



# ДИНАМИКА ДВУХ ВИХРЕВЫХ КОЛЕЦ В КОНДЕНСАТЕ БОЗЕ-ЭЙНШТЕЙНА

Килин А.А., Артемова Е.М.

Удмуртский государственный университет  
Уральский математический центр

Москва 2022

# Уравнения движения вихрей

Уравнения движения  $N$  вихрей в конденсате Бозе-Эйнштейна, заключенного в гармоническую ловушку<sup>1</sup>:

$$\dot{x}_k = -S_k \frac{y_k}{1 - r_k^2} - c \sum_{j \neq k}^N S_j \frac{y_k - y_j}{r_{kj}^2}, \quad \dot{y}_k = S_k \frac{x_k}{1 - r_k^2} + c \sum_{j \neq k}^N S_j \frac{x_k - x_j}{r_{kj}^2},$$
$$r_k = \sqrt{x_k^2 + y_k^2}, \quad r_{kj} = \sqrt{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2}.$$

Здесь  $S_k$  — топологический заряд  $k$ -ого вихря,  $(x_k, y_k)$  — координаты  $k$ -ого вихря относительно центра ловушки, а  $c$  — безразмерная константа вида

$$c = \frac{b\hbar}{2mR_{\text{TF}}^2\Omega_0}.$$

---

<sup>1</sup>Middelkamp S. et al. Guiding-center dynamics of vortex dipoles in Bose-Einstein condensates //Physical Review A. – 2011. – Т. 84. – №. 1. – С. 011605.

# Уравнения движения вихрей

Уравнения движения могут быть представлены в гамильтоновой форме

$$S_k \dot{x}_k = \frac{\partial H}{\partial y_k}, \quad S_k \dot{y}_k = -\frac{\partial H}{\partial x_k}, \quad (1)$$

с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N S_k^2 \ln(1 - r_k^2) - \frac{c}{4} \sum_{k=1}^N \sum_{j \neq k}^N S_k S_j \ln r_{kj}^2. \quad (2)$$

Далее удобнее перейти к комплексной форме записи уравнений движения:

$$\dot{\bar{z}}_k = \frac{S_k}{i} \frac{\bar{z}_k}{1 - r_k^2} + \frac{c}{i} \sum_{j \neq k}^N S_j \frac{1}{z_k - z_j}, \quad (3)$$

где  $z_k = x_k + iy_k$  лежат внутри единичной окружности на комплексной плоскости  $|z_k| < 1$ .

# Уравнения движения $M \cdot N$ вихрей

Рассмотрим задачу о взаимодействии  $M$  вихревых колец, состоящих из  $N$  вихрей. Будем считать, что вихри разных колец имеют разные топологические заряды  $S_1, S_2, \dots, S_M$  соответственно. Обозначим координаты вихрей через комплексные координаты  $z_{m,k}$ , где  $m = 1, \dots, M$  задает номер кольца, а  $k = 1, \dots, N$  номер вихря в кольце. Общие уравнения движения вихрей можно записать в форме

$$\dot{z}_{m,k} = \frac{S_m}{i} \frac{\bar{z}_{m,k}}{1 - |z_{m,k}|^2} + \frac{c}{i} \left( \sum_{j \neq k}^N \frac{S_m}{z_{m,k} - z_{m,j}} + \sum_{n \neq m}^M \sum_{j=1}^N \frac{S_n}{z_{m,k} - z_{n,j}} \right), \quad (4)$$

где  $k = 1, \dots, N$ ,  $m = 1, \dots, M$ .



## Предложение

*Уравнения движения допускают инвариантное многообразие*

$$\mathcal{M}_{NM} = \left\{ (z_{m,k}) \middle| r_{m,k} = r_{m,l}, \varphi_{m,k} - \varphi_{m,l} = \frac{2\pi(k-l)}{N}, \right. \\ \left. k, l = 1, \dots, N, m = 1, \dots, M \right\},$$

*где  $r_{m,k} = |z_{m,k}|$ ,  $\varphi_{m,k} = \arg z_{m,k}$ .*

Инвариантное многообразие  $\mathcal{M}_{NM}$ , соответствует конфигурации  $N \cdot M$  вихрей в виде  $M$  вихревых колец. Таким образом, из предложения 1 следует, что если в начальный момент времени вихри формируют  $M$  вихревых колец, то и все остальное время конфигурация в виде вихревых колец сохраняется.

# Уравнения движения $M$ вихревых колец

Представим координаты вихрей на  $\mathcal{M}_{NM}$  в виде

$$z_{m,k} = z_m e^{i2\pi k/N}, \quad k = 1, \dots, N, \quad m = 1, \dots, M, \quad (5)$$

где  $z_m$  – координата первого вихря в  $m$ -ом кольце. Тогда уравнения движения  $M$  вихревых колец, состоящих из  $N$  вихрей могут быть представлены в гамильтоновой форме

$$\dot{\bar{z}}_m = \frac{1}{iS_m} \frac{\partial H}{\partial z_m}, \quad (6)$$

с гамильтонианом

$$H = - \sum_{m=1}^M S_m^2 \ln(1 - z_m \bar{z}_m) + \frac{c(N-1)}{2} \sum_{m=1}^M S_m^2 \ln(z_m \bar{z}_m) + \\ \frac{c}{2} \sum_{m=1}^M \sum_{n \neq m}^M S_m S_n \ln((z_m^N - z_n^N)(\bar{z}_m^N - \bar{z}_n^N)). \quad (7)$$

Уравнения (6) допускают интеграл момента  $F = \sum_{m=1}^M S_m |z_m|^2$ .

## Два вихревых кольца ( $M = 2$ )

Рассмотрим динамику двух вихревых колец, состоящих из  $N$  вихрей, введем обозначения  $z = z_1$ ,  $\zeta = z_2$ . Уравнения движения для  $z$ ,  $\zeta$  в явном виде запишутся как

$$\begin{aligned}\dot{\bar{z}} &= \frac{1}{iS_1} \frac{\partial H}{\partial z} = \frac{S_1}{i} \frac{\bar{z}}{1 - z\bar{z}} + \frac{c}{i} \left( \frac{S_1(N-1)}{2z} + \frac{S_2 N z^{N-1}}{z^N - \zeta^N} \right), \\ \dot{\bar{\zeta}} &= \frac{1}{iS_2} \frac{\partial H}{\partial \zeta} = \frac{S_2}{i} \frac{\bar{\zeta}}{1 - \zeta\bar{\zeta}} + \frac{c}{i} \left( \frac{S_2(N-1)}{2\zeta} + \frac{S_1 N \zeta^{N-1}}{\zeta^N - z^N} \right),\end{aligned}\tag{8}$$

Интеграл момента запишется в виде:

$$F = S_1 |z|^2 + S_2 |\zeta|^2.$$

## Два вихревых кольца ( $M = 2$ ). Редукция

Выполним далее редукцию на уровень интеграла  $F = f$ , для этого перейдем к следующим переменным

$$\begin{aligned}\varphi &= \arg z - \arg \zeta, & \psi &= \arg z + \arg \zeta, \\ X &= S_1|z|^2 - S_2|\zeta|^2, & Y &= F = S_1|z|^2 + S_2|\zeta|^2.\end{aligned}\tag{9}$$

В новых переменных  $(\varphi, X, \psi, Y)$  гамильтониан с точностью до постоянного слагаемого и множителя  $\frac{1}{2}$  примет вид

$$\begin{aligned}H &= 2cS_1S_2 \ln(u^N + v^N - 2u^{N/2}v^{N/2} \cos N\varphi) + \\ &+ c(N-1)(S_1^2 \ln u + S_2^2 \ln v) - 2S_1^2 \ln(1-u) - 2S_2^2 \ln(1-v),\end{aligned}\tag{10}$$

где  $u = \frac{Y+X}{2S_1}$ ,  $v = \frac{Y-X}{2S_2}$ . Уравнения движения в новых переменных запишутся как

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial X}, \quad \dot{X} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi}, \quad \dot{\psi} = \frac{\partial H}{\partial Y}, \quad \dot{Y} = -\frac{\partial H}{\partial \psi}.\tag{11}$$

# Два вихревых кольца ( $M = 2$ ). Частные решения

Стационарные конфигурации (относительные равновесия) вихревых колец определяются уравнением

$$\sin N\varphi = 0. \quad (12)$$

Данное уравнение имеет два решения:  $\varphi = \varphi_s = 0$  и  $\varphi = \varphi_a = \pi/N$ . Конфигурации первого типа ( $\varphi_s = 0$ ) будем называть симметричными, а второго типа ( $\varphi_a = \pi/N$ ) — альтернированными.

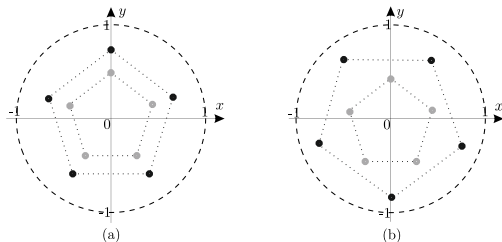


Рис. 1: Схематическое изображение (a) симметричной и (b) альтернированной конфигурации.

## Случай $N = 2$ , $S_1 = S_2 = 1$

Гамильтониан с точностью до постоянного слагаемого принимает вид

$$H = 2c \ln(f^2 + X^2 - (f^2 - X^2) \cos 2\varphi) - 2 \ln((2 - f)^2 - X^2) + c \ln(f^2 - X^2). \quad (13)$$

В рассматриваемом случае переменная  $\varphi$  определена в интервале  $[0, \pi)$ . На фиксированном уровне интеграла  $F = f$  область определения переменной  $X$  задается как

$$X \in \begin{cases} (-f, f) & 0 < f < 1 \\ (f - 2, 2 - f) & 1 \leq f < 2. \end{cases} \quad (14)$$

Возможные значения интеграла  $F$  определены неравенствами

$$0 \leq f \leq 2.$$

# Случай $N = 2$ , $S_1 = S_2 = 1$ . Особенности гамильтониана

Рассмотрим **особенности гамильтониана** и соответствующие им конфигурации колец.

- ❶ Столкновение колец  $X = 0$ ,  $\varphi = 0$ . При приближении к данной конфигурации значение гамильтониана  $H \rightarrow -\infty$ ;
- ❷ Одно из колец находится на границе ловушки  $|z| = 1$  ( $|\zeta| = 1$ ). В этом случае выполняется равенство  $X = 2 - f$  ( $X = f - 2$ ) при любом значении  $\varphi$ . При приближении к данной конфигурации в обоих случаях  $H \rightarrow +\infty$ .
- ❸ Коллапс одного из колец в центре ловушки  $|z| = 0$  ( $|\zeta| = 0$ ). В этом случае выполняется равенство  $X = -f$  ( $X = f$ ) при любом значении  $\varphi$ . При приближении к данной конфигурации в обоих случаях  $H \rightarrow -\infty$ .
- ❹ Одно из колец находится на границе ловушки  $|z| = 1$  ( $|\zeta| = 1$ ), а другое коллапсирует в центре ловушке  $|\zeta| = 0$  ( $|z| = 0$ ). Такая особенность возможна только при  $f = 1$ .

## Случай $N = 2$ , $S_1 = S_2 = 1$ . Частные решения

Рассмотрим **симметричные положения равновесия** при  $\varphi = \varphi_s = 0$ . Уравнение для нахождения критических значений  $X$  имеет вид

$$X((3c - 2)X^4 - ((5f^2 - 12f + 12)c - 2f^2)X^2 + 2cf^2(f - 2)^2) = 0. \quad (15)$$

Тривиальное решение  $X = 0$  уравнения отвечает сингулярности гамильтониана. Помимо тривиального решения, уравнение имеет четыре в общем случае комплексных корня

$$X = X_{s\pm}^{(1)} = \sqrt{Y_{s\pm}}, \quad X = X_{s\pm}^{(2)} = -\sqrt{Y_{s\pm}}, \quad (16)$$

где

$$Y_{s\pm} = \frac{1}{6c - 4}((5f^2 - 12f + 12)c - 2f^2 \pm \sqrt{(f^2 - 12f + 12)^2 c^2 - 4f^2(f^2 + 4f - 4)c + 4f^4}). \quad (17)$$



# Случай $N = 2$ , $S_1 = S_2 = 1$ . Частные решения

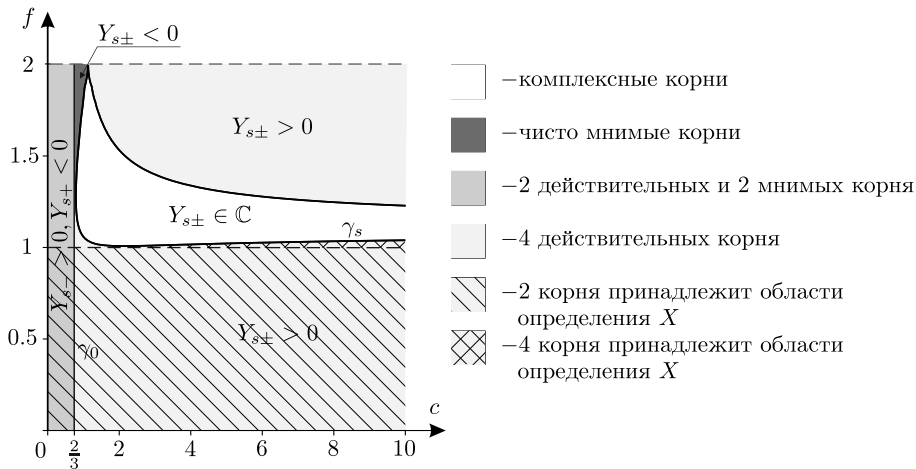


Рис. 2: Области в пространстве параметров  $(c, f)$ , соответствующие разным типам корней уравнения на  $X$  при  $\varphi = \varphi_s = 0$ .

## Случай $N = 2$ , $S_1 = S_2 = 1$ . Частные решения

Рассмотрим **альтернированные положения равновесия**, которые соответствуют  $\varphi = \varphi_a = \pi/2$ . Уравнения для нахождения критических значений  $X$  имеет вид

$$X((c-2)X^2 + (2-c)f^2 + 4c(f-1)) = 0. \quad (18)$$

Данное уравнение имеет тривиальное решение  $X = X_a^{(1)} = 0$  и в общем случае два комплексных корня

$$X = X_{a\pm}^{(2)} = \pm\sqrt{Y_a}, \quad Y_a = \frac{(f-2)^2c - 2f^2}{c-2}. \quad (19)$$

В частном случае  $c = 2$ ,  $f = 1$ , уравнение на  $X$  вырождается, тогда любое значение  $X$  является его решением.

## Случай $N = 2$ , $S_1 = S_2 = 1$ . Частные решения

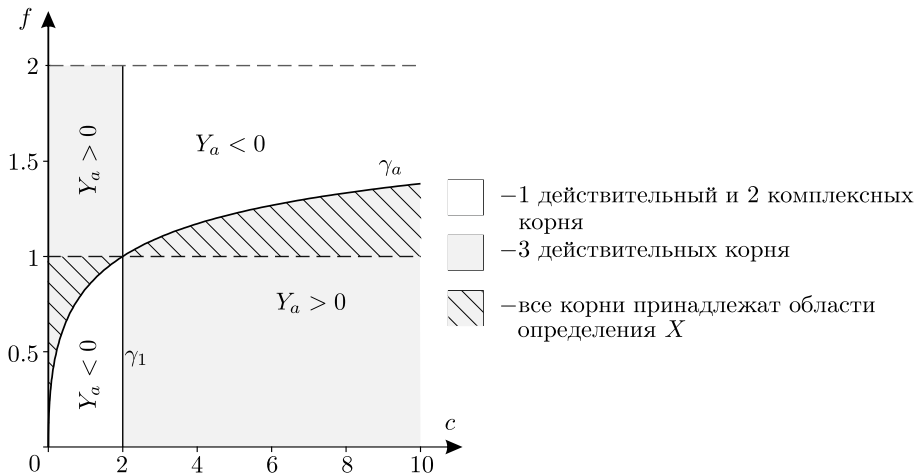


Рис. 3: Области в пространстве параметров  $(c, f)$ , соответствующие разным типам корней уравнения на  $X$  при  $\varphi = \varphi_a = \pi/2$ .

# Случай $N = 2$ , $S_1 = S_2 = 1$ . Частные решения

На рис. 4 обозначены области существования положений равновесия.

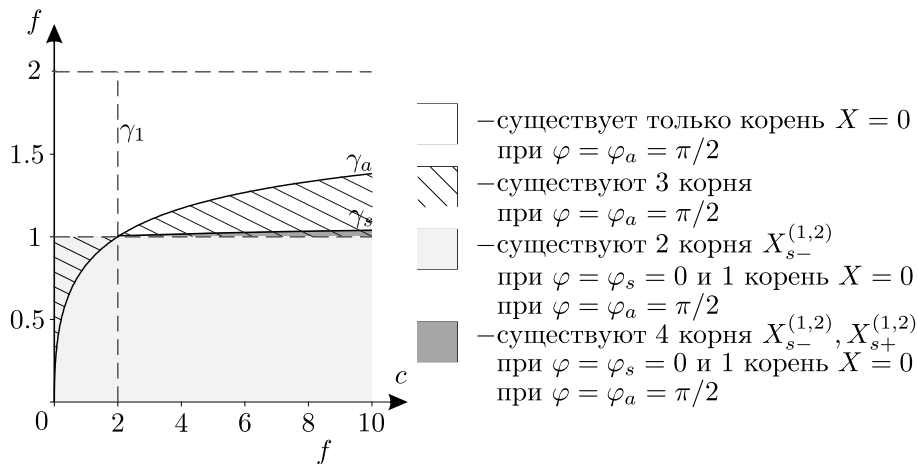


Рис. 4: Области существования положений равновесия.

## Случай $N = 2$ , $S_1 = S_2 = 1$ . Частные решения

Из предыдущего рис. видно, что существуют три промежутка значений параметра  $c$ :

$$\begin{aligned} 1. & 0 < c < 2, \\ 2. & c = 2, \\ 3. & c > 2, \end{aligned} \tag{20}$$

соответствующие разной эволюции положений равновесия при изменении значения интеграла  $f$  (и фиксированном значении параметра  $c$ ). То есть в рассматриваемой задаче существует только три различных типа бифуркационных диаграмм, соответствующие трем указанным промежуткам значений параметра  $c$ .

## Случай $N = 2$ , $S_1 = S_2 = 1$ . Бифуркационная диаграмма

Бифуркационная диаграмма представляет собой образ  $\Sigma = \Phi(S)$  критического множества  $S = \{\xi \mid \text{rank } d\Phi(\xi) < 2\}$ , интегрального отображения  $\Phi$  фазового пространства  $\mathcal{M}_4 = \{\xi\}$  на плоскость первых интегралов

$$\xi \mapsto \Phi(\xi) = (F(\xi), H(\xi)) \in \mathbb{R}^2. \quad (21)$$

В рассматриваемом случае диаграмма представляет собой набор бифуркационных кривых, каждая из которых соответствует одному из семейств неподвижных точек. Обозначим эти кривые следующим образом

$$\begin{aligned} \sigma_{s1,2} : h = H(f, c) \Big|_{\varphi=0, X=X_{s-}^{(1,2)}}, \quad \sigma_{s3,4} : h = H(f, c) \Big|_{\varphi=0, X=X_{s+}^{(1,2)}}, \\ \sigma_{a0} : h = H(f, c) \Big|_{\varphi=\pi/2, X=X_a^{(1)}=0}, \quad \sigma_{a1,2} : h = H(f, c) \Big|_{\varphi=\pi/2, X=X_{a\pm}^{(2)}}. \end{aligned}$$

Данные кривые следует дополнить кривой  $\sigma_n : f = 1$ , соответствующей нелокальной бифуркации, при которой происходит смена асимптотики гамильтониана.

# Случай $N = 2$ , $S_1 = S_2 = 1$ . Биф.диаграмма $c < 2$

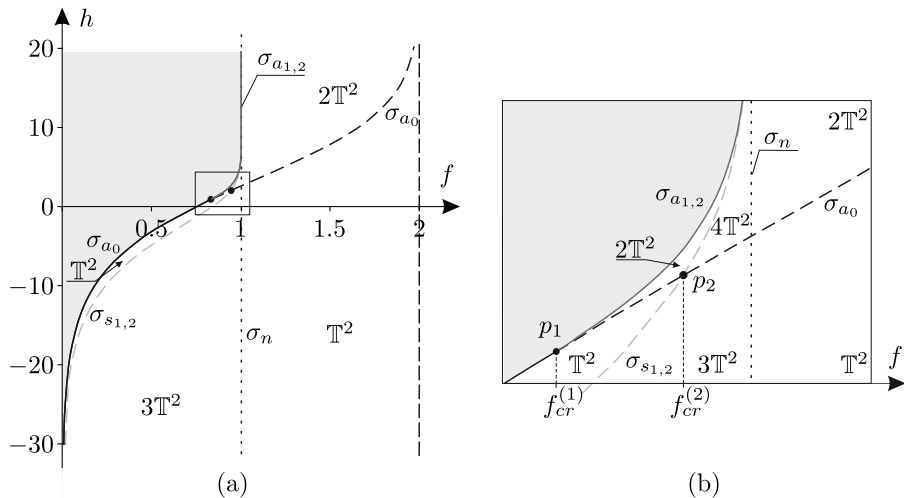
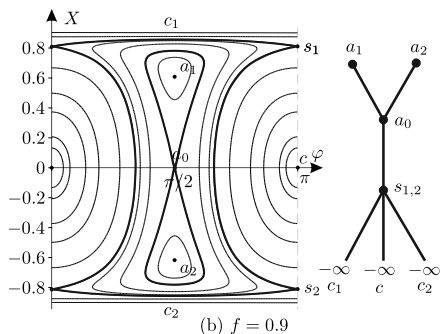
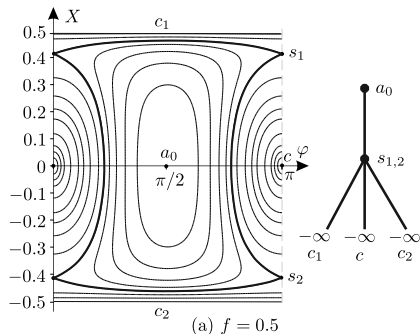


Рис. 5: Бифуркационная диаграмма при  $c = 1$ .

# Случай $N = 2$ , $S_1 = S_2 = 1$ . Биф.диаграмма $c < 2$

- (a) При  $f < f_{cr}^{(1)} = \frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{2}+\sqrt{c}}$  на фазовом портрете существуют три неподвижные точки  $s_1$ ,  $s_2$  (типа седло) и  $a_0$  (типа центр);
- (b) При  $f_{cr}^{(1)} < f < f_{cr}^{(2)}$  ( $f_{cr}^{(1)} = \frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{2}+\sqrt{c}}$ ) на фазовом портрете существуют пять неподвижных точек  $a_0$ ,  $a_{1,2}$  и  $s_{1,2}$ ;



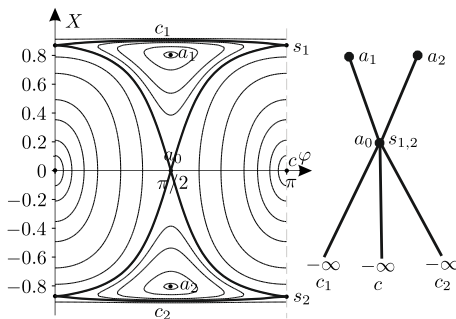


# Случай $N = 2$ , $S_1 = S_2 = 1$ . Биф.диаграмма $c < 2$

(с) При  $f = f_{cr}^{(2)}$  (точка  $p_2$  на диаграмме), где  $f_{cr}^{(2)}$  определяется из уравнения

$$H(f, c)|_{\varphi=0, X=X_{s-}^{(1,2)}} = H(f, c)|_{\varphi=\pi/2, X=0},$$

происходит нелокальная бифуркация, при которой сливаются неустойчивые инвариантные многообразия седловых неподвижных точек  $a_0$ ,  $s_{1,2}$ ;

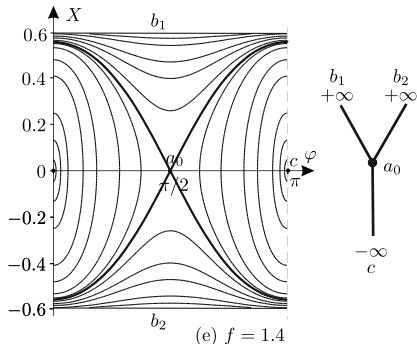
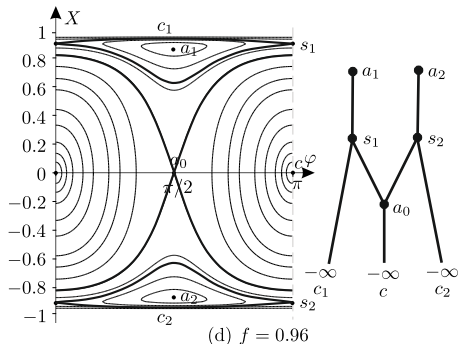


(с)  $f = f_{cr}^{(2)} \approx 0.941$

# Случай $N = 2$ , $S_1 = S_2 = 1$ . Биф.диаграмма $c < 2$

(d) При  $f \rightarrow 1 - 0$  решения  $s_{1,2}$  и  $a_{1,2}$  приближаются к границе области возможных движений  $X \rightarrow \pm f$ ;

(e) При  $f \geq 1$  на фазовом портрете остается одна неустойчивая неподвижная точка  $a_0$ .



Случай  $N = 2$ ,  $S_1 = S_2 = 1$ . Биф.диаграмма  $c = 2$

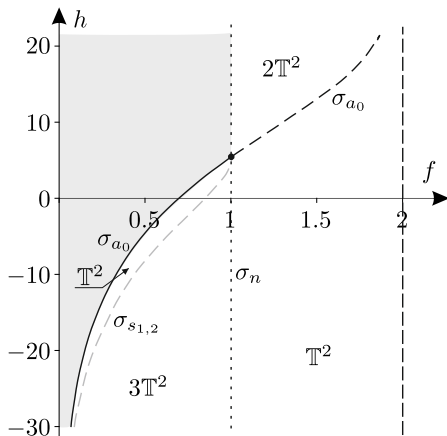
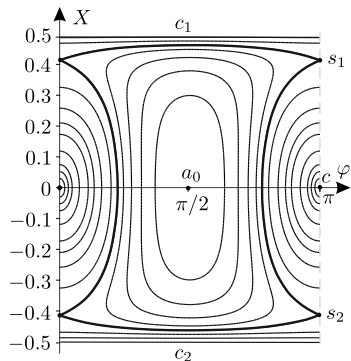


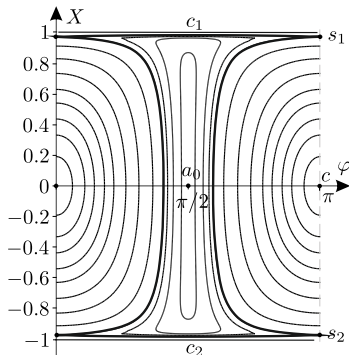
Рис. 6: Бифуркационная диаграмма при  $c = 2$ .

# Случай $N = 2$ , $S_1 = S_2 = 1$ . Биф.диаграмма $c = 2$

(a), (b) При  $f < 1$  динамика системы и фазовые портреты совпадают со случаем  $c < 2$  при  $f < f_{cr}^{(1)}$ . При  $f \rightarrow 1$  сепаратриса неустойчивой неподвижной точки  $s_1$  ( $s_2$ ) приближается к неподвижной точке  $a_0$ ;



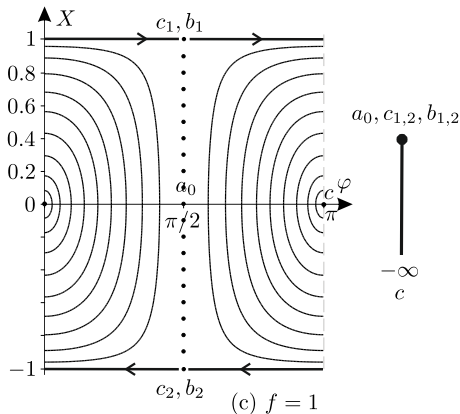
(a)  $f = 0.5$



(b)  $f = 0.999$

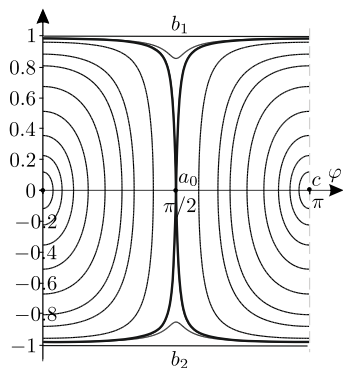
# Случай $N = 2$ , $S_1 = S_2 = 1$ . Биф.диаграмма $c < 2$

(с) При  $f = 1$  уровни энергии, на которых лежат решения  $s_{1,2}$  и  $a_0$ , сливаются (энергия в данном случае конечна). На получившемся после слияния критическом уровне энергии  $H = 4 \ln 2$  лежит семейство неподвижных точек при  $\varphi = \pi/2$ . Динамика на границе ОВД описывается уравнением  $\dot{\varphi} = 4 \operatorname{sign}(X)(\cos 2\varphi + 1)$ ;

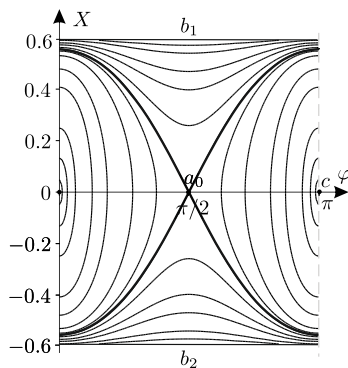
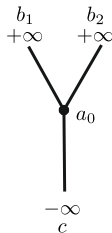


# Случай $N = 2$ , $S_1 = S_2 = 1$ . Биф.диаграмма $c = 2$

(d),(e) При дальнейшем увеличении параметра  $f$  происходит смена асимптотик гамильтониана на границе области возможных значений. Также как и в случае  $c < 2$  при прохождении прямой  $f = 1$ , происходит нелокальная бифуркация  $3\mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ .



(d)  $f = 1.001$



(e)  $f = 1.4$

# Случай $N = 2$ , $S_1 = S_2 = 1$ . Биф.диаграмма $c > 2$

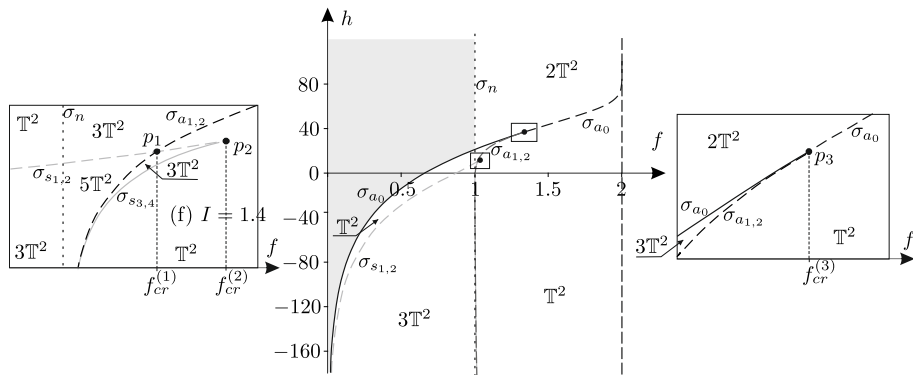
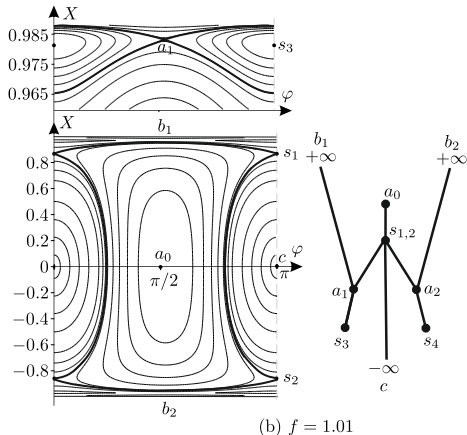
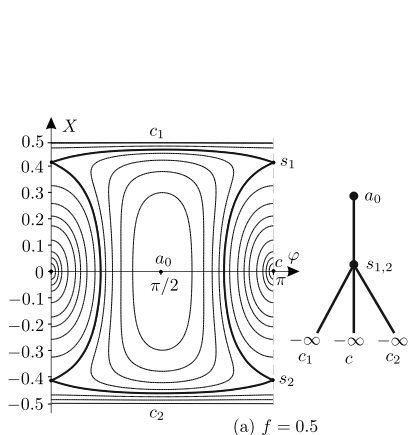


Рис. 7: Бифуркационная диаграмма при  $c = 8$ .

# Случай $N = 2$ , $S_1 = S_2 = 1$ . Биф.диаграмма $c > 2$

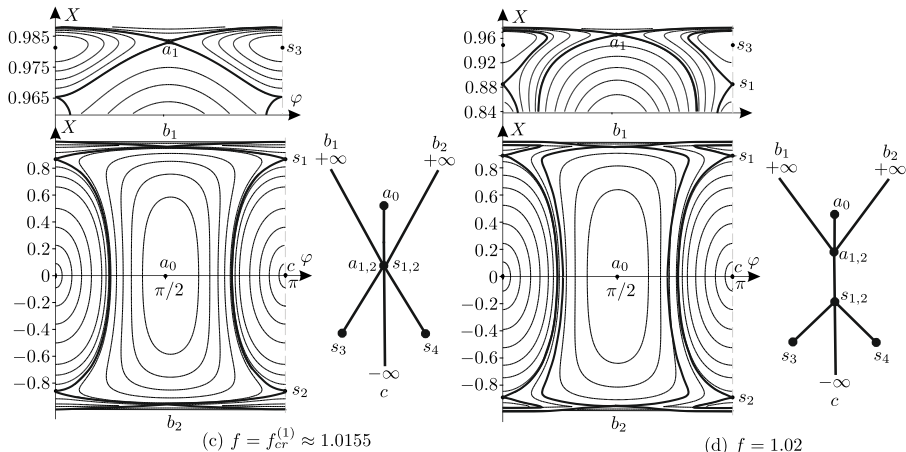
- (а) Случай  $f \leq 1$  полностью совпадает со случаем  $f < f_{cr}^{(1)}$  при  $c < 2$  и случаем  $f < 1$  при  $c = 2$ ;
- (б) При  $1 \leq f < f_{cr}^{(1)}$  на фазовом портрете существуют семь неподвижных точек  $a_0$ ,  $a_{1,2}$ ,  $s_{1,2}$  и  $s_{3,4}$ ;





# Случай $N = 2$ , $S_1 = S_2 = 1$ . Биф.диаграмма $c > 2$

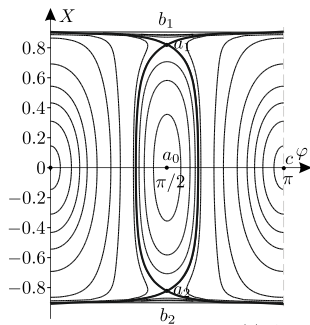
(с), (d) При  $f = f_{cr}^{(1)}$  (точка  $p_1$  на диаграмме), происходит нелокальная бифуркация, при которой сливаются точки  $a_{1,2}$  и  $s_{1,2}$ . Количество и тип неподвижных точек при  $f_{cr}^{(1)} < f < f_{cr}^{(2)}$  остаются прежними;



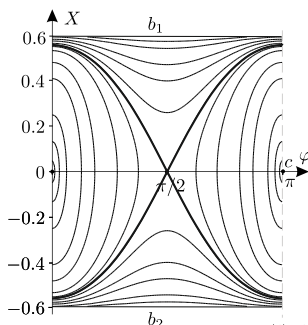
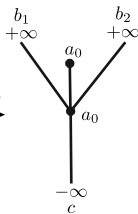
# Случай $N = 2$ , $S_1 = S_2 = 1$ . Биф.диаграмма $c > 2$

(е) При  $f_{cr}^{(2)} < f < f_{cr}^{(3)}$  существуют две седловые точки  $a_{1,2}$  и точка типа центр  $a_0$ . При  $f = f_{cr}^{(2)}$  (точка  $p_2$  на диаграмме) происходит касательная бифуркация. При  $f = f_{cr}^{(3)}$  происходит бифуркация типа субкритическая «вилка» (точка  $p_3$  на диаграмме);

(f) В случае  $f > f_{cr}^{(3)}$  динамика и фазовые портреты совпадают со случаем  $c < 2$  при  $f > 1$ .



(е)  $f = 1.1$



(f)  $f = 1.4$

- ❶ Полная классификация возможных траекторий рассматриваемой системы в зависимости от параметров и начальных условий. В частности планируется провести анализ начальных условий, при которых наблюдается явление чехарды вихревых колец.
- ❷ Бифуркационный анализ динамики вихревых колец с топологическими зарядами разного знака.
- ❸ Бифуркационный анализ динамики вихревых колец, состоящих из большего числа вихрей.

# Список литературы

1. Helmholtz, H., Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen, *J. Reine Angew. Math.*, 1858, vol. 55, pp. 25–55.
2. Kirchhoff, G., *Vorlesungen über mathematische Physik: Vol. 1. Mechanik*, Leipzig: Teubner, 1876.
3. Greenhill, A. G., Plane Vortex Motion, *Quart. J. Pure Appl. Math.*, 1877/78, vol. 15, no. 58, pp. 10–27.
4. Lewis, T. C., Some Cases of Vortex Motion, *Messenger of Math.*, 1879, vol. 9, pp. 93–95.
5. Gromeka, I. S., On Vortex Motions of a Liquid on a Sphere, *Uchen. Zap. Imp. Kazan. Univ.*, 1885, no. 3, pp. 202–236 (Russian).
6. Zermelo, E., Hydrodynamische Untersuchungen über die Wirbelbewegungen in einer Kugelfläche, *Z. Math. Phys.*, 1902, vol. 47, pp. 201–237.
7. Bogomolov, V. A., Dynamics of the Vorticity on a Sphere, *Fluid Dynam.*, 1977, vol. 12, no. 6, pp. 863–870; see also: *Izv. Akad. Nauk SSSR Mekh. Zhidk. Gaza*, 1977, no. 6, pp. 57–65.
8. Bogomolov, V. A., On Two-Dimensional Hydrodynamics of a Sphere, *Izv. Atmos. Ocean. Phys.*, 1979, vol. 15, no. 1, pp. 18–22; see also: *Izv. Akad. Nauk SSSR Fiz. Atmos. Okeana*, 1979, vol. 15, no. 1, pp. 29–35.
9. Dritschel, D. G. and Boatto, S., The Motion of Point Vortices on Closed Surfaces, *Proc. A*, 2015, vol. 471, no. 2176, 20140890, 25 pp.
10. Borisov, A. V. and Mamaev, I. S., *Mathematical Methods in the Dynamics of Vortex Structures*, Izhevsk: R&C Dynamics, Institute of Computer Science, 2005 (Russian).
11. Thomson, W., Floating Magnets, *Nature*, 1878, vol. 18, pp. 13–14.
12. Morikawa, G. K. and Swenson, E. V., Interacting Motion of Rectilinear Geostrophic Vortices, *Phys. Fluids*, 1971, vol. 14, no. 6, pp. 1058–1073.

13. Gryanik, V. M., Dynamics of Singular Geostrophical Vortices in a 2-Level Model of the Atmosphere (Ocean), *Izv. Atmos. Ocean Phys.*, 1983, vol. 19, no. 3, pp. 171–179; see also: *Izv. Akad. Nauk SSSR. Fiz. Atmos. Okeana*, 1983, vol. 19, no. 3, pp. 227–240.
14. Fetter, A. L. and Svidzinsky, A. A., Vortices in a Trapped Dilute Bose – Einstein Condensate, *J. Phys. Condens. Matter*, 2001, vol. 13, no. 12, R135–R194.
15. Middelkamp, S., Kevrekidis, P. G., Frantzeskakis, D. J., Carretero-González, R., Schmelcher, P., Bifurcations, Stability, and Dynamics of Multiple Matter-Wave Vortex States, *Phys. Rev. A*, 2010, vol. 82, no. 1, 013646, 15 pp.
16. Kevrekidis, P. G., Carretero-González, R., Frantzeskakis, D. J., and Kevrekidis, I. G., Vortices in Bose – Einstein condensates: some recent developments, *Mod. Phys. Lett. B*, 2004, vol. 18, no. 30, pp. 1481–1505.
17. Fetter, A. L., Rotating trapped Bose-Einstein condensates, *Rev. Mod. Phys.*, 2009, vol. 81, no. 2, pp. 647–692.
18. Gröbli, W., *Spezielle Probleme über die Bewegung geradliniger paralleler Wirbelfäden*, Zürich: Zürcher und Furrer, 1877; see also: *Vierteljahresschr. Naturforsch. Ges. Zürich*, 1877, vol. 22, pp. 37–81, 129–165.
19. Goryachev, D. N., On Some Cases of Motion of Rectilinear Parallel Vortex Filaments, *Magister Dissertation*, Moscow: Imp. Moscow Univ., 1898, 106 pp. (Russian).
20. Borisov, A. V., Kilin, A. A., and Mamaev, I. S., A New Integrable Problem of Motion of Point Vortices on the Sphere, *Nelin. Dinam.*, 2007, vol. 3, no. 2, pp. 211–223 (Russian).
21. Stremler, M. A., Salmanzadeh, A., Basu, S., and Williamson, Ch. H. K., A Mathematical Model of 2P and 2C Vortex Wakes, *J. Fluid Struct.*, 2011, vol. 27, nos. 5–6, pp. 774–783.

22. García-Azpeitia, C. and García-Naranjo, L. C., Platonic Solids and Symmetric Solutions of the  $N$ -Vortex Problem on the Sphere, *J. Nonlinear Sci.*, 2022, vol. 32, no. 3, Paper No. 39, 56 pp.
23. Havelock, T. H., The Stability of Motion of Rectilinear Vortices in Ring Formation, *Philos. Mag.*, 1931, vol. 11, no. 70, pp. 617–633.
24. Kurakin, L. G. and Yudovich, V. I., On the Nonlinear Stability of the Steady Rotation of a Regular Vortex Polygon, *Dokl. Phys.*, 2002, vol. 47, no. 6, pp. 465–470; see also: *Dokl. Akad. Nauk*, 2002, vol. 384, no. 4, pp. 476–482.
25. Kurakin, L. G. and Yudovich, V. I., The Stability of Stationary Rotation of a Regular Vortex Polygon, *Chaos*, 2002, vol. 12, no. 3, pp. 574–595.
26. Kurakin, L. G., On the Stability of Thomson's Vortex Configurations inside a Circular Domain, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2010, vol. 15, no. 1, pp. 40–58.
27. Kurakin, L. G. and Ostrovskaya, I. V., Stability of the Thomson Vortex Polygon with Evenly Many Vortices outside a Circular Domain, *Siberian Math. J.*, 2010, vol. 51, no. 3, pp. 463–474.
28. A. V. Borisov, I. S. Mamaev, M. A. Sokolovskiy (Eds.), Izhevsk: R&C Dynamics, Institute of Computer Science, 2003, pp. 414–440 (Russian).
29. Bogomolov, V. A., Model of Oscillations of the Centers of Action of the Atmosphere, *Izv. Akad. Nauk SSSR Fiz. Atmos. Okeana*, 1979, vol. 15, no. 3, pp. 243–249 (Russian).
30. Borisov, A. V. and Kilin, A. A., Stability of Thomson's Configurations of Vortices on a Sphere, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2000, vol. 5, no. 2, pp. 189–200.
31. Stewart, H. J., Periodic Properties of the Semi-Permanent Atmospheric Pressure Systems, *Quart. Appl. Math.*, 1943, vol. 1, pp. 262–267.

32. Stewart, H. J., Hydrodynamic Problems Arising from the Investigation of the Transverse Circulation in the Atmosphere, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1945, vol. 51, pp. 781–799.
33. Kizner, Z., On the Stability of Two-Layer Geostrophic Point-Vortex Multipoles, *Phys. Fluids*, 2014, vol. 26, no. 4, 046602, 18 pp.
34. Kurakin, L. G., Ostrovskaya, I. V., and Sokolovskiy, M. A., Stability of Discrete Vortex Multipoles in Homogeneous and Two-Layer Rotating Fluid, *Dokl. Phys.*, 2015, vol. 60, no. 5, pp. 217–223.
35. Artemova, E. M. and Kilin, A. A., Nonlinear Stability of Regular Vortex Polygons in a Bose–Einstein Condensate, *Phys. Fluids*, 2021, vol. 33, no. 12, 127105, 7 pp.
36. Kurakin, L. G. and Ostrovskaya, I. V., On the Stability of Thomson’s Vortex  $N$ -Gon and a Vortex Tripole/Quadrupole in Geostrophic Models of Bessel Vortices and in a Two-Layer Rotating Fluid: A Review, *Russian J. Nonlinear Dyn.*, 2019, vol. 15, no. 4, pp. 533–542.
37. Aref, H., Point Vortex Motions with a Center of Symmetry, *Phys. Fluids*, 1982, vol. 25, no. 12, pp. 2183–2187.
38. Koiller, J., Pinto de Carvalho, S., Rodrigues da Silva, R., and Gonçalves de Oliveira, L. C., On Aref’s Vortex Motions with a Symmetry Center, *Phys. D*, 1985, vol. 16, no. 1, pp. 27–61.
39. Borisov, A. V. and Mamaev, I. S., Dynamics of Two Vortex Rings on a Sphere, *Nelin. Dinam.*, 2006, vol. 2, no. 2, pp. 181–192 (Russian).
40. Aref, H., Point Vortex Motions with a Center of Symmetry, *Phys. Fluids*, 1982, vol. 25, no. 12, pp. 2183–2187.
41. Arnol’d, V. I., Afraimovich, V. S., Ilyashenko, Yu. S., and Shilnikov, L. P., Bifurcation Theory, in *Dynamical Systems 5*, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr., vol. 5, Moscow: VINITI, 1986, pp. 5–218 (Russian).

42. Bizyaev, I., Bolsinov, A., Borisov, A., and Mamaev, I., Topology and Bifurcations in Nonholonomic Mechanics, *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 2015, vol. 25, no. 10, 1530028, 21 pp.
43. Lewis, D. and Ratiu, T., Rotating  $n$ -Gon/ $kn$ -Gon Vortex Configurations, *J. Nonlinear Sci.*, 1996, vol. 6, no. 5, pp. 385–414.
44. Middelkamp, S., Torres, P. J., Kevrekidis, P. G., Frantzeskakis, D. J., Carretero-González, R., Schmelcher, P., Freilich, D. V., and Hall, D. S., Guiding-Center Dynamics of Vortex Dipoles in Bose–Einstein Condensates, *Phys. Rev. A*, 2011, vol. 84, no. 1, 011605, 4 pp.
45. Torres, P. J., Kevrekidis, P. G., Frantzeskakis, D. J., Carretero-González, R., Schmelcher, P., and Hall, D. S., Dynamics of Vortex Dipoles in Confined Bose–Einstein Condensates, *Phys. Lett. A*, 2011, vol. 375, no. 33, pp. 3044–3050.
46. Ryabov P. E., and Sokolov S. V., Phase topology of two vortices of the identical intensities in Bose–Einstein condensate, arXiv preprint arXiv:1812.11749, 2018.
47. Koukouloyannis V., Voyatzis G., and Kevrekidis P. G., Dynamics of three noncorotating vortices in Bose–Einstein condensates, *Phys. Rev. E*, 2014, vol. 89, no. 4, 042905, 19 p.
48. Kyriakopoulos, N., Koukouloyannis, V., Skokos, C., and Kevrekidis, P. G., Chaotic behavior of three interacting vortices in a confined Bose–Einstein condensate, *Chaos*, 2014, vol. 24, no. 2, 024410, 16 p.