О динамике полносвязной пространственно–распределенной цепочки из логистических уравнений с запаздыванием

Сергей Кащенко, Анна Толбей

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия
kasch@uniyar.ac.ru

Вторая конференция Математических центров России
7 — 11 ноября 2022 г.
МГУ, МИАН, г. Москва

Рассматривается логистическое уравнение с запаздыванием

$$\dot{u} = r[1 - u(t - T)]u, \tag{1}$$

которое описывает динамику изменения численности некоторой популяции. Здесь $u(t) > 0$ – нормированная численность или плотность популяции, $r > 0$ – коэффициент мальтузианского роста, $T > 0$ – запаздывание, которое ассоциируют с возрастом половозрелости особей.
При условии

$$rT \ll \pi/2$$

состояние равновесия $u_0 \equiv 1$ в (1) асимптотически устойчиво, при $rT > \pi/2$ – неустойчиво и в (1) имеется устойчивый цикл $u_0(t)$.

При условии, когда

$$0 < rT - \frac{\pi}{2} \ll 1$$

он имеет асимптотику

$$u_0(t) = 1 + \sqrt{rT - \frac{\pi}{2}}\Big[\xi_0\big(\tau(1 + O(\varepsilon))\big)\exp\left(i\frac{2\pi}{T_0}t\right) +$$
$$+\bar{\xi}_0\big(\tau(1 + O(\varepsilon))\big)\exp\left(-i\frac{2\pi}{T_0}t\right)\Big] + \ldots.$$

При $rT \gg 1$ этот цикл является релаксационным.

Рассмотрим цепочку $2N+1$ связанных логистических уравнений с запаздыванием

$$\dot{v}_j(t) = r[1 - v_j(t-T)]v_j(t) + r\sum_{m=-N}^{N} a_{mj}\big(v_m(t-h) - v_j(t-h)\big). \quad (2)$$

Система (2) имеет состояние равновесия $u_{j0} = u_0 = 1$ $(j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N)$. После замены в ней

$$v_j = 1 + u_j \quad (3)$$

приходим к системе уравнений

$$\dot{u}_j(t) = -ru_j(t-T) + r\sum_{m=-N}^{N} a_{mj}\big(u_m(t-h) - u_j(t-h)\big) - ru_j(t-T)u_j. \quad (4)$$

Удобно элемент $u_j(t)$ ассоциировать со значением функции двух переменных $u(t, x_j)$, где x_j – точка некоторой окружности с угловой координатой $x_j = 2\pi(2N+1)^{-1} \cdot j$ и выполнено условие переодичности $u_{j+2N+1}(t) = u(t, x_j + 2\pi) = u_j(t) = u(t, x_j)$ и $a_{m+2N+1,j} = a_{m,j+2N+1} = a_{mj}$ $(m, j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.
Будем предполагать, что связь между элементами является однородной, т. е.

$$a_{mj} = a_{m-j}. \tag{5}$$

Основное предположение заключается в том, что количество $(2N+1)$ – элементов является достаточно большим:

$$0 < \varepsilon = 2\pi(2N+1)^{-1} \ll 1. \tag{6}$$

Это условие дает основание перейти от дискретной пространственной переменной x к непрерывной переменной x.

$$a_{mj} = \gamma(2N+1)^{-1}(2\pi)^{-1}. \tag{7}$$

Выражение $\gamma\big(2\pi(2N+1)\big)^{-1}\sum\limits_{j=-N}^{N} f(x_j)$ является частичной интегральной суммой Дарбу для выражения $\gamma(2\pi)^{-1}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)dx$, поэтому при условии (7) для системы (4) асимптотическим при $\varepsilon \to 0$ приближением является краевая задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -ru(t-T,x) + r\gamma\Big[(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} u(t-h,s)ds - u(t-h,x)\Big] - \\ - ru(t-T,x)u, \tag{8}$$

$$u(t,x+2\pi) \equiv u(t,x). \tag{9}$$

Отметим, что в случае, когда коэффициенты a_{i-j} не одинаковы, интегральное слагаемое немного усложняется. Вместо выражения $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(t-h,s)ds$ имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a(s)u(t-h,x+s)ds \quad \text{и} \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a(s)ds = 1.$$

Далее рассматривается локальная динамика краевой задачи (8), (9).
Линеаризованная в нуле краевая задача

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -rv(t - T, x) + r\gamma\Big[M\big(v(t-h, s) - v(t-h, x)\big)\Big],$$
$$v(\tau, x + 2\pi) \equiv v(\tau, x) \tag{10}$$

имеет характеристическое уравнение

$$\lambda = -r\exp(-\lambda T) + r\gamma\exp(-\lambda h)[\delta_k - 1], \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \tag{11}$$

где

$$\delta_k = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$$

Это уравнение получено из (10) путем подстановки элементарных эйлеровских решений
$v_k = \exp(ikx + \lambda t), \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.
Будет изучен случай, когда параметр γ является малым: для некоторого фиксированного γ_1 имеем

$$\gamma = \mu\gamma_1 \ \text{и} \ 0 < \mu << 1. \tag{12}$$

Затем рассмотрим общий случай.

Случай малых значений γ

При условии $rT < \pi/2$ и при условии (12) все корни уравнения (11) имеют отрицательные и отделенные от нуля при $\mu \to 0$ вещественные части. Если же $rT > \pi/2$, то у (11) имеется корень с положительной и отделенной от нуля при $\mu \to 0$ вещественной частью. Локальную динамику (8), (9) в этих случаях не рассматриваем.
Будем предполагать, что реализуется случай, когда при некоторых положительных r_0 и T_0 выполнены условия

$$r_0 T_0 = \frac{\pi}{2}, \quad r = r_0 + \mu r_1, \quad T = T_0 + \mu T_1, \quad \gamma = \mu \gamma_1. \tag{13}$$

Линейная краевая задача (10) в этом случае имеет решение $v_k = \exp(i\pi(2T_0)^{-1}t + ikx)$, а значит и решения

$$v(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \xi_k \exp\left(i\pi(2T_0)^{-1}t + ikx\right) =$$

$$= \exp\left(i\pi(2T_0)^{-1}t\right) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \xi_k \exp(ikx) = \exp\left(i\pi(2T_0)^{-1}t\right)\xi(x). \quad (14)$$

Решения нелинейной краевой задачи (8), (9) тогда ищем в виде

$$u(t,x,\mu) = \mu^{1/2}\Big(\xi(\tau,x)\exp\left(i\pi(2T_0)^{-1}t\right) + \bar{cc}\Big) +$$
$$+ \mu u_2(t,\tau,x) + \mu^{3/2}u_3(t,\tau,x) + \ldots, \quad (15)$$

где $\tau = \mu t$ – «медленное» время, $\xi(\tau,x)$ – неизвестная комплексная амплитуда, функции $u_j(t,\tau,x)$ являются $4T_0$ – периодическими по t и 2π – периодическими по x.

$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = b\xi + \gamma_0\big(M(\xi) - \xi\big) + \beta\xi|\xi|^2, \qquad (16)$$
$$\xi(\tau, x + 2\pi) \equiv \xi(\tau, x).$$

Здесь через $M(\xi)$ обозначено среднее по $x \in [0, 2\pi]$ значение функции $\xi(\tau, x)$:

$$M(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \xi(\tau, x)dx.$$

Для коэффициентов в (16) верны равенства

$$b = \Big(1 + \frac{\pi^2}{4}\Big)^{-1}\Big[\Big(\frac{\pi}{2} + i\Big)r_1 + \lambda_0^2 T_1\Big(1 - i\frac{\pi}{2}\Big)\Big],$$
$$\gamma_0 = \gamma_1 r_0 \exp\big(-i\pi h(2T_0)^{-1}\big)\cdot\big[i\pi(2T_0)^{-1} - r_0\exp\big(-i\pi(2T_0)^{-1}\big)\big]^{-1},$$
$$\beta = -\lambda_0[3\pi - 2 + i(\pi + 6)]\Big(10\Big(1 + \frac{4}{\pi^2}\Big)\Big)^{-1}, \quad \Re\beta < 0.$$

Theorem

Пусть выполнены условия (12) *и* (13) *и пусть краевая задача* (16) *имеет при* $\tau \geq \tau_0$ *решение* $\xi(\tau, x)$. *Тогда функция*

$$u(t, x, \mu) = \mu^{1/2}\Big(\xi(\tau, x)\exp\big(i\pi(2T_0)^{-1}t\big) + \bar{c}c\Big) + \\ + \mu\big(A\xi^2(\tau, x)\exp(i\pi(T_0)^{-1}t) + \bar{c}c\big) \quad (17)$$

удовлетворяет краевой задаче (8), (9) *с точностью до* $O(\mu^{3/2})$.

Отметим, что условия асимптотической устойчивости нулевого решения в (16) состоят в выполнении неравенств

$$\Re b < 0, \quad \Re(b - \gamma_0) < 0. \quad (18)$$

При условии $\Re b > 0$ КНФ (16) имеет однородный цикл $\rho_0 \exp(i\omega_0 t)$ и

$$\rho_0 = \big(-\Re b \cdot (\Re\beta)^{-1}\big)^{1/2}, \quad \omega_0 = \Im b + \rho_0^2 \Im\beta.$$

Тот же самый цикл при том же условии существует и в логистическом уравнении (1). Но если в уравнении (1) этот цикл орбитально устойчив, то в (16) условия его орбитальной устойчивости состоят в выполнении двух неравенств:

$$1)\ \rho_0 \Re\beta - \Re\gamma_0 < 0, \tag{19}$$

$$2)\ |\gamma_0|^2 - 2\rho_0^2\big(\Re\beta \cdot \Re\gamma_0 + \Im\beta \cdot \Im\gamma_0\big) > 0. \tag{20}$$

Можно подобрать такое значение γ_0, что (19) или (20) не выполняются. Отметим, что выполнения условий устойчивости (неустойчивости) можно достичь, варьируя коэффициент запаздывания *h*.

Кроме одного цикла КНФ (16) может иметь циклы

$$\rho_k \exp(i\omega_k t + ikx) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Эти циклы существуют при условии $\Re(b - \gamma_0) > 0$ и

$$\rho_k = \rho^0 = \left(-\Re(b - \gamma_0) \cdot (\Re\beta)^{-1}\right)^{1/2}, \; \omega_k = \omega^0 = \Im(b - \gamma_0) + \rho_k^2 \Im\beta. \quad (21)$$

Все эти циклы орбитально устойчивы при выполнении двух неравенств:

1) $(\rho^0)^2 \Re\beta + \Re\gamma_0 < 0$,
2) $|\gamma_0|^2 + 2(\rho^0)^2 \left(\Re\beta \cdot \Re\gamma_0 + \Im\beta \cdot \Im\gamma_0\right) > 0$.

Невыполнение (строгое) хотя бы одного из этих неравенств влечет неустойчивость всех циклов.

Более интересен вопрос о существовании пространственно-неоднородных ступенчатых циклов. Сначала заметим, что уравнение (16) имеет периодическое по t и 2π-периодическое кусочно-непрерывное по x решение

$$\rho(x)\exp(i\omega^0 t), \quad \rho(x) = \begin{cases} \rho^0, & x \in (0,\pi), \\ -\rho^0, & x \in (\pi, 2\pi). \end{cases}$$

Можно сконструировать семейства $2\pi\omega_0^{-1}$ -периодических по t и 2π -периодических и кусочно-непрерывных по x решений $\rho(x, k_1, k_2, \alpha)\exp(i\omega_0 t)$, где

$$\rho(x, k_1, k_2, \alpha) = \begin{cases} \rho^0 \exp(i2\pi\alpha^{-1}k_1 x), x \in (0,\alpha),\ k_1 = \pm1, \pm2, \dots, \\ \rho^0 \exp(i2\pi(2\pi-\alpha)^{-1}k_2 x), x \in (\alpha, 2\pi-\alpha), k_2 = \pm1, \pm2, \end{cases}$$

Такие конструкции, очевидно, распространяются на решения с произвольным количеством «ступенек».

Более интересны циклы, состоящие из двух различных по «амплитуде» ступенек на отрезке $[0, 2\pi]$. Для их построения фиксируем произвольно параметры $\alpha \in (0, 2\pi)$ и $\varphi_{1,2} \in (0, 2\pi)$. Положим

$$u_0(t, x) = \rho(x) \exp(i\omega t), \quad \rho(x) = \begin{cases} \rho_1 \exp(i\varphi_1), & x \in (0, \alpha), \\ \rho_2 \exp(i\varphi_2), & x \in (\alpha, 2\pi). \end{cases} \tag{22}$$

Случай «средних» значений параметра γ

Ограничимся рассмотрением краевой задачи (8), (9) для наиболее интересного в задачах математической экологии случая, когда значения параметра h совпадают с $T: \ h = T$. Характеристическое уравнение (11) тогда распадается на два:

1) $\lambda = -r\exp(-\lambda T)$,
2) $\lambda = -r(1+\gamma)\exp(-\lambda T)$,

причем каждый из корней последнего уравнения повторяется бесконечное число раз.
Пусть выполнено неравенство $rT < \pi/2$. Тем самым каждая изолированная популяция не совершает колебаний численности в окрестности положительного состояния равновесия.

Предполагаем, что в задаче об устойчивости стационара в (8), (9) имеет место критический случай: при некоторых $r = r_0, \gamma = \gamma_0$ и $T = T_0$ верны соотношения

$$r_0(1 + \gamma_0)T_0 = \frac{\pi}{2}. \tag{23}$$

Отсюда следует, что линейная краевая задача (10) имеет бесконечно много периодических решений

$$u_k(t, x) = \exp(ikx + i\omega_0 t), \ \ k = 1, 2, \dots, \ \ \omega_0 = \pi(2T_0)^{-1} = r_0(1 + \gamma_0).$$

Это означает, что функция $u_0(t, x) = \xi(x)\exp(i\omega_0 t)$ при условии $M(\xi(x)) = 0$ тоже является решением (10).

Введем малый параметр $\mu : 0 < \mu \ll 1$. Положим в (8), (9)

$$r = r_0 + \mu r,\ \gamma = \gamma_0 + \mu\gamma,\ T = T_0 + \mu T_1$$

и будем искать решения этой краевой задачи в виде формального асимптотического ряда

$$u(t, x, \mu) = \mu^{1/2}\Big(\xi(\tau, x)\exp\left(i\omega_0 t\right) + \bar{cc}\Big) + \\ + \mu u_2(t, \tau, x) + \mu^{3/2} u_2(t, \tau, x) + \dots, \tag{24}$$

где $\tau = \mu t,\ \xi(\tau, x)$ – неизвестная амплитуда, функции $u_j(t, \tau, x)$ – $2\pi/\omega_0$ -периодические по t и 2π-периодические по x. Главное условие состоит в том, что функция $\xi(\tau, x)$ имеет нулевое среднее по пространственной переменной:

$$M(\xi(\tau, s)) = 0. \tag{25}$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = b_1\xi + \beta_1(\xi|\xi^2| - M(\xi|\xi^2|)) + \beta_2\bar{\xi}M(\xi^2), \tag{26}$$

$$\xi(\tau, x + 2\pi) \equiv \xi(\tau, x), \quad M(\xi(\tau, s)) = 0. \tag{27}$$

Для коэффициентов в (26) имеют место формулы

$$b_1 = \left(1 + \frac{\pi^2}{4}\right)^{-1}\left[\left(\frac{\pi}{2} + i\right)(r_1(1+\gamma_0) + \gamma_1 r_0) + r_0^2(1+\gamma_0^2)T_1\left(1 - i\frac{\pi}{2}\right)\right],$$

$$\beta_1 = -r(1+\delta\gamma_0)\big(\exp(-2i\omega_0 T_0) + \exp(i\omega_0 T_0)\big)C_2\left(1 + i\frac{\pi}{2}\right)^{-1},$$

$$\beta_2 = -r\Big[(1+\delta\gamma_0)\big(\exp(-2i\omega_0 T_0) + \exp(i\omega_0 T_0)\big)(C_1 - C_2) +$$

$$+ \delta\gamma_0\exp(-2i\omega_0 T_0)C_1\Big]\left(1 + i\frac{\pi}{2}\right)^{-1}.$$

Theorem

Пусть выполнено условие (23) *и пусть краевая задача* (26), (27) *имеет ограниченнон при* $\tau \to \infty$ *решение* $\xi(\tau, x)$. *Тогда функция*

$$u(t, x, \mu) = \mu^{1/2}\Big(\xi(\tau, x)\exp\big(i\omega_0 t\big) + \bar{c}c\Big) + \mu u_2(t, \tau, x)$$

удовлетворяет краевой задаче (8), (9) *с точностью до* $O(\mu^{3/2})$.

Источник финансирования

С. А. Кащенко, А. О. Толбей «О динамике полносвязной пространственно–распределенной цепочки из логистических уравнений с запаздыванием»

Работа выполнена в рамках реализации программы развития регионального научно-образовательного математического центра (ЯрГУ) при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (Соглашение о предоставлении из федерального бюджета субсидии № 075-02-2022-886).

Спасибо за внимание!