

Применяя метод Кеирнс и Колгановой (G. Cairns and A. Kolganova, 1996), мы строим счетные серии примеров хаотических групп гомеоморфизмов, изоморфных $\mathbb{Z}$, как на каждой замкнутой поверхности, так и на некомпактных поверхностях.

Лох Несский монстр

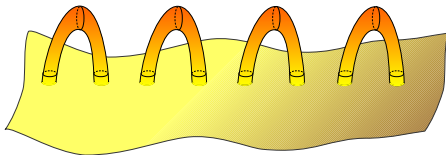


Рис.: Лох Несский монстр

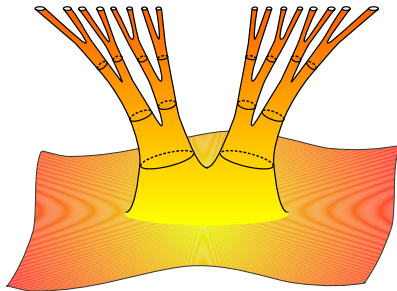


Рис.: Поверхность гомеоморфна плоскости с выколотым кантовым множеством.

1. R.L. Devaney, An introduction to chaotic dynamical systems, Addison Wesley, 1986.
2. J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis, and P. Stacey, On Devaney's definition of chaos, Amer. Math. Monthly. 99(4) (1992)
3. G. Cairns and A. Kolganova, Chaotic actions of free groups, Nonlinearity 9(4) (1996).
4. Y.V. Bazaikin, A.S. Galaev and N.I. Zhukova, Chaos in Cartan foliations, Chaos. 30 (2020).
5. N.I. Zhukova, A.G. Korotkov, Chaotic behavior of countable products of homeomorphism groups ArXiv/ 0411.4582969[math. DS] 04 Nov. (2022), 1–31.