

Глобальная динамика регулярных гомеоморфизмов и топологических потоков на многообразиях

Зинина Светлана Халиловна
Научный руководитель:
д.ф.-м.н. Починка Ольга Витальевна

Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева, Саранск, Россия

Вторая конференция математических центров России
7 - 11 ноября 2022 г.
МГУ, МИАН, г. Москва

Регулярные динамические системы

Пусть M^n — замкнутое n -мерное многообразие.

Регулярным гомеоморфизмом называется гомеоморфизм $f : M^n \rightarrow M^n$ цепно рекуррентное множество, которого состоит из конечного числа топологически гиперболических периодических точек.

Регулярным топологическим потоком называется топологический поток $f^t : M^n \rightarrow M^n$ цепно рекуррентное множество, которого состоит из конечного числа топологически гиперболических неподвижных точек и периодических орбит.

Изучение многомерных динамических систем имеет свою специфику:

- хорошо известны классификационные результаты гладких динамических систем, полностью сводящиеся к классификации их топологических аналогов [9, 10, 11];
- начиная с размерности четыре, появляются так называемые **экзотические многообразия** [17], динамика на таких многообразиях может быть описана исключительно в топологических терминах [21];
- инвариантные подмножества гладкой системы зачастую **не являются даже топологическими подмногообразиями**, в силу чего динамика на таких подмножествах уже не является гладкой [32].

[9] Grines V., Gurevich E., Malyshev D., Pochinka O. On topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms on the sphere S^n ($n > 3$) // Nonlinearity. – 2020. – Vol. 33. – No. 12. – P. 7088–7113.

[10] Grines V., Gurevich E., Medvedev V., Pochinka O. An analog of Smale’s theorem for homeomorphisms with regular dynamics // Math. Notes. – 2017. – Vol. 102. – No. 3–4. – P. 569–574.

[11] Medvedev V. S., Zhuzhoma E. V. Morse–Smale systems with few nonwandering points // Topology Appl. – 2013. – 3 (160). – P. 498–507..

[17] Kervaire M. A manifold which does not admit any differentiable structure // Commentarii Mathematici Helvetici. – 1960. – V. 34. – № 1. – P. 257–270.

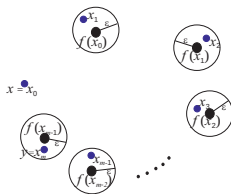
[21] J. Eells, N. Kuiper, Manifolds which are like projective planes, Publ. Math. IHES 14. – 1962. – P.5–46.

[19] D. Pixton. Wild unstable manifolds // Topology. – 1977. – V. 16. – N. 2. – P. 167–172.

Динамика регулярных гомеоморфизмов

M^n — замкнутое n -многообразие с метрикой d и $f : M^n \rightarrow M^n$ — гомеоморфизм.

ε -цепью длины $m \in \mathbb{N}$, соединяющей точку x с точкой y , гомеоморфизма f называется конечный набор точек $x = x_0, \dots, x_m = y$, такая что $d(f(x_{i-1}), x_i) < \varepsilon$ для $1 \leq i \leq m$.



Точка $x \in M^n$ называется **цепно рекуррентной точкой** гомеоморфизма f , если для любого $\varepsilon > 0$ существует m , зависящее от $\varepsilon > 0$, и ε -цепь длины m , соединяющая точку x с ней самой.

Динамика регулярных гомеоморфизмов

Определение 1. Гомеоморфизм $f : M^n \rightarrow M^n$ называется **регулярным**, если его цепно рекуррентное множество конечно (следовательно состоит из конечного числа периодических орбит) и топологически гиперболично.

В окрестности гиперболической неподвижной точки диффеоморфизм топологически сопряжен линейному диффеоморфизму

$a_{\lambda, \mu, \nu} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \{0, 1, \dots, n\}$, $\mu, \nu \in \{-1, +1\}$ следующего вида:
 $a_{\lambda, \mu, \nu}(x_1, \dots, x_\lambda, x_{\lambda+1}, \dots, x_n) = (\mu \cdot 2x_1, 2x_2, \dots, 2x_\lambda, \nu \cdot 2^{-1}x_{\lambda+1}, \dots, 2^{-1}x_n).$

Определение 2. Неподвижная точка p гомеоморфизма $f : M^n \rightarrow M^n$ называется **топологически гиперболической**, если существует ее окрестность $U_p \subset M^n$, числа $\lambda_p \in \{0, 1, \dots, n\}$, $\mu_p, \nu_p \in \{-1, +1\}$ и гомеоморфизм $h_p : U_p \rightarrow \mathbb{R}^n$, такие что $h_p f|_{U_p \cap f^{-1}(U_p)} = a_{\lambda_p, \mu_p, \nu_p} h_p|_{U_p \cap f^{-1}(U_p)}.$

[12] Палис Ж., Ди Мелу В. Геометрическая теория динамических систем: Введение: Пер. с англ. - 1986. - М. Мир. - 301 с.

[13] Гробман Д. М. Топологическая классификация окрестностей особой точки в n -мерном пространстве // Математический сборник. - 1962. - Т. 58, № 1. - С. 77–94.

Динамика регулярных гомеоморфизмов

Число λ_p будем называть **индексом Морса** гиперболической точки p . Точки индексов n и 0 будем называть **источниковыми** и **стоковыми** соответственно; любую точку p , такую что $\lambda_p \in \{1, \dots, n-1\}$ будем называть **седловой**.

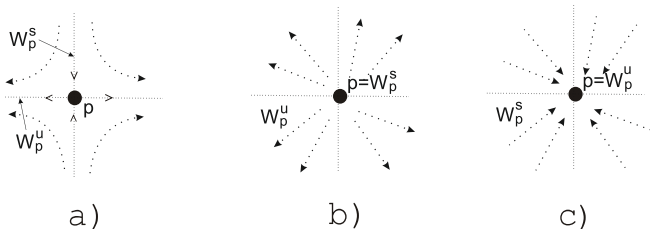


Рис.: Динамика в окрестности топологически гиперболической неподвижной точки:
а) седловая точка, б) источниковая точка, в) стоковая точка

Для топологически гиперболической неподвижной точки p гомеоморфизма $f \in G$ множества

$$W_p^s = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} f^k(h_p^{-1}(E_{\lambda_p}^s)), \quad W_p^u = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} f^k(h_p^{-1}(E_{\lambda_p}^u)),$$

где $E_{\lambda_p}^s = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = \dots = x_{\lambda_p} = 0\}$, $E_{\lambda_p}^u = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_{\lambda_p+1} = \dots = x_n = 0\}$, будем называть **устойчивым и неустойчивым инвариантными многообразиями точки p** .

Для периодической орбиты $\mathcal{O}$ регулярного гомеоморфизма f положим

$$W_{\mathcal{O}}^s = \bigcup_{p \in \mathcal{O}} W_p^s, \quad W_{\mathcal{O}}^u = \bigcup_{p \in \mathcal{O}} W_p^u, \quad \lambda_{\mathcal{O}} = \lambda_p.$$

Утверждение 2.1 Многообразия W_p^u и W_p^s не зависят от выбора локального гомеоморфизма h_p и в топологических терминах определяются следующим образом:

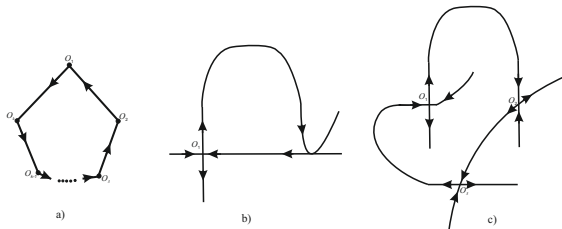
$$W_p^u = \{y \in M^n : \lim_{k \rightarrow +\infty} d(f^{-k \cdot \text{per}(p)}(y), p) = 0\},$$

$$W_p^s = \{y \in M^n : \lim_{k \rightarrow +\infty} d(f^{k \cdot \text{per}(p)}(y), p) = 0\}.$$

На множестве периодических орбит регулярного гомеоморфизма f введем отношение **С. Смейла** условием

$$\mathcal{O}_i \prec \mathcal{O}_j \iff W_{\mathcal{O}_i}^s \cap W_{\mathcal{O}_j}^u \neq \emptyset.$$

k -циклом ($k \geq 1$) называется набор попарно различных периодических орбит $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \dots, \mathcal{O}_k$, удовлетворяющих условию $\mathcal{O}_1 \prec \mathcal{O}_2 \prec \dots \prec \mathcal{O}_k \prec \mathcal{O}_1$.



Утверждение 2.2 У регулярного гомеоморфизма f отсутствуют циклы.

$$\mathcal{O}_1 \prec \dots \prec \mathcal{O}_k.$$

Основные динамические свойства регулярных гомеоморфизмов

Теорема 1 ([4]*, theorem 1). Пусть f - регулярный гомеоморфизм. Тогда

- (1) $M^n = \bigcup_{i=1}^k W_{\mathcal{O}_i}^u = \bigcup_{i=1}^k W_{\mathcal{O}_i}^s$;
- (2) каждая компонента связности $W_{\mathcal{O}_i}^u$ ($W_{\mathcal{O}_i}^s$) – топологическое подмногообразие M^n , гомеоморфное $\mathbb{R}^{\lambda_{\mathcal{O}_i}}$ ($\mathbb{R}^{n-\lambda_{\mathcal{O}_i}}$);
- (3) $cl(W_{\mathcal{O}_i}^u) \setminus W_{\mathcal{O}_i}^u \subset \bigcup_{j=1}^{i-1} W_{\mathcal{O}_j}^u$ ($cl(W_{\mathcal{O}_i}^s) \setminus W_{\mathcal{O}_i}^s \subset \bigcup_{j=i+1}^k W_{\mathcal{O}_j}^s$).

[7] Pochinka O., Zinina S. Dynamics of topological flows and homeomorphisms with a finite hyperbolic chain recurrent set on n-dimensional manifolds // Dynamical systems. - 2019. - Vol. 9(37). - No. 3. - P. 289-296.

[14] S. Smale Differentiable dynamical systems // Uspekhi Mat. Nauk. 1970. 25:1(151). P. 113–185

Динамика регулярных потоков

ε -цепью длины T , соединяющей точку x с точкой y для потока f^t называется конечный набор точек $x = x_0, \dots, x_n = y$, для которых существует последовательность времен $t_1, \dots, t_n$, такая что $d(f^{t_i}(x_{i-1}), x_i) < \varepsilon$, $t_i \geq 1$ для $1 \leq i \leq n$ и $t_1 + \dots + t_n = T$.

Точка $x \in M^n$ называется **цепно рекуррентной** для потока f^t , если для любого $\varepsilon > 0$ существует T , зависящее от $\varepsilon > 0$, и ε -цепь длины T , соединяющая точку x с ней самой.

Определение 3. Под **регулярным топологическим потоком** понимается поток, цепно рекуррентное множество которого состоит из конечного числа топологически гиперболических неподвижных точек и периодических орбит.

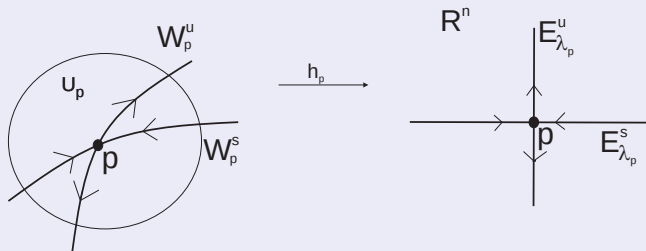
Динамика регулярных потоков

В качестве модели поведения потока в окрестности неподвижной точки рассмотрим линейный поток $a_\lambda^t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\lambda_p \in \{0, 1, \dots, n\}$ следующего вида:

$$a_\lambda^t(x_1, \dots, x_\lambda, x_{\lambda+1}, \dots, x_n) = (2^t x_1, \dots, 2^t x_\lambda, 2^{-t} x_{\lambda+1}, \dots, 2^{-t} x_n).$$

Определение 4. Неподвижную точку потока f^t назовем **топологически гиперболической**, если существует ее окрестность $U_p \subset M^n$, число $\lambda \in \{0, 1, \dots, n\}$ и гомеоморфизм $h_p : U_p \rightarrow \mathbb{R}^n$, такие что

$$h_p f^t|_{U_p \cap f^{-1}(U_p)} = a_{\lambda_p}^t h_p|_{U_p \cap f^{-1}(U_p)}.$$



Положим

$$E_{\lambda}^s = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = \dots = x_{\lambda} = 0\},$$

$$E_{\lambda}^u = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_{\lambda+1} = \dots = x_n = 0\}.$$

Для топологически гиперболической неподвижной точки p потока f^t множества $h_p^{-1}(E_{\lambda_p}^s)$, $h_p^{-1}(E_{\lambda_p}^u)$ будем называть её **локальными инвариантными многообразиями**.

Множества

$$W_p^s = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} f^t(h_p^{-1}(E_{\lambda_p}^s)), \quad W_p^u = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} f^t(h_p^{-1}(E_{\lambda_p}^u))$$

будем называть **устойчивым и неустойчивым инвариантными многообразиями точки p** .

Число λ_p будем называть **индексом неподвижной гиперболической точки p** . Точки индексов n и 0 будем называть **источниковыми** и **стоковыми** соответственно; любую точку p , такую что $\lambda_p \in \{1, \dots, n-1\}$ будем называть **седловой**.

Определение 5. Периодическая орбита ℓ потока $f^t : M \rightarrow M$ называется **топологически гиперболической периодической**, если существует ее окрестность $U_\ell \subset M$, числа $\lambda_\ell \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, $\mu_\ell, \nu_\ell \in \{-1, +1\}$, $T_\ell > 0$ и гомеоморфизм $h_\ell : U_\ell \rightarrow \Pi_{\lambda_\ell, \mu_\ell, \nu_\ell, T_\ell}$, такие что

$$h_\ell f^t|_{U_\ell \cap f^{-1}(U_\ell)} = b_{\lambda_\ell, \mu_\ell, \nu_\ell, T_\ell}^t h_\ell|_{U_\ell \cap f^{-1}(U_\ell)}.$$

где $b_{\lambda_\ell, \mu_\ell, \nu_\ell, T_\ell}^t$ – надстройка над линейным диффеоморфизмом $a_{\lambda_\ell, \mu_\ell, \nu_\ell} : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ следующего вида:

$$a_{\lambda, \mu, \nu}(x_1, \dots, x_\lambda, x_{\lambda+1}, \dots, x_{n-1}) = (\mu \cdot 2x_1, 2x_2, \dots, 2x_\lambda, \nu \cdot x_{\lambda+1}/2, x_{\lambda+2}/2, \dots, x_{n-1}/2).$$

Динамика регулярных потоков

Положим $\tilde{E}_\lambda^s = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = \dots = x_\lambda = 0\}$,

$\tilde{E}_\lambda^u = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_{\lambda+1} = \dots = x_n = 0\}$.

Тогда $E_{\lambda,\mu,\nu,T}^s = q_{\lambda,\mu,\nu,T}(\tilde{E}_\lambda^s)$, $E_{\lambda,\mu,\nu,T}^u = q_{\lambda,\mu,\nu,T}(\tilde{E}_\lambda^u)$.

Для топологически гиперболической периодической орбиты ℓ потока f^t множества $h_\ell^{-1}(E_{\lambda_\ell,\mu_\ell,\nu_\ell,T_\ell}^s)$, $h_\ell^{-1}(E_{\lambda_\ell,\mu_\ell,\nu_\ell,T_\ell}^u)$ будем называть её **локальными инвариантными многообразиями**.

Множества

$$W_\ell^s = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} f^t(h_\ell^{-1}(E_{\lambda_\ell,\mu_\ell,\nu_\ell,T_\ell}^s)), \quad W_\ell^u = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} f^t(h_\ell^{-1}(E_{\lambda_\ell,\mu_\ell,\nu_\ell,T_\ell}^u))$$

будем называть **устойчивым и неустойчивым инвариантными многообразиями** периодической орбиты ℓ .

Динамика регулярных потоков

Число λ_ℓ будем называть **индексом Морса**, пару μ_ℓ, ν_ℓ будем называть **типом ориентации** и число T_ℓ будем называть **периодом** гиперболической периодической орбиты ℓ . Точки индексов $n - 1$ и 0 будем называть **источниковыми** и **стоковыми** соответственно; любую орбиту ℓ , такую что $\lambda_\ell \in \{1, \dots, n - 2\}$ будем называть **седловой**

На множестве цепных компонент регулярного потока f^t введем отношение С. Смейла условием

$$\mathcal{O}_i \prec \mathcal{O}_j \iff W_{\mathcal{O}_i}^s \cap W_{\mathcal{O}_j}^u \neq \emptyset,$$

где $\mathcal{O}_i, \mathcal{O}_j$ компоненты связности множества R_{f^t} .

Утверждение 2.4 У регулярного потока f^t отсутствуют циклы.

В дальнейшем будем считать орбиты потока f^t пронумерованными согласованно с некоторым фиксированным порядком: $\mathcal{O}_1 \prec \dots \prec \mathcal{O}_k$.

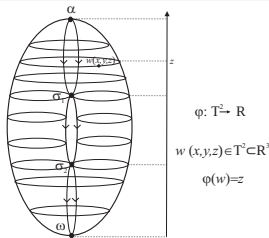
Теорема 2 ([3]*, theorem 1). Пусть f^t – регулярный поток. Тогда

- 1 $M^n = \bigcup_{i=1}^k W_{\mathcal{O}_i}^u = \bigcup_{i=1}^k W_{\mathcal{O}_i}^s$
- 2 $W_p^u (W_p^s)$ неподвижной точки $\mathcal{O}_i = p$ является топологическим подмногообразием многообразия M^n , гомеоморфным $\mathbb{R}^{\lambda_p}$ ($\mathbb{R}^{n-\lambda_p}$).
- 3 $W_\ell^u (W_\ell^s)$ периодической орбиты $\mathcal{O}_i = \ell$ является топологическим подмногообразием многообразия M^n , гомеоморфным $\mathbb{R}^{\lambda_\ell} \times \mathbb{S}^1$ ($\mathbb{R}^{n-\lambda_\ell-1} \times \mathbb{S}^1$) для $\mu_\ell = +1$ и $\mathbb{R}^{\lambda_\ell} \tilde{\times} \mathbb{S}^1$ ($\mathbb{R}^{n-\lambda_\ell-1} \tilde{\times} \mathbb{S}^1$) для $\mu_\ell = -1$.
- 4 $cl(W_{\mathcal{O}_i}^u) \setminus W_{\mathcal{O}_i}^u \subset \bigcup_{j=1}^{i-1} W_{\mathcal{O}_j}^u \quad (cl(W_{\mathcal{O}_i}^s) \setminus W_{\mathcal{O}_i}^s \subset \bigcup_{j=1}^{i-1} W_{\mathcal{O}_j}^s).$

[5] Pochinka O. V., Zinina S. Kh. Construction of the Morse–Bott Energy Function for Regular Topological Flows // Regular and Chaotic Dynamics. - 2021. - Vol. 26 - No. 4. - P. 350–369.

Функция Ляпунова

Функцией Ляпунова для потока называется непрерывная функция, которая убывает вдоль орбит вне цепно рекуррентного множества и является константой на каждой цепной компоненте.



В силу результатов Ч. Конли, функция Ляпунова существует для любой (непрерывной в том числе) динамической системы, а сам факт существования носит название «Фундаментальная теорема динамических систем».

[12] Conley C. Isolated invariant sets and the Morse index. Providence, RI: AMS, 1978. (CBMS Regional Conference Series in Math.; Vol. 38).

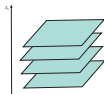
[22] Robinson C. Dynamical systems: stability, symbolic dynamics, and chaos. - 1999. - Vol. 28. - 520 p.

Энергетическая функция

Из конструкции Конли следует, что любая функция Ляпунова регулярной динамической системы f имеет критические точки на цепно рекуррентном множестве $\mathcal{R}_f$ (т. е. $Cr_\varphi \subset \mathcal{R}_f$.) в смысле следующего определения

Для любой точки $p \in M$ обозначим через (V_p, ϕ_p) локальную карту: $y \in V_p \mapsto \phi_p(y) = (x_1(y), \dots, x_n(y)) \in \mathbb{R}^n$, $x_i(p) = 0, i \in \{1, \dots, n\}$.

Пусть $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ — действительнoзначная непрерывная функция. Точка $p \in M$ называется **регулярной точкой** функции φ , если в точке p существует локальная карта (V_p, ϕ_p) , такая что $\varphi(y) = \varphi(p) + x_n(y)$.



В противном случае p называется **критической точкой**. Обозначим через Cr_φ множество критических точек функции φ .

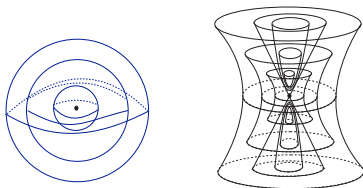
Функция Ляпунова называется **энергетической функцией**, если ее множество критических точек совпадает с цепно рекуррентным множеством динамической системы $Cr_\varphi = \mathcal{R}_f$.

Непрерывная функция Морса

Функция φ называется **непрерывной функцией Морса**, если множество Cr_φ состоит из невырожденных критических точек.

Точка $p \in Cr_\varphi$ называется **невырожденной критической точкой индекса** $\lambda_p \in \{0, \dots, n\}$, если в точке p существует локальная карта (V_p, ϕ_p) , такая что

$$\varphi(y) = \varphi(p) - \sum_{i=1}^{\lambda_p} x_i^2(y) + \sum_{i=\lambda_p+1}^n x_i^2(y).$$



Факт существования энергетической функции принципиально отличает потоки от гомеоморфизмов.

Для гомеоморфизмов препятствием к построению энергетической функции служит возможное наличие диких седловых сепаратрис [19].

Для потоков также известны примеры дикого вложения седловых сепаратрис: для неподвижных точек это было обнаружено в работе [7], для периодических орбит - в работе [20].

Однако, из результатов настоящей работы следует, что для непрерывных потоков дикость сепаратрис не является препятствием к существованию энергетической функции Морса.

[19] Pixton D. Wild unstable manifolds // Topology. - 1977. - V. 16. - N. 2.- P. 167–172.

[7] Medvedev V. S., Zhuzhoma E. V. Morse-Smale systems with few nonwandering points // Topology Appl. - 2013. - 3 (160). - P. 498–507.

[20] Pochinka O., Shubin D. On 4-dimensional flows with wildly embedded invariant manifolds of a periodic orbit // Applied Mathematics and Nonlinear Sciences. - 2020. - Vol. - 5. - No. 2. - P. 261-266.

Непрерывная функция Морса

Утверждение 3.1 ([2]^{*}, theorem). *Любой регулярный поток $f^t : M^n \rightarrow M^n$ без периодических орбит обладает непрерывной энергетической функцией Морса.*

Следствие. Топологическое многообразие допускает непрерывную функцию Морса, тогда и только тогда, когда оно допускает регулярный топологический поток без периодических орбит.

[3] Починка О. В., Зинина С. Х. Энергетическая функция Морса для топологических потоков с конечным гиперболическим цепно рекуррентным множеством на поверхностях // Математические заметки. - 2020. - Т. 107. - № 2. - С. 276–285. (для случая $n = 2$).

[4] Medvedev T., Pochinka O., Zinina S. On existence of Morse energy function for topological flows // Advances in Mathematics. - 2021. - Vol. 378. - 107518.

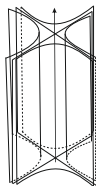
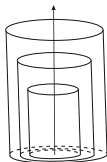
[23] Morse M. Topologically non-degenerate functions on a compact n -manifold // J. Analyse Math. - 1959. - Vol. 7. - P. 189-208.

Непрерывная функция Морса-Ботта

Функция φ называется **непрерывной функцией Морса-Ботта**, если любая компонента связности множества Cr_φ является либо невырожденной критической точкой, либо принадлежит невырожденному критическому подмногообразию.

Связное топологическое подмногообразие $C \subset Cr_\varphi$ многообразия M называется **невырожденным критическим k -многообразием индекса $\lambda_p \in \{0, \dots, n-k\}$** , если в любой точке $p \in C$ существует локальная карта (V_p, ϕ_p) , такая что $\phi_p(V_p \cap C) \subset \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = \dots = x_{n-k} = 0\}$ и

$$\varphi(y) = \varphi(p) - \sum_{i=1}^{\lambda_p} x_i^2(y) + \sum_{i=\lambda_p+1}^{n-k} x_i^2(y).$$



Теорема 7 ([3]*, theorem 2).

Любой регулярный поток f^t обладает непрерывной энергетической функцией Морса-Ботта, критические точки которой либо невырождены, либо образуют невырожденные одномерные многообразия.

- [5] Pochinka O. V., Zinina S. Kh. Construction of the Morse–Bott Energy Function for Regular Topological Flows // Regular and Chaotic Dynamics. - 2021. - Vol. 26 - No. 4. - P. 350–369.
- [24] Smale S. On gradient dynamical systems. // Ann. of Math. (2), 74:199–206, 1961.
- [25] Meyer K. R. Energy functions for Morse Smale systems // Amer. J. Math. - 1968. - Vol. 90. - P. 1031–1040.

Благодарю за внимание!



Починка О. В., Зинина С. Х. Энергетическая функция Морса для топологических потоков с конечным гиперболическим цепно рекуррентным множеством на поверхностях // Математические заметки. - 2020. - Т. 107. - № 2. - С. 276-285.



Medvedev T. V., Pochinka O., Zinina S. K. On existence of Morse energy function for topological flow // Advances in Mathematics. - 2021. - Vol. 378. - P. 1-15.



Pochinka O. V., Zinina S. Kh. Construction of the Morse –Bott Energy Function for Regular Topological Flows // Regular and Chaotic Dynamics. - 2021. - Vol. 26. - No. 4. - P. 350–369.



Pochinka O., Zinina S. Dynamics of topological flows and homeomorphisms with a finite hyperbolic chain recurrent set on n-dimensional manifolds // Dynamical systems. - 2019. - Vol. 9(37). - No. 3. - P. 289-296.



Grines V., Gurevich E., Malyshev D., Pochinka O. On topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms on the sphere S^n ($n > 3$) // Nonlinearity. - 2020. - Vol. 33. - No. 12. - P. 7088-7113.



Grines V., Gurevich E., Medvedev V., Pochinka O. An analog of Smale's theorem for homeomorphisms with regular dynamics // Math. Notes. - 2017. - Vol. 102. - No. 3-4. - P. 569–574.



Medvedev V. S., Zhuzhoma E. V. Morse-Smale systems with few nonwandering points // Topology Appl. - 2013. - 3 (160). - P. 498–507.



Палис Ж., Ди Мелу В. Геометрическая теория динамических систем: Введение: Пер. с англ. - 1986. - М. Мир. - 301 с.

-  Гробман Д. М. Топологическая классификация окрестностей особой точки в n -мерном пространстве // Математический сборник. - 1962. - Т. 58, № 1. - С. 77–94.
-  S. Smale Differentiable dynamical systems // Uspekhi Mat. Nauk. 1970. 25:1(151). P. 113–185.
-  Майер, А. Г. Грубое преобразование окружности в окружность. - Учён. зап. ГГУ. - 1939. - No 12. - С. 215–229.
-  Conley C. Isolated invariant sets and the Morse index. Providence, RI: AMS, 1978. (CBMS Regional Conference Series in Math.; Vol. 38).
-  Morse M. Topologically non-degenerate functions on a compact n -manifold // J. Analyse Math. - 1959. - Vol. 7. - P. 189–208.
-  Smale S. On gradient dynamical systems. // Ann. of Math. (2), 74:199–206, 1961.
-  Meyer K. R. Energy functions for Morse Smale systems // Amer. J. Math. - 1968. - Vol. 90. - P. 1031–1040.
-  Irwin M. C. A classification of elementary cycles // Topology. - 1970. - Vol. 9. - P. 35–47.
-  Kervaire M. A manifold which does not admit any differentiable structure // Commentarii Mathematici Helvetici. - 1960. - V. 34. - № 1. - P. 257–270.
-  В. З. Гринес, Е. В. Жужома, В. С. Медведев, О. В. Починка, Глобальные аттрактор и репеллер диффеоморфизмов Морса–Смейла // Труды МИАН. - 2010. - Т. 271. - С. 111–133.
-  D. Pixton. Wild unstable manifolds // Topology. - 1977. - V. 16. - N. 2. - P. 167–172.



Pochinka O., Shubin D. On 4-dimensional flows with wildly embedded invariant manifolds of a periodic orbit // Applied Mathematics and Nonlinear Sciences. 2020. Vol. 5. No. 2. P. 261-266



J. Eells, N. Kuiper, Manifolds which are like projective planes, Publ. Math. IHES 14. - 1962. - P.5-46.



Robinson C. Dynamical systems: stability, symbolic dynamics, and chaos. - 1999. - Vol. 28. CRC press Boca Raton. - 520 p.

Идея доказательства

Для каждого $i \in \{1, \dots, k-1\}$ положим

$$A_i = \bigcup_{j=1}^i W_{\mathcal{O}_j}^u, \quad R_i = \bigcup_{j=i+1}^k W_{\mathcal{O}_j}^s.$$

Индукцией по параметру $i \in \{1, \dots, k-1\}$ построим окрестность U_i множества A_i и функцию Морса-Ботта $\varphi_i : U_i \rightarrow [1, i+1/3]$ со следующими свойствами:

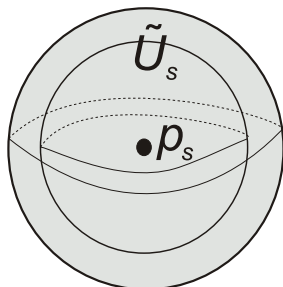
- $U_i = \varphi_i^{-1}([1, i+1/3])$ — замкнутое n -мерное компактное топологическое подмногообразие с краем $\partial U_i = \varphi_i^{-1}(i+1/3)$, такое что $A_i \subset \text{int } U_i$, $U_i \cap R_i = \emptyset$;
- φ_i — энергетическая функция потока $f^t|_{U_i}$, совпадающая с $\varphi_{\mathcal{O}_i, i}$ в некоторой окрестности орбиты $\mathcal{O}_i$ и такая что $U_i = \varphi_i^{-1}([1, i+1/3])$.

Последний шаг построения окрестности U_k и функции φ_k в предположении, что функция φ_{k-1} уже построена на окрестности U_{k-1} , выделяем в отдельный пункт. В силу теоремы 2, окрестность U_k совпадает со всем многообразием M^n , а функция φ_k является искомой функцией φ .

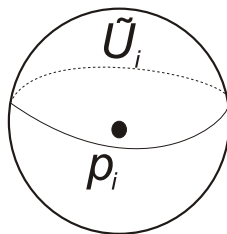
[18] Гринес В. З., Жужома Е. В., Медведев В. С., Починка О. В. Глобальные аттрактор и репеллер диффеоморфизмов Морса-Смейла // Труды МИАН. - 2010. - Т. 271. -

С. 111 – 133.

Идея доказательства



$$\varphi_{p,s}(\partial \tilde{U}_s) = i + 1/3$$



$$\varphi_{p,i}(\partial \tilde{U}_i) = i + 1/3$$

Рис.: Индуктивный шаг в случае, если O_i является стоковой неподвижной точкой

Идея доказательства

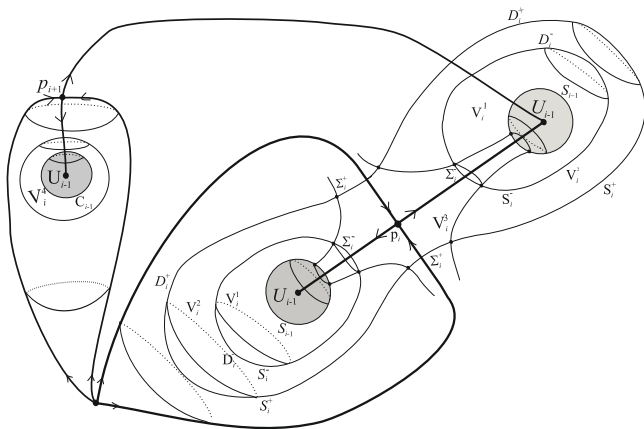


Рис.: Индуктивный шаг в случае, если O_i является седловой неподвижной точкой

Идея доказательства

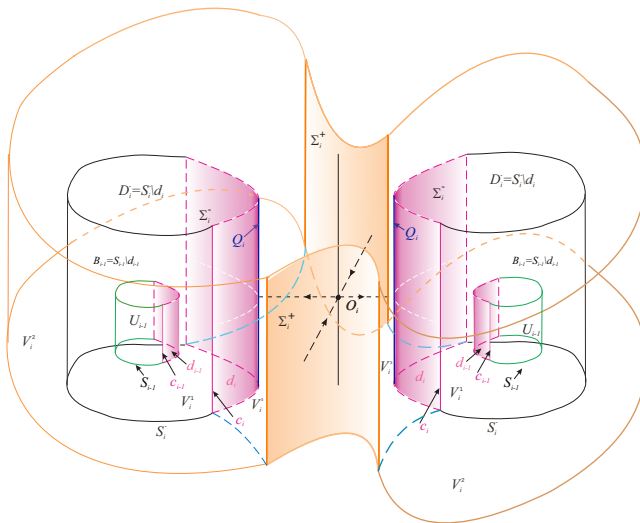
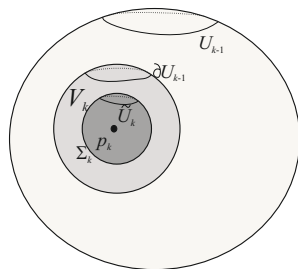
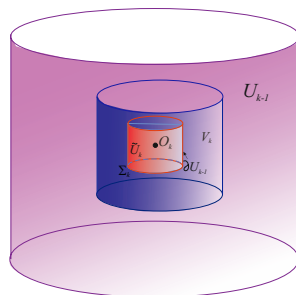


Рис.: Шаг индукции для случая, когда O_i является седловой периодической орбитой

Идея доказательства



а)



б)

Рис.: Построение искомой энергетической функции $\varphi_k : U_k \rightarrow [1, k]$, если орбита O_k :
 а) отталкивающая неподвижная точка; б) отталкивающая периодическая орбита