Условия разрешимости краевых задач для линейных функционально-дифференциальных уравнений

Пермский национальный исследовательский политехнический университет

Вторая конференция Математических центров России, МГУ, МИАН, 9 ноября 2022

Теорема

Пусть функция $p \in \mathrm{L}[a,b]$ неотрицательна, $f \in \mathrm{L}[a,b]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathrm{AC}$, $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ измерима.
Задача Коши

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -p(t)x(h(t))(t) + f(t) \text{ при п.в. } t \in [a,b], \\ x(a) = \alpha, \\ x(\xi) = \varphi(\xi) \text{ при } \xi \notin [a,b], \end{cases} \tag{1}$$

имеет единственное решение $x \in \mathrm{AC}[a,b]$, если

$$\int_a^b p(t)\,dt < 3.$$

Знак в неравенстве нельзя заменить на «нестрогий».
Условие сжатия дает условие разрешимости $\int_a^b p(t)\,dt < 1$.

Теорема

Задача Коши

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -(Tx)(t) + f(t), \quad t \in [a, b], \\ x(a) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

имеет единственное решение при всех $f \in \mathrm{L}[a, b]$, если линейный ограниченный оператор $T : \mathrm{C}[a, b] \to \mathrm{L}[a, b]$ положителен и

$$\| T \|_{\mathrm{C}[a,b] \to \mathrm{L}[a,b]} < 3.$$

Знак в неравенстве нельзя заменить на «нестрогий».
Если $T \geqslant 0$, то $\| T \|_{\mathrm{C}[a,b] \to \mathrm{L}[a,b]} = \int_a^b (T1)(t)\, dt$.
Условие сжатия дает условие разрешимости

$$\| T \|_{\mathrm{C}[a,b] \to \mathrm{L}[a,b]} < 1.$$

Теорема

Краевая задача

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = (Tx)(t) + f(t), & t \in [0,1], \\ x(0) = \dot{x}(1), & \dot{x}(0) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

имеет единственное решение при всех $f \in \mathrm{L}[0,1]$, если линейный ограниченный оператор $T : \mathrm{C}[0,1] \to \mathrm{L}[0,1]$ положителен и

$$\| T \|_{\mathrm{C}[0,1] \to \mathrm{L}[0,1]} \in [0, 1/2] \cup [1, 5].$$

Это условие разрешимости неулучшаемо.

Принцип сжатия дает условие разрешимости

$$\| T \|_{\mathrm{C}[0,1] \to \mathrm{L}[0,1]} \leqslant 1/2.$$

Теорема

Пусть заданы неотрицательные числа A, B, C, D. Задачи Коши для системы

$$\begin{cases} \dot{x} = \quad T_{11}x + T_{12}y + f_1, \\ \dot{y} = -T_{21}x + T_{22}y + f_2, \\ x(a) = \alpha_1, \quad y(a) = \alpha_2, \end{cases} \tag{4}$$

однозначно разрешима при всех линейных ограниченных положительных операторах $T_{ij} : \mathrm{C}[a,b] \to \mathrm{L}[a,b]$, $i,j = 1,2$,

$$\| T_{11}\| \leqslant A, \quad \| T_{12}\| \leqslant C, \quad \| T_{21}\| \leqslant D, \quad \| T_{22}\| \leqslant B, \tag{5}$$

$$\Leftrightarrow \quad A < 1, \quad B < 1, \quad CD < \left(\sqrt[3]{1-A} + \sqrt[3]{1-B}\right)^3. \tag{6}$$

Если условие (6) не выполнено, то найдутся линейные ограниченные положительные операторы T_{ij}, для которых задача не является однозначно разрешимой.

Теорема

Пусть задано неотрицательное число P. Периодическая задача

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -(T_1 x_2)(t) + f_1(t), \ \ t \in [0,1], \\ \dot{x}_2(t) = -(T_2 x_3)(t) + f_2(t), \ \ t \in [0,1], \\ \dot{x}_3(t) = -(T_3 x_1)(t) + f_3(t), \ \ t \in [0,1], \\ x_1(1) = x_2(0), \quad x_2(1) = x_3(0), \quad x_3(1) = x_1(0), \end{cases} \tag{7}$$

имеет единственное решение при всех таких линейных положительных операторах $T_i : \mathrm{C}[0,1] \to \mathrm{L}[0,1]$, что

$$\| T_i \|_{\mathrm{C}[0,1] \to \mathrm{L}[0,1]} = \int_0^1 (T_i 1)(t)\, dt = P, \ \ i = 1,2,3, \tag{8}$$

тогда и только тогда, когда

$$P \in (0, P^*),$$

$P^* \approx 2.7$ удовлетворяет уравнению
$8z^7 + 28z^6 + 24z^5 - 152z^4 - 478z^3 - 591z^2 - 326z - 56 = 0.$

$$\mu \equiv \frac{\min\{\int_0^1 f^+(t)\,dt, \int_0^1 f^-(t)\,dt\}}{\max\{\int_0^1 f^+(t)\,dt, \int_0^1 f^-(t)\,dt\}}, \quad f \not\equiv 0\,, \quad f \in \mathrm{L}[a,b]$$

Теорема

Если $P^+ \leqslant \frac{8\,(1-\mu)}{1+\mu}$, то при всех таких линейных положительных операторах $T : \mathrm{C}[0,1] \to \mathrm{L}[0,1]$, что $(T1)(t) \leqslant P^+$, $T \not\equiv 0$, единственное решение периодической краевой задачи

$$\begin{aligned} &\ddot{x}(t) = (Tx)(t) + f(t) \quad \text{при п.в. } t \in [0,1], \\ &x(0) = x(1), \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(1), \end{aligned} \tag{9}$$

удовлетворяет неравенству

$$-\operatorname{sgn}\left(\int_0^1 f(s)\,ds\right) x(t) > 0, \quad t \in [0,1].$$

Объект — функционально-дифференциальное уравнение

$$Fx = f, \quad F : \mathrm{AC}^{n-1} \to \mathrm{L}, \quad f \in \mathrm{L}.$$

Линейное ФДУ на конечном отрезке

$$(\mathcal{L}_0 x)(t) = (Tx)(t) + f(t), \quad t \in [a, b],$$

$$(\mathcal{L}_0 x)(t) = x^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} p_i(t) x^{(i)}(t), \quad t \in [a, b], \ p_i \in \mathrm{L}[a, b].$$

$T : \mathrm{C}[a, b] \to \mathrm{L}[a, b]$ — линейный ограниченный оператор,

$$\left((\mathcal{L}_0 x)(t) = \sum_{i=0}^{n-1} (T_i x^{(i)})(t) + f(t), \quad t \in [a, b] \right)$$

Краевая задача

Объект — линейная краевая задача для ФДУ на конечном отрезке

$$\begin{cases} (\mathcal{L}_0 x)(t) = (Tx)(t) + f(t), & \text{при п.в. } t \in [a,b], \\ \ell_i x = \alpha_i, \quad i = 1, \dots, n, \end{cases}$$

$T : \mathrm{C}[a,b] \to \mathrm{L}[a,b]$ — линейный ограниченный оператор,

$$(\mathcal{L}_0 x)(t) = x^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} p_i(t) x^{(i)}(t), \quad t \in [a,b], \ p_i \in \mathrm{L}[a,b],$$

$\ell_i : \mathrm{AC}[a,b] \to \mathbb{R}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$,
$x \in \mathrm{AC}^{n-1}[a,b]$

Цели

Цель – качественное исследование

Задачи:

1. условия существования и единственности решений,
2. условия существования знакопостоянного решения,
3. оценки решений.

Основная идея

Мы не знаем точных решений исследуемых ФДУ и краевых задач, мы не можем точно решить поставленные три задачи для каждого конкретного уравнения.

Но, оказывается, мы можем точно решить эти задачи для некоторых семейств уравнений.

Работы по краевым задачам для функционально-дифференциальных уравнений

А.Д. Мышкис, Н.В. Азбелев, В.П. Максимов,
Л.Ф. Рахматуллина, И.Т. Кигурадзе, Дж. Хейл, Р.П. Агарвал
А.И. Булгаков, С.А. Брыкалов, В.В. Власов, В.Я. Дерр,
Ю.Ф. Долгий, Г.Г. Исламов, Е.С. Жуковский, С.М. Лабовский,
В.И. Максимов, В.Г. Пименов, А.Н. Сесекин,
А.Л. Скубачевский, Е.Л. Тонков, А.В. Чистяков

Скалярное ФДУ

$$x^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} (T_i x^{(i)})(t) + f(t), \quad t \in [a, b], \tag{10}$$

$x \in \mathrm{AC}^{n-1}[a, b], \quad f \in \mathrm{L}[a, b],$

$T_i : \mathrm{C}[a, b] \to \mathrm{L}[a, b]$ — линейные ограниченные операторы

Система ФДУ

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (T_{11}x)(t) + (T_{12}y)(t) + f_1(t), & t \in [a, b], \\ \dot{y}(t) = (T_{21}x)(t) + (T_{22}y)(t) + f_2(t), & t \in [a, b], \end{cases} \tag{11}$$

$(x, y) \in \mathrm{AC}[a, b] \times \mathrm{AC}[a, b], f_i \in \mathrm{L}[a, b], T_{ij} : \mathrm{C}[a, b] \to \mathrm{L}[a, b],$

T_{ij} — линейные ограниченные операторы

Сосредоточенное отклонение и линейные операторы

$$\begin{aligned} &x^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} p_i(t)x^{(i)}(h_i(t)) + f(t), \quad t \in [a,b], \\ &x^{(i)}(\zeta) = \varphi_i(\zeta), \quad \zeta \notin [a,b], \end{aligned} \tag{12}$$

Замена локального оператора Немыцкого на нелокальный оператор внутренней суперпозиции

$$(S_h x)(t) = \begin{cases} p(t)x(h(t)), & h(t) \in [a,b], \\ 0, & h(t) \notin [a,b], \end{cases} \tag{13}$$

$$p \in \mathrm{L}[a,b],\ S_h : \mathrm{C}[a,b] \to \mathrm{L}[a,b] \text{ — линейный оператор,} \tag{14}$$

$$p(t)x(h(t)) = (S_h x)(t) + \begin{cases} 0, & h(t) \in [a,b], \\ p(t)x(h(t)), & h(t) \notin [a,b] \end{cases} \tag{15}$$

Краевая задача для скалярного ФДУ

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} (T_i x^{(i)})(t) + f(t), \quad t \in [a,b], \\ \ell_i x = \alpha_i, \quad i = 1, \dots, n, \end{cases} \tag{16}$$

$\alpha_i \in \mathbb{R}, \quad f \in \mathrm{L}[a,b],$

$\ell_i : \mathrm{AC}^{n-1}[a,b] \to \mathbb{R}$ — линейные ограниченные функционалы

Краевая задача для системы ФДУ

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (T_{11}x)(t) + (T_{12}y)(t) + f_1(t), \quad t \in [a,b], \\ \dot{y}(t) = (T_{21}x)(t) + (T_{22}y)(t) + f_2(t), \quad t \in [a,b], \\ \ell_1(x,y) = \alpha_1, \quad \ell_2(x,y) = \alpha_2, \end{cases} \tag{17}$$

$\alpha_i \in \mathbb{R}, \quad f_i \in \mathrm{L}[a,b], \quad \ell_i(x,y) : \mathrm{AC}[a,b] \times \mathrm{AC}[a,b] \to \mathbb{R}$

— линейные ограниченные функционалы

Фредгольмовость

Общая линейная краевая задача фредгольмова

$$\mathcal{L}x \equiv x^{(n)} - \sum_{i=0}^{n-1}(T_i^+ - T_i^-)x^{(i)} = f, \tag{26}$$

$$\ell x = \alpha, \tag{27}$$

$\alpha \in \mathbb{R}^n$, $f \in \mathrm{L}[a,b]$, $x \in \mathrm{AC}^{n-1}$, $\ell : \mathrm{AC}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$,
T_i^+, T_i^- : $\mathrm{C}[a,b] \to \mathrm{L}[a,b]$ — линейные ограниченные операторы (положительные)

Однородная задача

$$\begin{cases} \mathcal{L}x = f, \\ \ell x = \alpha, \end{cases} \quad \text{О.Р.} \Leftrightarrow \tag{28}$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}x = 0, \\ \ell x = 0 \end{cases} \quad \text{имеет только тривиальное решение} \tag{29}$$

Разрешимость. Известные подходы

Вольтерровость

Задача Коши при вольтерровых операторах T_{ij} однозначно разрешима.

Необходимое и достаточное условие однозначной разрешимости

$$\begin{vmatrix} \ell_1 Z_1 & \ell_1 Z_2 \\ \ell_2 Z_1 & \ell_2 Z_2 \end{vmatrix} \neq 0, \tag{30}$$

$Z_1 = (x_1, y_1)$, $Z_2 = (x_2, y_2)$ — двумерная фундаментальная система решений однородной задачи.

Известные подходы. 2

Достаточная близость к однозначно разрешимой задаче

$$\rho(B_0^{-1}B - I) < 1 \quad (\| B_0 - B\| < 1/\| B_0^{-1}\|) \tag{31}$$

$B_0 Z = g$ однозначно разрешима $\Rightarrow$ $BZ = g$ однозначно разрешима

Известные подходы. 3

Оценка спектрального радиуса

$$\mathcal{L}x = f, \quad \ell x = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad (32)$$

$$x(t) = (Ax)(t) + g(t) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i(t), \quad t \in [a, b], \ A : \mathrm{C} \to \mathrm{C} \qquad (32)$$

$$\rho(A) < 1 \Rightarrow \ \exists\,!\ x\ (32), \text{ краевая задача О.Р.} \qquad (33)$$

$$A \geqslant 0 \Rightarrow \big(\rho(A) < 1 \Leftrightarrow \{\forall g \geqslant 0, \ \alpha_i = 0\ \exists\,!\ x \geqslant 0\}\big) \qquad (34)$$

$$A \geqslant 0 \Rightarrow \big(\rho(A) < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{\forall g \in \mathrm{C}[a, b], \ \forall\ \widetilde{A} \leqslant A\ \exists\,!\ x = \widetilde{A}x + g\}\big) \qquad (35)$$

$$A \ngeqslant 0 \Rightarrow \big(\rho(A) < 1 \text{ не является необходимым условием } (35)\big) \qquad (36)$$

Известные подходы. 4

Априорные оценки решений.

Новое направление: построение априорных оценок, учитывающих знаковые особенности операторов

И. Кигурадзе, А. Ломтатидзе, С. Мухигулашвили, Р. Хакл, Б. Пужа, Ю. Шремр и др. для скалярных уравнений — 1995-2016 годы.
Ю.Шремр, С. Мухигулашвили — задача Коши и периодическая задача для некоторых систем. Иногда получены необходимые и достаточные условия разрешимости краевых задач для семейств уравнений с операторами с заданными нормами.

Результаты — условия на нормы, обеспечивающие разрешимость.

Семейства ФДУ с регулярными операторами

Операторы с заданными нормами

$$x^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} (T_i x^{(i)})(t) + f(t), \quad t \in [a, b] \tag{37}$$

T_i регулярны

$$T_i = T_i^+ - T_i^-, \quad T_i^{+/-} : \mathrm{C}[a, b] \to \mathrm{L}[a, b], \quad T_i^{+/-} \geqslant 0 \tag{38}$$

$$\| T_i^{+/-} \|_{\mathrm{C} \to \mathrm{L}} = \int_a^b (T_i^{+/-} 1)(t)\, dt \equiv \mathcal{T}_i^{+/-} \tag{39}$$

Общий вид линейного положительного оператора

из $C[a,b]$ в $L[a,b]$

$$(T^+x)(t) = \int_a^b x(s)d_s r(t,s), \tag{40}$$

при почти всех $t \in [a,b]$ функция $r(t,s)$ — не убывает по s на отрезке $[a,b]$, функция $r(t,b) - r(t,a)$, $t \in [a,b]$, суммируема, а интеграл в (40) понимается в смысле Римана-Сти́льтьеса.

Сосредоточенное отклонение аргумента

Если $(Tx)(t) = p(t)x(h(t))$, $t \in [a,b]$, $h : [a,b] \to [a,b]$ — измеримая функция, $p \in L[a,b]$, то
$Tx = T^+x - T^-x$,

$$(T^+x) = p^+(t)x(h(t)), \quad (T^-x)(t) = p^-(t)x(h(t)), \quad t \in [a,b],$$

$T^+, T^- : C[a,b] \to L[a,b]$ — линейные ограниченные операторы

Первые работы по разрешимости задач для уравнений с неположительными операторами

Априорные оценки

I. Kiguradze, A. Lomtatidze, S. Mukhigulashvili (FDEs), A. Lasota, Z. Opial (ODEs)

Lomtatidze A., Mukhigulashvili S.
On periodic solutions of second order functional differential equations
Mem. Differential Equations Math. Phys. V. 5. 1995. P. 125–126.

Lomtatidze A., Mukhigulashvili S.
On a two-point boundary value problem for second order functional differential equations. I, II
Mem. Differential Equations Math. Phys. V. 10. 1997. P. 125–128, 150–152.

Lasota A., Opial Z.
Sur les solutions périodiques des équations différentielles ordinaires.
Ann. Polon. Math. V. 16. 1964. P. 69–94.

Теорема

Задача Дирихле

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = (Tx)(t) + f(t), \quad t \in [a, b], \\ x(a) = 0, \quad x(b) = 0, \end{cases} \tag{41}$$

имеет единственное решение при всех $f \in \mathrm{L}[a, b]$, если оператор $T : \mathrm{C} \to \mathrm{L}$ положителен и

$$\| T \|_{\mathrm{C} \to \mathrm{L}} \leqslant \frac{16}{b - a}.$$

Если $T \geqslant 0$, то $\| T \|_{\mathrm{C} \to \mathrm{L}} = \int_a^b (T1)(s)\, ds$.
Условие сжатия дает оценку

$$\| T \|_{\mathrm{C} \to \mathrm{L}} \leqslant \frac{4}{b - a}.$$

Теорема

Периодическая задача

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = (Tx)(t) + f(t), \quad t \in [a, b], \\ x(a) = x(b), \quad \dot{x}(a) = \dot{x}(b), \end{cases} \tag{42}$$

имеет единственное решение при всех $f \in \mathrm{L}[a, b]$, если оператор $T : \mathrm{C} \to \mathrm{L}$ положителен и

$$0 < \| T\|_{\mathrm{C}\to\mathrm{L}} \leqslant \frac{16}{b-a}.$$

Если $T \geqslant 0$, то $\| T\|_{\mathrm{C}\to\mathrm{L}} = \int_a^b (T1)(s)\, ds$.
Условие сжатия дает условие разрешимости

$$0 < \| T\|_{\mathrm{C}\to\mathrm{L}} \leqslant \frac{4}{b-a}.$$

Трудности

Уравнения с промежуточными производными

$$\begin{cases} x^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} T_i^+ x^{(i)} - \sum_{i=0}^{n-1} T_i^- x^{(i)} + f, \\ \ell_i x = \alpha_i, \quad i = 1, \dots, n, \end{cases} \tag{43}$$

Сингулярные уравнения

$$\begin{cases} \mu x^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} T_i^+ x^{(i)} - \sum_{i=0}^{n-1} T_i^- x^{(i)} + f, \quad t \in [a, b], \\ \ell_i x = \alpha_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad \mu(t) = (t-a)^{\mu_1}(b-t)^{\mu_2} \end{cases} \tag{44}$$

Краевые задачи для систем

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (T_{11}x)(t) + (T_{12}y)(t) + f_1(t), \quad t \in [a, b], \\ \dot{y}(t) = (T_{21}x)(t) + (T_{22}y)(t) + f_2(t), \quad t \in [a, b], \\ \ell_1(x, y) = \alpha_1, \quad \ell_2(x, y) = \alpha_2. \\ T_{ij} = T_{ij}^+ - T_{ij}^-, \quad i, j = 1, 2, \quad T_{ij}^+, T_{ij}^- : \mathrm{C} \to \mathrm{L}, \ T_{ij}^+, T_{ij}^- \geqslant 0, \\ f_1, f_2 \in \mathrm{L}, \ \ell_1, \ell_2 : \mathrm{D} \to \mathbb{R}, \ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{45}$$

Трудности. II

Другие нормы

$$T : \mathrm{C}[a, b] \to \mathrm{L}_\infty[a, b]$$

Если $T \geqslant 0$, то $\| T \|_{\mathrm{C}[a,b] \to \mathrm{L}_\infty[a,b]} = \operatorname{vrai\,sup}_{t \in [a,b]} (T1)(t)$.

Другие семейства уравнений

$$T^+ 1 = p^+, \quad T^- 1 = p^-$$

Семейства уравнений I

$T : \mathrm{C}[a,b] \to \mathrm{L}[a,b]$ — линейный ограниченный оператор, Если $(Tx)(t) \geqslant 0$ при п.в. $t \in [a,b]$ $\forall\, x \in \mathrm{C}[a,b]$, что $x(s) \geqslant 0$ $\forall$ $s \in [a,b]$, то T называется положительным оператор, $T \geqslant 0$

Семейства регулярных операторов

Заданы неотрицательные функции p^+, $p^- \in \mathrm{L}[a,b]$, неотрицательные числа $\mathcal{P}^+$, $\mathcal{P}^- \in \mathbb{R}$.

$$\mathbb{S}(p^+, p^-) \equiv \left\{ T = T^+ - T^- : \; T^+, T^- \geqslant 0, \quad T^+1 = p^+, \quad T^-1 = p^- \right\},$$

$(T^+u = p^+, \quad T^-v = p^-,\ u, v \in \mathrm{C}[a,b],\ u \geqslant 0,\ v \geqslant 0)$

Семейства уравнений II

$$\mathsf{S}_1(\mathcal{P}^+,\mathcal{P}^-) = \bigcup_{\substack{\|p^+\|_{\mathsf{L}_1}=\mathcal{P}^+,\ p^+\geqslant 0,\\ \|p^-\|_{\mathsf{L}_1}=\mathcal{P}^-,\ p^-\geqslant 0}} \mathbb{S}(p^+,p^-),$$

$$\mathsf{S}_\infty(\mathcal{P}^+,\mathcal{P}^-) = \bigcup_{\substack{\|p^+\|_{\mathsf{L}_\infty}=\mathcal{P}^+,\ p^+\geqslant 0,\\ \|p^-\|_{\mathsf{L}_\infty}=\mathcal{P}^-,\ p^-\geqslant 0}} \mathbb{S}(p^+,p^-).$$

Переход к конечномерным операторам. 1

Если $x \in \mathrm{AC}[a,b]$ — решение, $T \in \mathbb{S}(p^+, 0)$,

то существует конечномерное представление для Tx:

$$x(\tau_1) = \min_{\tau\in[a,b]} x(\tau) \leqslant x(t) \leqslant \max_{\tau\in[a,b]} x(\tau) = x(\tau_2),$$

$$p^+(t)x(\tau_1) = (T1)(t)x(\tau_1) \leqslant (Tx)(t) \leqslant$$
$$\leqslant (T1)(t)x(\tau_2) = p^+(t)x(\tau_2)$$

$$(Tx)(t) = p^+(t)\xi(t)x(\tau_1) + p^+(t)(1-\xi(t))x(\tau_2), \ \ t \in [a,b],$$
$$\xi(t) \in [0,1],$$

$$(Tx)(t) = p_1(t)x(\tau_1) + p_2(t)x(\tau_2), \ \ t \in [a,b],$$
$$p_1 + p_2 = p^+, \ \ p_1, p_2 \geqslant 0, \ \ p_1, p_2 \in \mathrm{L}[a,b].$$

Переход к конечномерным операторам. 2

Если $x \in AC[a,b]$ — решение, $T \in \mathbb{S}(p^+, p^-)$,

$$p^+(t)x(\tau_1) \leqslant (T^+x)(t) \leqslant p^+(t)x(\tau_2), \ t \in [a,b],$$
$$p^-(t)x(\tau_1) \leqslant (T^-x)(t) \leqslant p^-(t)x(\tau_2), \ t \in [a,b],$$
$$p^+(t)x(\tau_1) - p^-(t)x(\tau_2) \leqslant (T^+x)(t) - (T^-x)(t) \leqslant$$
$$\leqslant p^+(t)x(\tau_2) - p^-(t)x(\tau_1), \ t \in [a,b],$$

$$(T^+x)(t) - (T^-x)(t) = (p^+(t)x(\tau_1) - p^-(t)x(\tau_2))\xi(t) +$$
$$+(p^+(t)x(\tau_2) - p^-(t)x(\tau_1))(1-\xi(t)) =$$
$$= ((p^+(t)\xi(t) - p^-(t)(1-\xi(t)))x(t_1) +$$
$$+((p^+(t)(1-\xi(t)) - p^-(t)(1-\xi(t)))x(t_2)$$

$$(Tx)(t) = p_1(t)x(\tau_1) + p_2(t)x(\tau_2), \ t \in [a,b],$$
$$p_1 + p_2 = p^+, \ -p^- \leqslant p_i \leqslant p^+, \ i = 1,2, \ p_1, p_2 \in \mathrm{L}[a,b].$$

Переход к конечномерным операторам. 3

Пусть $x \in \mathrm{C}[a,b]$, $T \in \mathbb{S}(p^+, p^-)$, $T = T^+ - T^-$,
$T^+, T^- : \mathrm{C}[a,b] \to \mathrm{L}[a,b]$, $T^{+/-} \geqslant 0$, $T^+1 = p^+$, $T^-1 = p^-$.

Тогда существуют

1. точки $\tau_1, \tau_2 \in [a,b]$,
2. функции $p_1, p_2 \in L[a,b]$,

$$p_1 + p_2 = p^+ - p^-, \quad -p^- \leqslant p_i \leqslant p^+, \quad i = 1, 2,$$

такие что

$$(Tx)(t) = p_1(t)\,x(\tau_1) + p_2(t)\,x(\tau_2), \quad t \in [a,b].$$

Вместо исходной краевой задачи $x^{(n)} = Tx + f$, $\ell x = \alpha$ рассматриваются конечномерные задачи

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) = p_1(t)x(\tau_1) + p_2(t)x(\tau_2) + f(t), \quad t \in [a, b], \\ \ell_i x = \alpha_i, \quad i = 1, \dots, n, \end{cases} \tag{48}$$

при всех

$$\tau_1, \tau_2 \in [a, b], \ p_1, p_2 \in \mathrm{L}[a, b], \ p^-, p^+ \in \mathrm{L}[a, b] : \\ p_1 + p_2 = p^+ - p^-, \quad -p^- \leqslant p_i \leqslant p^+, \quad p^+, p^- \geqslant 0.$$

Основные задачи для (48) $\Leftrightarrow$ задаче конечномерной оптимизации

Задача Коши для немонотонных операторов

Теорема

Для того чтобы задача Коши

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (T^+x)(t) - (Tx)(t) + f(t), \quad t \in [a, b], \\ x(a) = \alpha \end{cases}$$

была О.Р. при всех линейных положительных операторах T^+, $T^- : \mathrm{C} \to \mathrm{L}$ с нормами

$$\| T^+\|_{\mathrm{C}\to\mathrm{L}} = \mathcal{T}^+, \quad \| T^-\|_{\mathrm{C}\to\mathrm{L}} = \mathcal{T}^-$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathcal{T}^- < 1 + 2\sqrt{1 - \mathcal{T}^+}.$$

Задача Дирихле для немонотонных операторов

Теорема

Пусть заданы неотрицательные числа $\mathcal{T}^+$, $\mathcal{T}^-$.
Краевая задача

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = (T^+x)(t) - (T^-x)(t) + f(t), \quad t \in [a, b], \\ x(a) = \alpha_1, \quad x(b) = \alpha_2, \end{cases}$$

однозначно разрешима при всех таких линейных положительных операторах $T^+, T^- : \mathrm{C} \to \mathrm{L}$, что $\| T^+ \| \leqslant \mathcal{T}^+$, $\| T^- \| \leqslant \mathcal{T}^-$, тогда и только тогда, когда выполнены неравенства

$$\mathcal{T}^- \leqslant \frac{4}{b-a}, \qquad \mathcal{T}^+ \leqslant \frac{8}{b-a}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{(b-a)\,\mathcal{T}^-}{4}}\right).$$

Задача Дирихле для сингулярных уравнений с немонотонными операторами

Теорема

Заданы $\mathcal{T}^+$, $\mathcal{T}^-$. Краевая задача

$$\begin{cases} (t-a)(b-t)\ddot{x}(t) = (T^+x)(t) - (T^-x)(t) + f(t), \quad t \in [a,b], \\ x(a) = \alpha_1, \quad x(b) = \alpha_2, \end{cases}$$

О.Р. в специальном пространстве при всех положительных $T^+, T^- : \mathrm{C} \to \mathrm{L}$, $\| T^+ \| \leqslant \mathcal{T}^+$, $\| T^- \| \leqslant \mathcal{T}^-$,

$\Leftrightarrow$

$$\mathcal{T}^- \leqslant b-a, \qquad \mathcal{T}^+ \leqslant 2(b-a)\sqrt{1-\frac{\mathcal{T}^-}{b-a}}.$$

Задача Коши для уравнения второго порядка

Теорема

Пусть заданы неотрицательные числа $\mathcal{T}^+$, $\mathcal{T}^-$.
Задача Коши

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = (T^+x)(t) - (T^-x)(t) + f(t), \quad t \in [a,b], \\ x(a) = \alpha_1, \quad \dot{x}(a) = \alpha_2, \end{cases}$$

однозначно разрешима при всех таких линейных положительных операторах $T^+, T^- : \mathrm{C} \to \mathrm{L}$, что $\| T^+ \| \leqslant \mathcal{T}^+$, $\| T^- \| \leqslant \mathcal{T}^-$, тогда и только тогда, когда выполнены неравенства

$$\mathcal{T}^+ \leqslant \frac{1}{b-a}, \quad \mathcal{T}^- \leqslant \frac{1}{b-a} \min_{t \in [1/2,1)} \frac{1 + 2\sqrt{t(1-t)(1-\mathcal{T}^+(b-a)\,t)}}{t\,(1-t)}.$$

Следствие

Достаточное условие

$$\mathcal{T}^+ \leqslant \frac{1}{b-a}, \quad \mathcal{T}^- \leqslant \frac{1}{b-a}(4 + 2\sqrt{4 - 3\,\mathcal{T}^+(b-a)}).$$

Периодическая задача с промежуточными производными

Пусть заданы $\mathcal{T}^+$, $\mathcal{T}^-$, $\mathcal{Q}^+$, $\mathcal{Q}^- \geqslant 0$, $\mathcal{T}^+ > \mathcal{T}^-$.
Задача

$$\begin{aligned}
&\ddot{x}(t) = (T^+x)(t) - (T^-x)(t) + (Q^+\dot{x})(t) - (Q^-\dot{x})(t) + f(t),\\
&t \in [0,1],\\
&x(0) - x(1) = \alpha_1, \quad \dot{x}(0) - \dot{x}(1) = \alpha_2,
\end{aligned}$$

однозначно разрешима $\forall$ линейных положительных T^+, T^-, Q^+, $Q^- : \mathrm{C} \to \mathrm{L}$,

$$\| T^+\| = \mathcal{T}^+, \ \| T^-\| = \mathcal{T}^-, \ \| Q^+\| \leqslant \mathcal{Q}^+, \ \| Q^-\| \leqslant \mathcal{Q}^-, \tag{49}$$

iff для всех $t \in [0,1]$ и $p \in [0, \mathcal{T}^+]$ выполнены неравенства:

Скалярные уравнения

$$p(\mathcal{T}^+ - p)\,t^2 + (p(p - \mathcal{T}^+) + p(\mathcal{Q}^+ - \mathcal{Q}^-) + \mathcal{T}^+\mathcal{Q}^- - \mathcal{T}^-\mathcal{Q}^+)\,t + \\ + p(\mathcal{Q}^- - \mathcal{Q}^+) + \mathcal{T}^-\mathcal{Q}^+ - \mathcal{T}^+\mathcal{Q}^- + \mathcal{T}^+ - \mathcal{T}^- \geqslant 0,$$

$$p(\mathcal{T}^+ - p)\,t^2 + (p(p - \mathcal{T}^+) + (\mathcal{T}^+ - p)(\mathcal{Q}^- - \mathcal{Q}^+))\,t - \\ - (\mathcal{T}^+ - p)\mathcal{Q}^- + \mathcal{T}^+ - \mathcal{T}^- \geqslant 0,$$

$$p(\mathcal{T}^+ - p)\,t^2 + (p(p - \mathcal{T}^+) + (\mathcal{T}^- - p)(\mathcal{Q}^- - \mathcal{Q}^+))\,t + \\ + (\mathcal{T}^- - p)\mathcal{Q}^+ + \mathcal{T}^+ - \mathcal{T}^- \geqslant 0,$$

$$p(\mathcal{T}^+ - p)\,t^2 + (p(p - \mathcal{T}^+) + p(\mathcal{Q}^+ - \mathcal{Q}^-) + \mathcal{Q}^-\mathcal{T}^- - \mathcal{Q}^+\mathcal{T}^+)\,t + \\ + \mathcal{T}^+ - \mathcal{T}^- \geqslant 0,$$

Скалярные уравнения

$$p(\mathcal{T}^+ - p)\,t^2 + (p(p - \mathcal{T}^+) + p(\mathcal{Q}^+ - \mathcal{Q}^-) + \mathcal{Q}^-(\mathcal{T}^+ - \mathcal{T}^-))\,t + \\ + p(\mathcal{Q}^- - \mathcal{Q}^+) + (\mathcal{T}^+ - \mathcal{T}^-)(1 - \mathcal{Q}^-) \geqslant 0,$$

$$p(\mathcal{T}^+ - p)\,t^2 + (p(p - \mathcal{T}^+) + (\mathcal{T}^+ - \mathcal{T}^- - p)(\mathcal{Q}^- - \mathcal{Q}^+))\,t + \\ + p\mathcal{Q}^- + (\mathcal{T}^+ - \mathcal{T}^-)\,(1 - \mathcal{Q}^-) \geqslant 0,$$

$$p(\mathcal{T}^+ - p)\,t^2 + (p(p - \mathcal{T}^+) - p(\mathcal{Q}^- - \mathcal{Q}^+))\,t + \\ + \mathcal{T}^+ - \mathcal{T}^- - p\mathcal{Q}^+ \geqslant 0,$$

$$p(\mathcal{T}^+ - p)\,t^2 + (p(p - \mathcal{T}^+) - p(\mathcal{Q}^- - \mathcal{Q}^+) + \mathcal{Q}^+(\mathcal{T}^- - \mathcal{T}^+))\,t + \\ + \mathcal{T}^+ - \mathcal{T}^- \geqslant 0.$$

Периодическая задача с промежуточными производными. II

Пусть заданы числа $\mathcal{T}^+ \geqslant 0$, $q \geqslant 0$. Задача

$$\ddot{x}(t) = (T^+x)(t) + (Q\dot{x})(t) + f(t), \quad t \in [0,1],$$
$$x(0) - x(1) = \alpha_1, \quad \dot{x}(0) - \dot{x}(1) = \alpha_2,$$

однозначно разрешима $\forall$ линейных положительных $T^+ : \mathrm{C} \to \mathrm{L}$ и монотонных $Q : \mathrm{C} \to \mathrm{L}$,

$$\| T^+ \| = \mathcal{T}^+, \ \| Q \| \leqslant q$$

iff

$$q \leqslant 1, \quad 0 < \mathcal{T}^+ \leqslant \min_{t \in (0,1)} \frac{(1 + \sqrt{1 - q\,t})^2}{t\,(1-t)}.$$

Если $q = 0$, то $\mathcal{T}^+ \leqslant 16$; если $q = 1$, то $\mathcal{T}^+ \leqslant (11 + 5\sqrt{5})/2$.

Периодическая задача с промежуточными производными. III

Пусть заданы числа $\mathcal{T}^+ \geqslant 0$, $q \geqslant 0$.

Периодическая задача

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = (T^+x)(t) + (Q^+\dot{x})(t) - (Q^-\dot{x})(t) + f(t), \quad t \in [0,1], \\ x(0) - x(1) = \alpha_1, \quad \dot{x}(0) - \dot{x}(1) = \alpha_2, \end{cases}$$

однозначно разрешима $\forall$ линейных положительных $T^+, Q^+, Q^- : \mathrm{C} \to \mathrm{L}$,

$$\| T^+ \| = \mathcal{T}^+, \ \| Q^+ \| \leqslant q, \ \| Q^- \| \leqslant q, \tag{50}$$

iff

$$q \leqslant 1, \quad 0 < \mathcal{T}^+ \leqslant 4\,(1 + \sqrt{1-q})^2.$$

Задача Дирихле с оператором $T : \mathrm{C} \to \mathrm{L}_\infty$

Задача Дирихле с оператором $T : \mathrm{C} \to \mathrm{L}_\infty$

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = (Tx)(t) + f(t), & t \in [a, b], \\ x(a) = 0, \quad x(b) = 0, \end{cases}$$

имеет единственное решение при всех $f \in \mathrm{L}[a, b]$, если оператор $T : \mathrm{C}[a, b] \to \mathrm{L}_\infty[a, b]$ положителен и

$$\| T \|_{\mathrm{C}[a,b] \to \mathrm{L}_\infty[a,b]} < \frac{32}{(b-a)^2}.$$

Если $T \geqslant 0$, то $\| T \|_{\mathrm{C}[a,b] \to \mathrm{L}_\infty[a,b]} = \operatorname{vrai\,sup}_{t \in [a,b]} (T1)(t)$.
Условие сжатия дает условие разрешимости

$$\| T \|_{\mathrm{C}[a,b] \to \mathrm{L}_\infty[a,b]} < \frac{8}{(b-a)^2}.$$

Периодическая задача с оператором $T : \mathrm{C} \to \mathrm{L}_\infty$

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = (Tx)(t) + f(t), \quad t \in [a, b], \\ x(a) = x(b), \quad \dot{x}(a) = \dot{x}(b), \end{cases}$$

имеет единственное решение при всех $f \in \mathrm{L}[a, b]$, если оператор $T : \mathrm{C}[a, b] \to \mathrm{L}_\infty[a, b]$ положителен и

$$0 < \| T\|_{\mathrm{C}[a,b]\to\mathrm{L}_\infty[a,b]} < \frac{32}{(b-a)^2}.$$

Если $T \geqslant 0$, то $\| T\|_{\mathrm{C}[a,b]\to\mathrm{L}_\infty[a,b]} = \operatorname{vrai\,sup}_{t\in[a,b]}(T1\,)(t)$.
Условие сжатия дает условие разрешимости

$$0 < \| T\|_{\mathrm{C}[a,b]\to\mathrm{L}_\infty[a,b]} < \frac{8}{(b-a)^2}.$$

Несингулярная задача Коши для n-го порядка.I

Теорема

Пусть задано неотрицательное число $\mathcal{T}^-$.
При $n \geqslant 2$ задача Коши

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) = -(T^- x)(t) + f(t), & t \in [a, b], \\ x^{(i)}(a) = \alpha_i, & i = 0, 1, \ldots, n-1, \end{cases}$$

О.Р. при всех линейных положительных операторах
$T^- : \mathrm{C} \to \mathrm{L}$, $\| T^- \| \leqslant \mathcal{T}^-$,
$\Leftrightarrow$

$$\mathcal{T}^- \leqslant \frac{(n-1)!}{(b-a)^{n-1}} \left(\min_{y \in (0,1]} \frac{((1+y)^{n-1}+1)^2}{1-(1-y^2)^{n-1}} - 1 \right) \equiv \mathcal{T}_n^- .$$

Несингулярная задача Коши для n-го порядка. II

Поведение при больших n

$$\frac{\mathcal{T}_n^-(b-a)^{n-1}}{n!} \uparrow k_0^2 \approx 12.9,$$

где k_0 — решение уравнения $1 + k_0 = k_0 \ln k_0$.

Несингулярная задача Коши для n-го порядка.III

Теорема для положительных операторов — принцип сжатия

Пусть задано неотрицательное число $\mathcal{T}^+$.
При $n \geqslant 2$ задача Коши

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) = (T^+x)(t) + f(t), & t \in [a,b], \\ x^{(i)}(a) = \alpha_i, & i = 0, 1, \ldots, n-1, \end{cases}$$

О.Р. при всех линейных положительных операторах
$T^+ : C \to L$, $\| T^+ \| \leqslant \mathcal{T}^+$,
$\Leftrightarrow$

$$\mathcal{T}^+ \leqslant \frac{(n-1)!}{(b-a)^{n-1}} \equiv \mathcal{T}_n^+, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\mathcal{T}_n^-}{n\mathcal{T}_n^+} = k_0^2.$$

Задача Коши с поточечными ограничениями. I

Теорема

Задача Коши

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = p(t)x(h(t)) - m(t)x(g(t)) + f(t), \quad t \in [0,1], \\ x(0) = \alpha_0, \quad \dot{x}(0) = \alpha_1, \end{cases}$$

О.Р. при всех неотрицательных m, $p \in \mathrm{L}$, всех измеримых h, $g : [0,1] \to [0,1]$, если при некоторых P, M

$$p(t)h(t) \leqslant P < 1/2, \quad m(t)g(t) \leqslant M < m_1 \approx 7.4,$$

m_1 — максимальный корень
$64y^6 - 320y^5 - 1168y^4 - 96y^3 + 1212y^2 + 44y + 25 = 0.$
Константы $1/2$ и m_1 нельзя увеличить.

Задача Коши с поточечными ограничениями. II

Теорема

Задача Коши

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = p(t)x(h(t)) - m(t)x(g(t)) + f(t), \quad t \in [0,1], \\ x(0) = \alpha_0, \quad \dot{x}(0) = \alpha_1, \end{cases}$$

О.Р. при всех неотрицательных m, $p \in \mathrm{L}$, всех измеримых h, $g : [0,1] \to [0,1]$, если при некоторых P, M

$$p(t) \leqslant P < 1/2, \quad m(t)g(t) \leqslant M < m_2 \approx 4.5,$$

m_2 — максимальный корень уравнения $y^3 - 2y^2 - 8y + 8 = 0$. Константы $1/2$ и m_2 нельзя увеличить.

Задача Коши с поточечными ограничениями. III

Теорема

Задача Коши

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = p(t)(t - t_0)x(h(t)) + f(t), \quad t \in [0,1], \quad (t_0 \in [0,1]), \\ x(0) = \alpha_0, \quad \dot{x}(0) = \alpha_1, \end{cases}$$

О.Р. при всех неотрицательных $p \in \mathrm{L}$, $p(t) \leqslant P$, $p(t) \not\equiv P$ и всех измеримых $h : [0,1] \to [0,1]$, если $P = 6/(1-t_0)^3$ при $t_0 \leqslant s \approx 0,54$, $4s^3 - 3s^2 + 6s - 3 = 0$, $w_1 P(1 + t_1^2 P/2(t_0 - t_1/3) + (1 - w_2 P)(1 + P/2(t_0 - 1/3) \geqslant 0 \ \forall$ $0 \leqslant t_3 \leqslant t_1 \leqslant t_0$ при $t_0 > s$;

$w_1 = (t_0 - t_3)^2(t_0 + 2t_3 - 3)/6$, $w_2 = (t_1 - t_3)(t_1 + 2t_3 - 3t_0)/6$.
Константу P нельзя увеличить.

Сингулярная задача Коши для n-го порядка

Теорема

Пусть заданы неотрицательные числа $\mathcal{T}^+$, $\mathcal{T}^-$.
При $n \geqslant 2$ задача Коши

$$\begin{cases} (b-t)^{n-1}x^{(n)}(t) = (T^+x)(t) - (T^-x)(t) + f(t), \quad t \in [a,b], \\ x(i)(a) = \alpha_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1, \end{cases}$$

однозначно разрешима при всех линейных положительных операторах T^+, $T^- : \mathrm{C} \to \mathrm{L}$, удовлетворяющих неравенствам $\| T^+ \| \leqslant \mathcal{T}^+$, $\| T^- \| \leqslant \mathcal{T}^-$, тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{T}^+ < (n-1)!, \quad \mathcal{T}^- \leqslant (n-1)! \left(1 + 2\sqrt{1 - \frac{\mathcal{T}^+}{(n-1)!}} \right).$$

Основные работы I

И.Т. Кигурадзе, Т. Кусано
О периодических решениях обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков.
Дифференциальные уравнения, Т. 35, 1, 1999.

R. Hakl, A. Lomtatidze, J. Šremr.
Some boundary value problems for first order scalar functional differential eequations.
Brno: Masaryk University, 2002.

Основные работы II

Р. Хакл, С. Мухигулашвили
О периодических краевых задачах для функционально-дифференциальных уравнений.
Дифференциальные уравнения, Т. 39, 3, 2005.

S. Mukhigulashvili.
On a periodic boundary value problem for third order linear functional differential equations.
Nonlinear Anal. Theory, Methods, Appl., V. 66, 2(A), 2007.

Основные работы III

R. Hakl, S. Mukhigulashvili
A periodic boundary value problem for functional differential equations of higher order.
Georgian Math. J., V. 16, 4. 2009.

И.Т. Кигурадзе
О резонансной периодической задаче для неавтономных дифференциальных уравнений высших порядков.
Дифференциальные уравнения, Т. 44, 8, 2008.

I. Kiguradze, A. Lomtatidze
Periodic solutions of nonautonomous ordinary differential equations.
Monatshefte fur Mathematik, V. 159. 2010.

Основные работы IV

S. Mukhigulashvili, N. Partsvania, B. Puža
On a periodic problem for higher-order differential equations with a deviating argument.
Nonlinear Analysis, V. 74. 2011.

Основное утверждение

Множество однозначной разрешимости

Теорема

Пусть $\mathcal{T}^+ \neq \mathcal{T}^-$. Периодическая задача

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) = (T^+x)(t) - (T^-x)(t) + f(t), \ t \in [0,1], \\ x^{(i)}(0) = x^{(i)}(1), \ i = 1, \dots, n, \end{cases}$$

однозначно разрешима для всех таких положительных операторов $T^+, \ T^- : \mathrm{C} \to \mathrm{L}$, что $\| T^+ \| = \mathcal{T}^+$, $\| T^- \| = \mathcal{T}^-$, тогда и только тогда, когда

$$\frac{Y}{1-Y} \leqslant X \leqslant 2\,(1 + \sqrt{1-Y}),$$

$X = M_n \max(\mathcal{T}^+, \mathcal{T}^-), \ Y = M_n \min(\mathcal{T}^+, \mathcal{T}^-).$

Периодическая задача

Основные результаты

$$M_n = \begin{cases} 2(-1)^m G(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}), \text{ если } n = 2m+1, \\ (-1)^m G(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \text{ если } n = 2m, \end{cases}$$

$G(t,s)$ — функция Грина задачи

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) = f(t), \ t \in [0,1], \\ x(0) = 0, \ x(1) = 0, \ x^{(i)}(0) = x^{(i)}(1), \ i = 1, \dots, n-2. \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_{n+1} t^n = \frac{1}{\cos(t/4)} + \operatorname{tg}(t/4), \quad |t| < 2\pi.$$

$M_1 = 1$, $M_2 = \frac{1}{4}$, $M_3 = \frac{1}{32}$, $M_4 = \frac{1}{192}$, $M_5 = \frac{5}{6144}$, $M_6 = \frac{1}{7680} \cdots$

Периодическая задача

Основные результаты. 2

$$M_n = \begin{cases} (-1)^m \dfrac{E_{n-1}}{4^{n-1}\,(n-1)!}, & n = 2m+1, \\ (-1)^{m+1} 4\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)\dfrac{B_n}{n!}, & n = 2m, \end{cases}$$

B_n — числа Бернулли, E_n — числа Эйлера,

$$M_{2m+1}(2\pi)^{2m+1} \uparrow 8, \quad M_{2m}(2\pi)^{2m} \downarrow 8, \quad \lim_{n\to\infty} M_n(2\pi)^n = 8.$$

$$8\,n\,M_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} M_k M_{n+1-k}, \quad M_1 = 1.$$

Связь с классическими последовательностями

Константы Фавара

$$M_n = \frac{F_{n-1}}{(2\pi)^{n-1}}, \; F_n = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k}{2k+1}\right)^{n+1}, \qquad M_n = \widetilde{F}_{n-1},$$

F_n — константы Ж. Фавара, наилучшие постоянные в неравенстве Бора-Фавара

$$\|x\|_\infty \leqslant F_n \|x^{(n)}\|_\infty,$$

$x^{(n)} \in \mathrm{L}_\infty$, $x^{(i)}(0) = x^{(i)}(2\pi)$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, $\int_0^{2\pi} x(s)\,ds = 0$.

Связь с классическими последовательностями

Константы Стечкина

$$M_n = \frac{4C_{n,\infty}}{(2\pi)^{n-1}} \text{ для четных } n, \quad M_n = 4\widetilde{C}_{n,\infty},$$

$C_{n,\infty}$ — константы С.Б. Стечкина, наилучшие постоянные в неравенстве

$$\|x\|_\infty \leqslant C_{n,\infty} \int_0^{2\pi} |x^{(n)}(s)|\, ds,$$

$x^{(n)} \in \mathrm{L}$, $x^{(i)}(0) = x^{(i)}(2\pi)$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, $\int_0^{2\pi} x(s)\, ds = 0$.

Связь с классическими последовательностями

Up-down перестановки

$$M_{n+2} = \frac{A_n}{4^{n+1}(n+1)!},$$

где A_n число змей или up-down перестановок чисел $\{0, 1, \ldots, n\}$ $(x_0 < x_1 > x_2 < \ldots x_n)$.

Задача с точечными ограничениями. I

Теорема

Пусть $\mathcal{T}^+ \neq \mathcal{T}^-$. Периодическая задача

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) = (T^+x)(t) - (T^-x)(t) + f(t), \ t \in [0,1], \\ x^{(i)}(0) = x^{(i)}(1), \ i = 1, \dots, n, \end{cases}$$

однозначно разрешима для всех таких различных положительных операторов $T^+, T^- : \mathrm{C} \to \mathrm{L}_\infty$, что $\| T^+\| = \mathcal{T}^+$, $\| T^-\| = \mathcal{T}^-$, $T^-1 \leqslant \mathcal{T}^- \leqslant T^+1 \leqslant \mathcal{T}^+$ или $T^+1 \leqslant \mathcal{T}^+ \leqslant T^-1 \leqslant \mathcal{T}^-$

тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{T}^+ + \mathcal{T}^- < \frac{1}{K_n}, \quad \min(\mathcal{T}^+, \mathcal{T}^-) \leqslant \frac{1}{L_n}.$$

Задача с точечными ограничениями. II

Константы K_n и L_n

Определение

$$K_n = M_{n+1},$$

$$L_n = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{m+1}(2^n-1)B_n}{2^{n-1}n!} = M_n/2, \text{ если } n = 2m, \\ \dfrac{2\max\limits_{s\in[0,1]} B_n(s)}{n!}, \text{ если } n \text{ — нечетное число}, \end{cases}$$

Задача с точечными ограничениями. III

Константы K_n и L_n

$$L_{2m} = K_{2m-1}/2, \quad \frac{K_{n-1}}{2} < L_n < \frac{4}{(2\pi)^n}, \ n = 2m+1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_n}{K_n} = \pi, \ \frac{L_1}{K_1} = \frac{L_2}{K_2} = 4,$$

$$L_1 = 1, \ L_2 = \frac{1}{8}, \ L_3 = \frac{\sqrt{3}}{108}, \ L_4 = \frac{1}{384},$$

$$L_n = 2\,\widetilde{C}_{n,\infty}.$$

Резонансная задача I

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) = (T^+x)(t) - (T^-x)(t) + f(t), & t \in [a,b], \\ \ell_i x = \alpha_i, \quad i = 1, \dots, n, \end{cases} \tag{51}$$

- однородная задача имеет одномерное множество решений

$$x(t) = cv(t), \quad t \in [a,b], \quad c \in \mathbb{R},$$

  $v \in \mathrm{AC}^{n-1}$, $v(t) \neq 0 \ \forall \ t \in [a,b]$;
- если $x \in \mathrm{AC}^{n-1}$ и $\ell_i x = 0$, $i = 1, \dots, n$, то

$$\int_a^b x^{(n)}(s)\, ds = 0.$$

$$\ell_n x = x^{(n-1)}(a) - x^{(n-1)}(b)$$

Резонансная задача II

$G(t,s)$ — функция Грина задачи

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) = f(t), \quad t \in [a,b], \\ \ell_i x = 0, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ x(a) = 0, \end{cases}$$

$$x(t) = \int_a^b G(t,s) f(s)\, ds, \quad t \in [a,b].$$

$$M_{t_1,t_2} \equiv \operatorname*{vrai\,sup}_{s\in[a,b]} \left(G(t_1,s) - G(t_2,s)\right),$$

$$m_{t_1,t_2} \equiv \operatorname*{vrai\,inf}_{s\in[a,b]} \left(G(t_1,s) - G(t_2,s)\right),$$

Резонансная задача III

$$\mathcal{M} \equiv \max_{t_1, t_2 \in [a,b]} (M_{t_1,t_2} - m_{t_1,t_2}).$$

Резонансная задача IV

Для краевой задачи или для системы функционалов ℓ_i, $i = 1, \dots, n$, выполнено условие C, если из того, что при некоторых $\widetilde{t}_1$, $\widetilde{t}_2 \in [a, b]$

$$\mathcal{M} = M_{\widetilde{t}_1, \widetilde{t}_2} - m_{\widetilde{t}_1, \widetilde{t}_2}$$

следует, что функция

$$g_{\widetilde{t}_1, \widetilde{t}_2}(s) \equiv G(\widetilde{t}_1, s) - G(\widetilde{t}_2, s), \quad s \in [a, b],$$

может принимать хотя бы одно из значений $M_{\widetilde{t}_1, \widetilde{t}_2}$ и $m_{\widetilde{t}_1, \widetilde{t}_2}$ лишь на множестве нулевой меры.

Теорема

Даны $\mathcal{T}^+ \neq \mathcal{T}^-$. Выполнено условие C. Задача (51) О.Р. $\forall\ T^-$, $T^+ : \mathrm{C} \to \mathrm{L}$,

$$\| T^+ v\| = \mathcal{T}^+,\ \| T^- v\| = \mathcal{T}^-,\ \ T^{+/-} \geqslant 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{Y}{1-Y} \leqslant X \leqslant 2(1+\sqrt{1-Y}),$$

$$X = \mathcal{M}\max(\mathcal{T}^+, \mathcal{T}^-), \quad Y = \mathcal{M}\min(\mathcal{T}^+, \mathcal{T}^-),$$

а если C не выполнено, то

$$\frac{Y}{1-Y} < X < 2(1+\sqrt{1-Y}).$$

Системы двух уравнений с регулярными операторами

Краевые задачи для системы

$$\dot{x}(t) = (T_{11}x)(t) + (T_{12}y)(t) + f_1(t), \quad t \in [a, b], \tag{52}$$
$$\dot{y}(t) = (T_{21}x)(t) + (T_{22}y)(t) + f_2(t), \quad t \in [a, b], \tag{53}$$
$$\ell_1(x, y) = \alpha_1, \quad \ell_2(x, y) = \alpha_2. \tag{54}$$

$x \in \mathrm{AC}[a, b]$, $y \in \mathrm{AC}[a, b]$, $T_{ij} : \mathrm{C}[a, b] \to \mathrm{L}[a, b]$, $f_i \in \mathrm{L}[a, b]$,
$\ell_i : \mathrm{AC} \times \mathrm{AC} \to \mathbb{R}$

Однородная задача для системы

$$\dot{x}(t) = (T_{11}x)(t) + (T_{12}y)(t), \quad t \in [a, b], \tag{55}$$
$$\dot{y}(t) = (T_{21}x)(t) + (T_{22}y)(t), \quad t \in [a, b], \tag{56}$$
$$\ell_1(x, y) = 0, \quad \ell_2(x, y) = 0. \tag{57}$$

Основное утверждение

Лемма

Даны p_{ij}^{+}, $p_{ij}^{-} \in \mathrm{L}$, $p_{ij}^{+/-} \geqslant 0$, $i,j = 1,2$. Задача О.Р. при всех $T_{ij} : \mathrm{C} \to \mathrm{L}$,

$$T_{ij} = T_{ij}^{+} - T_{ij}^{-},\ T_{ij}^{+/-} \geqslant 0,\ \ T_{ij}^{+/-}1 = p_{ij}^{+/-},\ \ i,j = 1,2,$$

$\Leftrightarrow$ задача

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = p_{11*}(t)x(\tau_1) + p_{11}^{*}(t)x(\tau_2) + p_{12*}(t)y(\theta_1) + p_{12}^{*}(t)y(\theta_2), \\ \dot{y}(t) = p_{21*}(t)x(\tau_1) + p_{21}^{*}(t)x(\tau_2) + p_{22*}(t)y(\theta_1) + p_{22}^{*}(t)y(\theta_2), \\ \quad t \in [a,b], \quad \ell_1(x,y) = 0, \quad \ell_2(x,y) = 0, \end{cases}$$

О.Р. при всех τ_1, τ_2, θ_1, $\theta_2 \in [a,b]$, p_{ij*}, $p_{ij}^{*} \in \mathrm{L}$, $i,j = 1,2$,

$$-p_{ij}^{-} \leqslant p_{ij*} \leqslant p_{ij}^{+}, \quad p_{ij*} + p_{ij}^{*} = p_{ij}^{+} - p_{ij}^{-}, \quad i,j = 1,2.$$

Задача Коши I

Теорема

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (T_{11}x)(t) + (T_{12}y)(t) + f_1(t), & t \in [a,b], \\ \dot{y}(t) = (T_{21}x)(t) + (T_{22}y(t) + f_2(t), & t \in [a,b], \\ x(a) = \alpha_1, \quad y(a) = \alpha_2, \end{cases}$$

О.Р. при всех $T_{ij} = T_{ij}^{+} - T_{ij}^{-}$, $T_{ij}^{+/-} \geqslant 0$, $T_{ij}^{+/-} : \mathrm{C} \to \mathrm{L}$, $i, j = 1, 2$,

$$\| T_{11}^{+/-} \| \leqslant a^{+/-}, \ \| T_{12}^{+/-} \| \leqslant c^{+/-},$$
$$\| T_{21}^{+/-} \| \leqslant d^{+/-}, \ \| T_{22}^{+/-} \| \leqslant b^{+/-},$$

$\Leftrightarrow$

Задача Коши II

Теорема (продолжение) $\Leftrightarrow$

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1-a_1^+ & a_1^- & -c_1^+ & c_1^- \\ a_2^- - 1 & 1-a_2^+ & c_2^- & -c_2^+ \\ -d_1^+ & d_1^- & 1-b_1^+ & b_1^- \\ d_2^- & -d_2^+ & b_2^- - 1 & 1-b_2^+ \end{vmatrix} > 0$$

при всех

$$a_1^{+/-} + a_2^{+/-} \leqslant a^{+/-}, \quad b_1^{+/-} + b_2^{+/-} \leqslant b^{+/-},$$
$$c_1^{+/-} + c_2^{+/-} \leqslant c^{+/-}, \quad d_1^{+/-} + d_2^{+/-} \leqslant d^{+/-},$$
$$a_i^{+/-},\ b_i^{+/-}, c_i^{+/-},\ d_i^{+/-} \geqslant 0,\ i = 1, 2.$$

Задача Коши. Монотонные внедиагональные операторы

«Легкие» и «трудные» случаи

Если $c^+c^- = 0$ и $d^+d^- = 0$, то необходимые и достаточные условия разрешимости сводятся к проверке квадратичного неравенства относительно произведения ненулевых c^*d^*.

«Легкие» случаи: $CD < M_1(a^+, a^-, b^+, b^-)$.

Коэффициент при квадратичном слагаемом отрицательный (знак не зависит от $a^{+/-}$, $b^{+/-}$). Минимум всегда на границе. Необходимые и достаточные условия простые, M_1 легко вычисляется.

«Трудные» случаи. $CD < M_2(a^+, a^-, b^+, b^-)$

Коэффициент при квадратичном слагаемом положительный. Минимум может быть внутри рассматриваемой области. Определение необходимых и достаточных условий затруднено, не всегда удается получить аналитическое выражение для M_2.

Задача Коши. Монотонные внедиагональные операторы

«Легкие» случаи. Внедиагональные операторы одного знака

Теорема

$$\begin{cases} \dot{x} = T_{11}x + T_{12}y + f_1, \\ \dot{y} = T_{21}x + T_{22}y + f_2, \\ x(a) = \alpha_1, \quad y(a) = \alpha_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = T_{11}x - T_{12}y + f_1, \\ \dot{y} = -T_{21}x + T_{22}y + f_2, \\ x(a) = \alpha_1, \quad y(a) = \alpha_2, \end{cases}$$

О.Р. для всех $T_{ii} = T_{ii}^{+} - T_{ii}^{-}, \quad T_{11}^{+/-},\ T_{22}^{+/-},\ T_{12},\ T_{21} \geqslant 0,$

$$\| T_{ii}^{+/-} \| = \mathcal{T}_{ii}^{+/-},\ \| T_{12} \| = C,\ \| T_{21} \| = D,$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{T}_{ii}^{+} < 1, \quad \mathcal{T}_{ii}^{-} < 1 + 2\sqrt{1 - \mathcal{T}_{ii}^{+}},\ i = 1, 2,$$

$$CD < (\varphi(\mathcal{T}_{11}^{-}) - \mathcal{T}_{11}^{+})(\varphi(\mathcal{T}_{22}^{-}) - \mathcal{T}_{22}^{+}), \quad \varphi(z) = \begin{cases} 1, & z \leqslant 1, \\ 1 - \frac{(z-1)^2}{4}, & z > 1. \end{cases}$$

Задача Коши. Монотонные внедиагональные операторы

«Трудные» случаи. Внедиагональные операторы разных знаков.

Необходимые и достаточные условия для положительных диагональных операторов

$$\begin{cases} \dot{x} = \quad T_{11}x + T_{12}y + f_1, \\ \dot{y} = -T_{21}x + T_{22}y + f_2, \\ x(a) = \alpha_1, \quad y(a) = \alpha_2, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = T_{11}x - T_{12}y + f_1, \\ \dot{y} = T_{21}x + T_{22}y + f_2, \\ x(a) = \alpha_1, \quad y(a) = \alpha_2, \end{cases}$$

О.Р. при всех $T_{ij} \geqslant 0,\ i,j = 1,2,$

$$\| T_{11}\| \leqslant A, \quad \| T_{12}\| \leqslant C, \quad \| T_{21}\| \leqslant D, \quad \| T_{22}\| \leqslant B,$$

$$\Leftrightarrow \quad A < 1, \quad B < 1, \quad CD < \left(\sqrt[3]{1-A} + \sqrt[3]{1-B}\right)^3.$$

Дост. усл. (Shremr, Hakl, 2005) $CD < 4\sqrt{(1-A)(1-B)} + (\sqrt{1-A} + \sqrt{1-B})^2.$

Периодическая задача

Теорема

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (T_{11}x)(t) + (T_{12}y)(t) + f_1(t), & t \in [a,b], \\ \dot{y}(t) = (T_{21}x)(t) + (T_{22}y(t) + f_2(t), & t \in [a,b], \\ x(a) = x(b), \quad y(a) = y(b), \end{cases}$$

О.Р. при всех $T_{ij} = T_{ij}^{+} - T_{ij}^{-}$, $T_{ij}^{+/-} : \mathrm{C} \to \mathrm{L}$, $T_{ij}^{+/-} \geqslant 0$, $i,j = 1,2$,

$$\| T_{11}^{+/-} \| = a^{+/-}, \ \| T_{12}^{+/-} \| = c^{+/-}, \tag{59}$$

$$\| T_{21}^{+/-} \| = d^{+/-}, \ \| T_{22}^{+/-} \| = b^{+/-}, \tag{60}$$

$\Leftrightarrow$

Периодическая задача

Теорема (продолжение)

$$\triangle \equiv \begin{vmatrix} a^+ - a^- & y_a + x_a & c^+ - c^- & y_c + x_c \\ -(a_1^+ - a_1^-) & 1 - y_a & -(c_1^+ - c_1^-) & -y_c \\ d^+ - d^- & y_d + x_d & b^+ - b^- & y_b + x_b \\ d_1^+ - d_1^- & y_d & b_1^+ - b_1^- & 1 + y_b \end{vmatrix} \neq 0$$

при всех

$$z_1^{+/-} \in [0, z^{+/-}],\ x_z \in [-z^- + z_1^-, z^+ - z_1^+],\ y_z \in [-z_1^-, z_1^+],$$

$z \in \{a, b, c, d\}$.

Необходимые и достаточные условия

Монотонные операторы

Предположения

$$\begin{cases} \dot{x} = T_{11}x + T_{12}y + f_1, \\ \dot{y} = T_{21}x + T_{22}y + f_2, \\ x(a) = x(b), \quad y(a) = y(b), \end{cases}$$

$f_1,\ f_2 \in \mathrm{L}[a,b],\ T_{ij} : \mathrm{C} \to \mathrm{L},\ T_{ij} \geqslant 0,\ i,j = 1,2$

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon_{11}\ T_{11}x + \varepsilon_{12}\ T_{12}y + f_1, \\ \dot{y} = \varepsilon_{21}\ T_{21}x + \varepsilon_{22}\ T_{22}y + f_2, \\ x(a) = x(b), \quad y(a) = y(b), \end{cases}$$

$\varepsilon_{ij} \in \{-1,1\},\ i,j = 1,2,\ \varepsilon_{11}\varepsilon_{12}\varepsilon_{21}\varepsilon_{22} = 1$

Необходимые и достаточные условия

Монотонные операторы

Теорема

$$\begin{cases} \dot{x} = T_{11}x + T_{12}y + f_1, \\ \dot{y} = T_{21}x + T_{22}y + f_2, \\ x(a) = x(b), \quad y(a) = y(b), \end{cases}$$

О.Р. при всех $T_{ij} \geqslant 0$, $i, j = 1, 2$,

$$\| T_{11} \| = A, \quad \| T_{12} \| = C, \quad \| T_{21} \| = D, \quad \| T_{22} \| = B,$$

$\Leftrightarrow$ $0 < A < 4, \quad 0 < B < 4,$

$$C\,D < A\,B \min\left(\frac{1}{1+A}, 1 - \frac{A}{4}\right) \min\left(\frac{1}{1+B}, 1 - \frac{B}{4}\right)$$

или

Необходимые и достаточные условия

Монотонные операторы - 2

Теорема (продолжение)

$\Leftrightarrow\ 0 < A < 4, \quad 0 < B < 4,$

$$C\,D < A\,B\,\min\left(\frac{1}{1+A}, 1-\frac{A}{4}\right)\,\min\left(\frac{1}{1+B}, 1-\frac{B}{4}\right)$$

или

$$0 \leqslant A < 1,\ 0 \leqslant B < 1, \quad \frac{A\,B}{(1-A)\,(1-B)} < C\,D, \tag{61}$$

$$(C\,D)^2\,t^2(1-t)^2 + C\,D\,(A\,t^2 + B\,(1-t)^2 - 1) + A\,B < 0, \tag{62}$$

$t \in [0, 1].$

Необходимые и достаточные условия

Монотонные операторы-3

Теорема

$$\begin{cases} \dot{x} = T_{11}x + T_{12}y + f_1, \\ \dot{y} = T_{21}x + T_{22}y + f_2, \\ x(a) = x(b), \quad y(a) = y(b), \end{cases}$$

О.Р. при всех $T_{ij} \geqslant 0,\ i,j = 1,2,$

$$\| T_{11}\| = A, \quad \| T_{12}\| = C, \quad \| T_{21}\| = D, \quad \| T_{22}\| = A,$$

$\Leftrightarrow 0 < A < 4,\ \sqrt{C\,D} < A \min\left(\frac{1}{1+A}, 1 - \frac{A}{4}\right)$ или

$$0 \leqslant A < 1, \quad \frac{A}{1-A} < \sqrt{C\,D} < 2\,(1 + \sqrt{1-A}).$$

Двухточечная задача

Диагональная матрица, положительные операторы

Теорема

$$\begin{cases} \dot{x} = T_{12}^{+} y + f_1, \\ \dot{y} = T_{21}^{+} x + f_2, \\ x(a) + y(a) = \alpha_1, \quad x(b) + y(b) = \alpha_2, \end{cases}$$

О.Р. при всех $T_{12}^{+},\ T_{21}^{-} \geqslant 0,\ \| T_{12} \| = c^{+},\ \| T_{21} \| = d^{+}$
$\Leftrightarrow c^{+} = 0, \quad d^{+} > 0$ или $d^{+} = 0, \quad c^{+} > 0$ или

$$\frac{d^{+}}{1 - d^{+}} < c^{+} < \frac{2}{d^{+}}(1 + \sqrt{1 - d^{+2}})$$

или

$$\frac{c^{+}}{1 - c^{+}} < d^{+} < \frac{2}{c^{+}}(1 + \sqrt{1 - c^{+2}}).$$

Основная теорема. Предположения

$$f \in \mathrm{L}[0,1], \quad \int_0^1 f(t)\,dt = 1, \quad \mu \equiv \frac{\min\{\int_0^1 f^+(t)\,dt, \int_0^1 f^-(t)\,dt\}}{\max\{\int_0^1 f^+(t)\,dt, \int_0^1 f^-(t)\,dt\}}.$$

Задача

$$\ddot{x}(t) = (Tx)(t) + \lambda f(t) \quad \text{при п.в. } t \in [0,1],$$
$$x(0) = x(1), \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(1),$$

имеет единственное решение при всех $T \in \mathbb{S}(q,r)$,

$$\mathbb{S}(q,r) \equiv \Big\{ T : \mathrm{C} \to \mathrm{L} : T = T^+ - T^-, \ T^{+/-} \geqslant 0,$$
$$T^+ 1 = q, \quad T^- 1 = r \Big\},$$
$$\mathcal{P} \equiv \int_0^1 (q(t) - r(t))\,dt \neq 0.$$

Обозначения

$\forall\ 0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant 1$ определим кусочно линейную непрерывную функцию

$$g_{t_1,t_2}(t) \equiv G(t_2,t) - G(t_1,t) = \begin{cases} (t_2 - t_1)t, & t \in [0, t_1), \\ t_1 + t(t_2 - t_1 - 1), & t \in [t_1, t_2), \\ (t_2 - t_1)(t-1), & t \in [t_2, 1], \end{cases}$$

$G(t,s)$ — функция Грина задачи $\ddot{x}(t) = f(t)$, $t \in [0,1]$, $x(0) = 0$, $x(1) = 0$

$\forall\ f \in \mathrm{L}[0,1]$ пусть

$$g_{t_1,t_2,f}(t) \equiv g_{t_1,t_2}(t) - \int_0^1 f(s) q_{t_1,t_2}(s)\, ds, \quad t \in [0,1],$$

Основная теорема

Теорема

Если

$$\max_{0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant 1}\int_0^1\Big(q(t)g^+_{t_1,t_2,f}(t)+r(t)g^-_{t_1,t_2,f}(t)\Big)\,dt<1,$$

$$\max_{0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant 1}\int_0^1\Big(q(t)g^-_{t_1,t_2,f}(t)+r(t)g^+_{t_1,t_2,f}(t)\Big)\,dt<1,$$

то при всех линейных положительных операторах $T\in\mathbb{S}(p,q)$ единственное решение периодической краевой задачи

$$\begin{aligned}&\ddot{x}(t)=(Tx)(t)+\lambda f(t)\quad \text{при п.в. } t\in[0,1],\\&x(0)=x(1),\quad \dot{x}(0)=\dot{x}(1),\end{aligned}$$

удовлетворяет неравенству $-\operatorname{sgn}(\lambda\mathcal{P})\,x(t)>0,\quad t\in[0,1].$

Общие утверждения о положительных решениях. 2

Определения. 2

$$\mu \equiv \frac{\min\{\int_0^1 f^+(t)\,dt, \int_0^1 f^-(t)\,dt\}}{\max\{\int_0^1 f^+(t)\,dt, \int_0^1 f^-(t)\,dt\}}.$$

$$w_{t_1,t_2}(t) \equiv g_{t_1,t_2}(t)+(t_2-t_1)(1-t_2)+(t_2-t_1)(1-(t_2-t_1))\frac{\mu}{1-\mu},$$

$$v_{t_1,t_2}(t) \equiv -g_{t_1,t_2}(t)+(t_2-t_1)t_1+(t_2-t_1)(1-(t_2-t_1))\frac{\mu}{1-\mu}$$

$$w_{t_1,t_2} = g_{t_1,t_2,f_1}, \quad f_1 = -\delta_{t_1}\mu/(1-\mu) + \delta_{t_2}/(1-\mu)$$

$$v_{t_1,t_2} = -g_{t_1,t_2,f_2}, \quad f_2 = \delta_{t_1}/(1-\mu) - \delta_{t_2}\mu/(1-\mu)$$

Общие утверждения о положительных решениях. 3

Теорема

Если

$$\max_{0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant 1}\left\{\int_0^1 p^+(t)w_{t_1,t_2}(t)\,dt,\ \int_0^1 p^+(t)v_{t_1,t_2}(t)\,dt\right\}\leqslant 1,$$

то при всех таких линейных положительных операторах $T:\mathrm{C}[0,1]\to\mathrm{L}[0,1]$, что $(T1)(t)\leqslant p^+(t)$, $T\not\equiv 0$, единственное решение периодической краевой задачи

$$\begin{aligned}&\ddot{x}(t)=(Tx)(t)+f(t)\quad \text{при п.в. } t\in[0,1],\\ &x(0)=x(1),\quad \dot{x}(0)=\dot{x}(1),\end{aligned}$$

удовлетворяет неравенству $-\operatorname{sgn}\left(\int_0^1 f(s)\,ds\right)x(t)>0\ \forall$ $t\in[0,1]$.

Общие утверждения о положительных решениях. 4

Следствие

Если

$$P^+ \leqslant \frac{8\,(1-\mu)}{1+\mu}$$

то при всех таких линейных положительных операторах $T : C[0,1] \to L[0,1]$, что $(T1)(t) \leqslant P^+$, $T \not\equiv 0$, единственное решение периодической краевой задачи

$$\begin{aligned} &\ddot{x}(t) = (Tx)(t) + f(t) \quad \text{при п.в. } t \in [0,1], \\ &x(0) = x(1), \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(1), \end{aligned}$$

удовлетворяет $-\operatorname{sgn}\left(\int_0^1 f(s)\,ds\right) x(t) > 0$ *forall* $t \in [0,1]$.

Общие утверждения о положительных решениях. 5

Следствие

Если

$$P^+ \leqslant 4(1-\mu)$$

то при всех таких линейных положительных операторах $T : C[0,1] \to L[0,1]$, что $\int_0^1 (T1)(t)\,dt \leqslant P^+$, $T \not\equiv 0$, единственное решение периодической краевой задачи

$$\ddot{x}(t) = (Tx)(t) + f(t) \quad \text{при п.в. } t \in [0,1],$$
$$x(0) = x(1), \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(1),$$

удовлетворяет $-\operatorname{sgn}\left(\int_0^1 f(s)\,ds\right) x(t) > 0 \ \forall\ t \in [0,1]$.

Симметричная функция p

Теорема

Если

$$0 < \lambda, \quad \lambda \left(\frac{5}{192} + \frac{m}{24(1-m)} \right) \leqslant 1,$$

то при всех таких линейных положительных операторах $T : C[0,1] \to L[0,1]$, что $(T1)(t) \leqslant t(1-t)$, $T \not\equiv 0$, единственное решение периодической краевой задачи

$$\ddot{x}(t) = \lambda (Tx)(t) + f(t) \quad \text{при п.в. } t \in [0,1],$$
$$x(0) = x(1), \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(1),$$

удовлетворяет $-\operatorname{sgn}\left(\int_0^1 f(s)\,ds\right) x(t) > 0 \ \forall\ t \in [0,1]$.

Симметричная функция p. 2

Теорема

Если

$$0 < \lambda, \quad \lambda \left(\frac{1}{192} + \frac{m}{48\,(1-m)} \right) \leqslant 1,$$

то при всех таких линейных положительных операторах $T : \mathrm{C}[0,1] \to \mathrm{L}[0,1]$, что $(T1)(t) \leqslant (t-1/2)^2$, $T \not\equiv 0$, единственное решение периодической краевой задачи

$$\begin{aligned} &\ddot{x}(t) = \lambda\,(Tx)(t) + f(t) \quad \text{при п.в. } t \in [0,1], \\ &x(0) = x(1), \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(1), \end{aligned}$$

удовлетворяет $-\operatorname{sgn}\left(\int_0^1 f(s)\,ds\right) x(t) > 0 \;\forall\; t \in [0,1]$.

Линейная функция p

Теорема

Если

$$\mu = 0, \quad 0 < \lambda, \quad \lambda \left(\frac{19\sqrt{57}}{108} - \frac{5}{4} \right) \leqslant 1 \quad (\lambda \leqslant 12.7),$$

то при всех таких линейных положительных операторах $T : C[0,1] \to L[0,1]$, что $(T1)(t) \leqslant t$, $T \not\equiv 0$, единственное решение периодической краевой задачи

$$\begin{aligned} &\ddot{x}(t) = \lambda (Tx)(t) + f(t) \quad \text{при п.в. } t \in [0,1], \\ &x(0) = x(1), \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(1), \end{aligned}$$

удовлетворяет $-\operatorname{sgn}\left(\int_0^1 f(s)\,ds\right) x(t) > 0 \ \forall\ t \in [0,1]$.

Линейная функция p. 2

Теорема

Если $0 < \lambda$ и

$$\lambda \left(\frac{(7m^2 + 22m + 19)^{3/2}\sqrt{3} - 9(3m+5)(m+3)(m+1)}{108(1-m)^3} \right) \leqslant 1,$$

то при всех таких линейных положительных операторах $T : C[0,1] \to L[0,1]$, что $(T1)(t) \leqslant t$, $T \not\equiv 0$, единственное решение периодической краевой задачи

$$\begin{aligned} &\ddot{x}(t) = \lambda (Tx)(t) + f(t) \quad \text{при п.в. } t \in [0,1], \\ &x(0) = x(1), \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(1), \end{aligned}$$

удовлетворяет $-\operatorname{sgn}\left(\int_0^1 f(s)\,ds\right) x(t) > 0 \ \forall\ t \in [0,1]$.

Системы двух уравнений с регулярными операторами

Краевые задачи для системы

$$\dot{x}(t) = (T_{11}x)(t) + (T_{12}y)(t) + f_1(t), \quad t \in [a, b], \tag{63}$$
$$\dot{y}(t) = (T_{21}x)(t) + (T_{22}y)(t) + f_2(t), \quad t \in [a, b], \tag{64}$$
$$\ell_1(x, y) = \alpha_1, \quad \ell_2(x, y) = \alpha_2. \tag{65}$$

$x \in \mathrm{AC}[a, b]$, $y \in \mathrm{AC}[a, b]$, $T_{ij} : \mathrm{C}[a, b] \to \mathrm{L}[a, b]$, $f_i \in \mathrm{L}[a, b]$,
$\ell_i : \mathrm{AC} \times \mathrm{AC} \to \mathbb{R}$

Однородная задача для системы

$$\dot{x}(t) = (T_{11}x)(t) + (T_{12}y)(t), \quad t \in [a, b], \tag{66}$$
$$\dot{y}(t) = (T_{21}x)(t) + (T_{22}y)(t), \quad t \in [a, b], \tag{67}$$
$$\ell_1(x, y) = 0, \quad \ell_2(x, y) = 0. \tag{68}$$

Задача об условиях на нормы $T_{ij}^{+/-}$,

гарантирующих однозначную разрешимость

Общая система

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (T_{11}x)(t) + (T_{12}y)(t) + f_1(t), & t \in [a, b], \\ \dot{y}(t) = (T_{21}x)(t) + (T_{22}y)(t) + f_2(t), & t \in [a, b], \\ \ell_1(x, y) = \alpha_1, \quad \ell_2(x, y) = \alpha_2. \end{cases} \tag{71}$$

Нормы положительных операторов $T_{ij}^{+/-}$ заданы.

Произвольная краевая задача.

Итог исследования — «картинка», множество наборов норм, соответствующих однозначно разрешимым задачам.

Важно для тематики ФДУ.

Основные утверждения

Лемма

Даны p_{ij}^{+}, $p_{ij}^{-} \in \mathrm{L}$, $p_{ij}^{+/-} \geqslant 0$, $i,j = 1,2$. Задача О.Р. при всех $T_{ij} : \mathrm{C} \to \mathrm{L}$,

$$T_{ij} = T_{ij}^{+} - T_{ij}^{-},\ T_{ij}^{+/-} \geqslant 0,\ \ T_{ij}^{+/-}1 = p_{ij}^{+/-},\ \ i,j = 1,2, \tag{72}$$

$\Leftrightarrow$ задача

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = p_{11*}(t)x(\tau_1) + p_{11}^{*}(t)x(\tau_2) + p_{12*}(t)y(\theta_1) + p_{12}^{*}(t)y(\theta_2), \\ \dot{y}(t) = p_{21*}(t)x(\tau_1) + p_{21}^{*}(t)x(\tau_2) + p_{22*}(t)y(\theta_1) + p_{22}^{*}(t)y(\theta_2), \\ \quad t \in [a,b], \quad \ell_1(x,y) = 0, \quad \ell_2(x,y) = 0, \end{cases} \tag{73}$$

О.Р. при всех τ_1, τ_2, θ_1, $\theta_2 \in [a,b]$, p_{ij*}, $p_{ij}^{*} \in \mathrm{L}$, $i,j = 1,2$,

$$-p_{ij}^{-} \leqslant p_{ij*} \leqslant p_{ij}^{+}, \quad p_{ij*} + p_{ij}^{*} = p_{ij}^{+} - p_{ij}^{-}, \quad i,j = 1,2. \tag{74}$$

Основные утверждения (продолжение)

Лемма

Даны $\mathcal{T}_{ij}^{+}$, $\mathcal{T}_{ij}^{-} \in \mathbb{R}$, $\mathcal{T}_{ij}^{+} \geqslant 0$, $\mathcal{T}_{ij}^{-} \geqslant 0$, $i, j = 1, 2$. Задача О.Р. при всех $T_{ij} : \mathsf{C} \to \mathsf{L}$

$$T_{ij} = T_{ij}^{+} - T_{ij}^{-}, T_{ij}^{+/-} \geqslant 0, \ \| T_{ij}^{+/-} \| = \mathcal{T}_{ij}^{+/-}, \ i, j = 1, 2, \tag{75}$$

$\Leftrightarrow$ задача (73) имеет только тривиальное решение при всех τ_1, τ_2, θ_1, $\theta_2 \in [a, b]$, p_{ij*}, $p_{ij}^{*} \in \mathsf{L}$, $i, j = 1, 2$,

$$-p_{ij}^{-} \leqslant p_{ij*} \leqslant p_{ij}^{+}, \quad p_{ij*} + p_{ij}^{*} = p_{ij}^{+} - p_{ij}^{-}, \quad i, j = 1, 2, \tag{76}$$

$$\| p_{ij}^{+} \| = \mathcal{T}_{ij}^{+}, \quad \| p_{ij}^{-} \| = \mathcal{T}_{ij}^{-}, \quad i, j = 1, 2. \tag{77}$$

Задачи с положительной системой функционалалов

Лемма

$\{\ell_1, \ell_2\} \geqslant 0$. Задача (71) однозначно разрешима (О.Р.) для всех $T_{ij}^{+/-} \geqslant 0$

$$\| T_{ij}^{+/-} \| = \mathcal{T}_{ij}^{+/-}, \quad i, j = 1, 2, \tag{78}$$

$\Leftrightarrow$ задача (71) О.Р. для всех $T_{ij}^{+/-} \geqslant 0$

$$\| T_{ij}^{+/-} \| \leqslant \mathcal{T}_{ij}^{+/-}, \quad i, j = 1, 2, \tag{79}$$

$$\ell_1(x, y) = C_1 x(a) + C_2 x(b), \quad \ell_2(x, y) = C_3 y(a) + C_4 y(b),$$
$$C_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, 4, \quad C_1 + C_2 > 0, \quad C_3 + C_4 > 0.$$

Задача Коши

Теорема

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (T_{11}x)(t) + (T_{12}y)(t) + f_1(t), & t \in [a,b], \\ \dot{y}(t) = (T_{21}x)(t) + (T_{22}y(t) + f_2(t), & t \in [a,b], \\ x(a) = \alpha_1, \quad y(a) = \alpha_2, \end{cases} \tag{80}$$

О.Р. при всех $T_{ij} = T_{ij}^{+} - T_{ij}^{-}$, $T_{ij}^{+/-} \geqslant 0$, $T_{ij}^{+/-} : \mathrm{C} \to \mathrm{L}$, $i, j = 1, 2$,

$$\| T_{11}^{+/-} \| \leqslant a^{+/-}, \ \| T_{12}^{+/-} \| \leqslant c^{+/-}, \tag{81}$$

$$\| T_{21}^{+/-} \| \leqslant d^{+/-}, \ \| T_{22}^{+/-} \| \leqslant b^{+/-}, \tag{82}$$

$\Leftrightarrow$

Задача Коши и задача минимизации

Теорема (продолжение)

$\Leftrightarrow$

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1-a_1^+ & a_1^- & -c_1^+ & c_1^- \\ a_2^- - 1 & 1-a_2^+ & c_2^- & -c_2^+ \\ -d_1^+ & d_1^- & 1-b_1^+ & b_1^- \\ d_2^- & -d_2^+ & b_2^- - 1 & 1-b_2^+ \end{vmatrix} > 0 \qquad (83)$$

при всех

$$\begin{gathered} a_1^{+/-} + a_2^{+/-} \leqslant a^{+/-}, \quad b_1^{+/-} + b_2^{+/-} \leqslant b^{+/-}, \\ c_1^{+/-} + c_2^{+/-} \leqslant c^{+/-}, \quad d_1^{+/-} + d_2^{+/-} \leqslant d^{+/-}, \\ a_i^{+/-},\ b_i^{+/-}, c_i^{+/-},\ d_i^{+/-} \geqslant 0,\ i = 1, 2. \end{gathered} \qquad (84)$$

Задача Коши и задача минимизации

Теорема (продолжение)

$\Leftrightarrow$

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1-a_1^+ & a_1^- & -c_1^+ & c_1^- \\ a_2^- - 1 & 1-a_2^+ & c_2^- & -c_2^+ \\ -d_1^+ & d_1^- & 1-b_1^+ & b_1^- \\ d_2^- & -d_2^+ & b_2^- - 1 & 1-b_2^+ \end{vmatrix} > 0 \qquad (85)$$

при всех $z_i^{+/-} \geqslant 0$,

$$z_1^{+/-} + z_2^{+/-} \leqslant z^{+/-}, \quad z \in \{a, b, c, d\}. \qquad (86)$$

Задача Коши. Эффективные условия

$$\triangle = R_1^{++}(c^+d^+)^2 + R_3^{++}c^+d^+ + R_1^{+-}(c^+d^-)^2 + R_3^{+-}c^+d^- +$$
$$+R_1^{-+}(c^-d^+)^2 + R_3^{-+}c^-d^+ + R_1^{--}(c^-d^-)^2 + R_3^{--}c^-d^- + R_2.$$

R_*^{**} не зависят от $c^{+/-}$, $d^{+/-}$.

Теорема о необходимых условиях

Если $\triangle > 0$, то

$$a^+ < 1, \quad a^- < 1+2\sqrt{1-a^+}, \quad b^+ < 1, \quad b^- < 1+2\sqrt{1-b^+}.$$

Если $c^+c^- = 0$ и $d^+d^- = 0$, то необходимые и достаточные условия разрешимости сводятся к проверке квадратичного неравенства относительно произведения ненулевых c^*d^*.

Задача Коши. Монотонные внедиагональные операторы

«Легкие» и «трудные» случаи

Если $c^+c^- = 0$ и $d^+d^- = 0$, то необходимые и достаточные условия разрешимости сводятся к проверке квадратичного неравенства относительно произведения ненулевых c^*d^*.

«Легкие» случаи: $CD < M_1(a^+, a^-, b^+, b^-)$.

Коэффициент при квадратичном слагаемом отрицательный (знак не зависит от $a^{+/-}$, $b^{+/-}$). Минимум всегда на границе. Необходимые и достаточные условия простые, M_1 легко вычисляется.

«Трудные» случаи. $CD < M_2(a^+, a^-, b^+, b^-)$

Коэффициент при квадратичном слагаемом положительный. Минимум может быть внутри рассматриваемой области. Определение необходимых и достаточных условий затруднено, не всегда удается получить аналитическое выражение для M_2.

Задача Коши. Монотонные внедиагональные операторы

«Легкие» случаи. Внедиагональные операторы одного знака

Теорема

$$\begin{cases} \dot{x} = T_{11}x + T_{12}y + f_1, \\ \dot{y} = T_{21}x + T_{22}y + f_2, \\ x(a) = \alpha_1, \quad y(a) = \alpha_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = T_{11}x - T_{12}y + f_1, \\ \dot{y} = -T_{21}x + T_{22}y + f_2, \\ x(a) = \alpha_1, \quad y(a) = \alpha_2, \end{cases} \tag{87}$$

О.Р. для всех $T_{ii} = T_{ii}^{+} - T_{ii}^{-}, \quad T_{11}^{+/-},\ T_{22}^{+/-},\ T_{12},\ T_{21} \geqslant 0,$

$$\| T_{ii}^{+/-} \| = \mathcal{T}_{ii}^{+/-},\ \| T_{12} \| = C,\ \| T_{21} \| = D,$$

$\Leftrightarrow \mathcal{T}_{ii}^{+} < 1, \quad \mathcal{T}_{ii}^{-} < 1 + 2\sqrt{1 - \mathcal{T}_{ii}^{+}},\ i = 1, 2,$

$$CD < (\varphi(\mathcal{T}_{11}^{-}) - \mathcal{T}_{11}^{+})(\varphi(\mathcal{T}_{22}^{-}) - \mathcal{T}_{22}^{+}), \quad \varphi(z) = \begin{cases} 1, & z \leqslant 1, \\ 1 - \frac{(z-1)^2}{4}, & z > 1. \end{cases} \tag{88}$$

Задача Коши. Монотонные внедиагональные операторы

«Трудные» случаи. Внедиагональные операторы разных знаков.

Эффективные условия только для монотонных диагональных операторов

- 1. Диагональные операторы положительны.
- 2. Диагональные операторы отрицательны.
- 3. Монотонные диагональные операторы разных знаков.

Функцию $M_2(a^+, a^-, b^+, b^-)$ удалось явно вычислить только тогда, когда в каждой паре a^+, a^- и b^+, b^- хотя бы одно число нулевое.

Задача Коши. Монотонные внедиагональные операторы

«Трудные» случаи. Внедиагональные операторы разных знаков.

Необходимые и достаточные условия для положительных диагональных операторов

$$\begin{cases} \dot{x} = \quad T_{11}x + T_{12}y + f_1, \\ \dot{y} = -T_{21}x + T_{22}y + f_2, \\ x(a) = \alpha_1, \quad y(a) = \alpha_2, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = T_{11}x - T_{12}y + f_1, \\ \dot{y} = T_{21}x + T_{22}y + f_2, \\ x(a) = \alpha_1, \quad y(a) = \alpha_2, \end{cases} \tag{89}$$

О.Р. при всех $T_{ij} \geqslant 0,\ i,j = 1,2,$

$$\| T_{11}\| \leqslant A, \quad \| T_{12}\| \leqslant C, \quad \| T_{21}\| \leqslant D, \quad \| T_{22}\| \leqslant B, \tag{90}$$

$$\Leftrightarrow \quad A < 1, \quad B < 1, \quad CD < \left(\sqrt[3]{1-A} + \sqrt[3]{1-B}\right)^3. \tag{91}$$

Дост. усл. (Shremr, Hakl, 2005) $CD < 4\sqrt{(1-A)(1-B)} + (\sqrt{1-A} + \sqrt{1-B})^2.$

Задача Коши. Монотонные внедиагональные операторы

«Трудные» случаи. Внедиагональные операторы разных знаков.

Необходимые и достаточные условия для отрицательных диагональных операторов

Если $\max(A, B) \geqslant \frac{1}{5}$,

$$\begin{cases} \dot{x} = -T_{11}x + T_{12}y + f_1, \\ \dot{y} = -T_{21}x - T_{22}y + f_2, \\ x(a) = \alpha_1, \quad y(a) = \alpha_2, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = -T_{11}x - T_{12}y + f_1, \\ \dot{y} = T_{21}x - T_{22}y + f_2, \\ x(a) = \alpha_1, \quad y(a) = \alpha_2, \end{cases} \tag{92}$$

О.Р. при всех $T_{ij} \geqslant 0$, $i, j = 1, 2$,

$$\| T_{11}\| \leqslant A, \quad \| T_{12}\| \leqslant C, \quad \| T_{21}\| \leqslant D, \quad \| T_{22}\| \leqslant B, \tag{93}$$

$\Leftrightarrow$

$$A < 3, \quad B < 3, \quad CD < \varphi(\min(A, B))\psi(\max(A, B)). \tag{94}$$

Задача Коши. Монотонные внедиагональные операторы

«Трудные» случаи. Внедиагональные операторы разных знаков.

Необходимые и достаточные условия для отрицательных диагональных операторов - 2

$$A < 3, \quad B < 3, \quad CD < \varphi(\min(A,B))\psi(\max(A,B)).$$

$$\varphi(z) = \begin{cases} 1, \ z \in [0,1], \\ 1 - \frac{(z-1)^2}{4}, \ z \in [1,3], \end{cases} \qquad \psi(z) = \begin{cases} 1 + 1/z, \ z \in (0,1], \\ 3 - z, \ z \in [1,3]. \end{cases}$$

Если $0 < \max(A,B) < \frac{1}{4}$, то для О.Р. достаточно

$$CD < 8 - 16 \max(A,B). \tag{95}$$

Если $A = B = 0$, то $CD < 8$ необходимо и достаточно.

Задача Коши. Монотонные внедиагональные операторы

«Трудные» случаи. Внедиагональные операторы разных знаков.

Необходимые и достаточные условия для отрицательных диагональных операторов при всех A, B - 3

$$\triangle_A(x) = 1 + x(1-A) + x^2, \ \triangle_B(y) = 1 + y(1-B) + y^2, \quad (96)$$

$$CD < \min_{\substack{x \in [\max(0,(A-1)/2),A] \\ y \in [\max(0,(B-1)/2),B]}} 4\left(\sqrt{\triangle_A(x)\triangle_B(y) + (x+y)^2} - (x+y)\right) \quad (97)$$

$$CD < \varphi(\min(A,B))\psi(\max(A,B)). \quad (98)$$

Задача Коши. Монотонные внедиагональные операторы

«Трудные» случаи. Внедиагональные операторы разных знаков.

Необходимые и достаточные условия для диагональных операторов разных знаков

Если $A \geqslant 1 - \frac{8B^2}{1+B}$, то

$$\begin{cases} \dot{x} = T_{11}x + T_{12}y + f_1, \\ \dot{y} = -T_{21}x - T_{22}y + f_2, \\ x(a) = \alpha_1, \quad y(a) = \alpha_2, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = T_{11}x - T_{12}y + f_1, \\ \dot{y} = T_{21}x - T_{22}y + f_2, \\ x(a) = \alpha_1, \quad y(a) = \alpha_2, \end{cases} \tag{99}$$

О.Р. при всех $T_{ij} \geqslant 0$, $i, j = 1, 2$,

$$\| T_{11}\| \leqslant A, \quad \| T_{12}\| \leqslant C, \quad \| T_{21}\| \leqslant D, \quad \| T_{22}\| \leqslant B, \tag{100}$$

$$\Leftrightarrow \quad A < 1, \quad B < 3, \quad CD < (1 - A)\psi(B), \tag{101}$$

$$\psi(z) = \begin{cases} 1 + 1/z, \ z \in (0, 1], \\ 3 - z, \ z \in [1, 3]. \end{cases} \tag{102}$$

Задача Коши. Немонотонные внедиагональные операторы

Диагональные операторы нулевые

Необходимые и достаточные условия для немонотонных диагональных операторов

$$\begin{cases} \dot{x} = \quad -T_{12}^{-}y + f_1, \\ \dot{y} = \quad T_{21}^{+}x - T_{21}^{-}x + f_2, \\ x(a) = \alpha_1, \quad y(a) = \alpha_2, \end{cases} \tag{103}$$

О.Р. при всех $T_{21}^{+/-}, T_{12}^{-} : \mathrm{C} \to \mathrm{L}$,

$$\| T_{12}^{-}\| \leqslant c^{-}, \quad \| T_{21}^{+}\| \leqslant d^{+}, \quad \| T_{21}^{+}\| \leqslant d^{-}, \tag{104}$$

$\Leftrightarrow$

$$d^{-}c^{-} < 1, \quad d^{+}c^{-} < 4(1 + \sqrt{1 - d^{-}c^{-}}). \tag{105}$$

Необходимые и достаточные условия разрешимости

Теорема

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (T_{11}x)(t) + (T_{12}y)(t) + f_1(t), & t \in [a,b], \\ \dot{y}(t) = (T_{21}x)(t) + (T_{22}y(t) + f_2(t), & t \in [a,b], \\ x(a) = x(b), \quad y(a) = y(b), \end{cases} \tag{106}$$

О.Р. при всех $T_{ij} = T_{ij}^{+} - T_{ij}^{-}$, $T_{ij}^{+/-} : \mathrm{C} \to \mathrm{L}$, $T_{ij}^{+/-} \geqslant 0$, $i,j = 1,2$,

$$\| T_{11}^{+/-} \| = a^{+/-}, \ \| T_{12}^{+/-} \| = c^{+/-}, \tag{107}$$

$$\| T_{21}^{+/-} \| = d^{+/-}, \ \| T_{22}^{+/-} \| = b^{+/-}, \tag{108}$$

$\Leftrightarrow$

Необходимые и достаточные условия разрешимости

Теорема (продолжение)

$$\triangle \equiv \begin{vmatrix} a^+ - a^- & y_a + x_a & c^+ - c^- & y_c + x_c \\ -(a_1^+ - a_1^-) & 1 - y_a & -(c_1^+ - c_1^-) & -y_c \\ d^+ - d^- & y_d + x_d & b^+ - b^- & y_b + x_b \\ d_1^+ - d_1^- & y_d & b_1^+ - b_1^- & 1 + y_b \end{vmatrix} \neq 0 \tag{109}$$

при всех

$$z_1^{+/-} \in [0, z^{+/-}],\ x_z \in [-z^- + z_1^-, z^+ - z_1^+],\ y_z \in [-z_1^-, z_1^+],$$

$z \in \{a, b, c, d\}$.

Эффективные необходимые и достаточные условия

Циклическая матрица

Теорема

$$\begin{cases} \dot{x} = T_{12}^{+} y - T_{12}^{-} y + f_1, \\ \dot{y} = T_{21}^{+} x - T_{21}^{-} x + f_2, \\ x(a) = x(b), \quad y(a) = y(b), \end{cases} \tag{110}$$

О.Р. при всех $T_{12}^{+/-}$, $T_{21}^{+/-} : \mathrm{C} \to \mathrm{L}$,

$$\| T_{12}^{+/-} \| = c^{+/-}, \quad \| T_{21}^{+/-} \| = d^{+/-}, \tag{111}$$

$\Leftrightarrow c^{+} \neq c^{-}, \quad d^{+} \neq d^{-}$

$$\frac{\overline{C} \max\left(\overline{C}, 4\underline{C}\right)}{\overline{C} - \underline{C}} \cdot \frac{\overline{D} \max\left(\overline{D}, 4\underline{D}\right)}{\overline{D} - \underline{D}} < 16, \tag{112}$$

Эффективные необходимые и достаточные условия

Циклическая матрица (продолжение)

Теорема (продолжение)

$\Leftrightarrow c^+ \neq c^-, \quad d^+ \neq d^-$

$$\frac{\overline{C}\max\left(\overline{C}, 4\underline{C}\right)}{\overline{C}-\underline{C}} \cdot \frac{\overline{D}\max\left(\overline{D}, 4\underline{D}\right)}{\overline{D}-\underline{D}} < 16, \tag{113}$$

$$\overline{D} = \max(d^+, d^-), \ \overline{C} = \max(c^+, c^-), \tag{114}$$

$$\underline{D} = \min(d^+, d^-), \ \underline{C} = \min(c^+, c^-). \tag{115}$$

Необходимые и достаточные условия

Монотонные операторы

Предположения

$$\begin{cases} \dot{x} = T_{11}x + T_{12}y + f_1, \\ \dot{y} = T_{21}x + T_{22}y + f_2, \\ x(a) = x(b), \quad y(a) = y(b), \end{cases} \tag{116}$$

$f_1,\ f_2 \in \mathrm{L}[a,b],\ T_{ij} : \mathrm{C} \to \mathrm{L},\ T_{ij} \geqslant 0,\ i,j = 1,2$

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon_{11}\ T_{11}x + \varepsilon_{12}\ T_{12}y + f_1, \\ \dot{y} = \varepsilon_{21}\ T_{21}x + \varepsilon_{22}\ T_{22}y + f_2, \\ x(a) = x(b), \quad y(a) = y(b), \end{cases} \tag{117}$$

$\varepsilon_{ij} \in \{-1,1\},\ i,j = 1,2,\ \varepsilon_{11}\varepsilon_{12}\varepsilon_{21}\varepsilon_{22} = 1$

Необходимые и достаточные условия

Монотонные операторы

Теорема

$$\begin{cases} \dot{x} = T_{11}x + T_{12}y + f_1, \\ \dot{y} = T_{21}x + T_{22}y + f_2, \\ x(a) = x(b), \quad y(a) = y(b), \end{cases} \tag{118}$$

О.Р. при всех $T_{ij} \geqslant 0$, $i, j = 1, 2$,

$$\| T_{11} \| = A, \quad \| T_{12} \| = C, \quad \| T_{21} \| = D, \quad \| T_{22} \| = B, \tag{119}$$

$\Leftrightarrow$ $0 < A < 4, \quad 0 < B < 4,$

$$C\,D < A\,B \min\left(\frac{1}{1+A}, 1 - \frac{A}{4}\right) \min\left(\frac{1}{1+B}, 1 - \frac{B}{4}\right) \tag{120}$$

или

Необходимые и достаточные условия

Монотонные операторы - 2

Теорема (продолжение)

$\Leftrightarrow$ $0 < A < 4, \quad 0 < B < 4,$

$$C\,D < A\,B\,\min\left(\frac{1}{1+A}, 1-\frac{A}{4}\right)\,\min\left(\frac{1}{1+B}, 1-\frac{B}{4}\right) \quad (121)$$

или

$$0 \leqslant A < 1,\ 0 \leqslant B < 1, \quad \frac{A\,B}{(1-A)\,(1-B)} < C\,D, \quad (122)$$

$$(C\,D)^2\,t^2(1-t)^2 + C\,D\,(A\,t^2 + B\,(1-t)^2 - 1) + A\,B < 0, \quad (123)$$

$t \in [0, 1].$

Достаточные условия

Монотонные операторы - 3

Теорема (продолжение)

Если (122), то для (123) достаточно

$$C\,D < 8\left(1 - \frac{1}{2}\max(A,B) + \sqrt{(1 - \frac{1}{2}\max(A,B))^2 - \frac{1}{4}A\,B}\right) \tag{124}$$

или

$$C\,D < 4\,(1 + \sqrt{1 - \max(A,B)})^2. \tag{125}$$

Необходимые и достаточные условия

Монотонные операторы-4

Теорема

$$\begin{cases} \dot{x} = T_{11}x + T_{12}y + f_1, \\ \dot{y} = T_{21}x + T_{22}y + f_2, \\ x(a) = x(b), \quad y(a) = y(b), \end{cases} \tag{126}$$

О.Р. при всех $T_{ij} \geqslant 0,\ i,j = 1,2,$

$$\| T_{11}\| = A, \quad \| T_{12}\| = C, \quad \| T_{21}\| = D, \quad \| T_{22}\| = A, \tag{127}$$

$\Leftrightarrow 0 < A < 4,\ \sqrt{C\,D} < A \min\left(\frac{1}{1+A}, 1 - \frac{A}{4}\right)$ или

$$0 \leqslant A < 1, \quad \frac{A}{1-A} < \sqrt{C\,D} < 2\,(1 + \sqrt{1-A}). \tag{128}$$

Антипериодическая задача

Монотонные операторы

Теорема

$$\begin{cases} \dot{x} = T_{11}x + T_{12}y + f_1, \\ \dot{y} = T_{21}x + T_{22}y + f_2, \\ x(a) + x(b) = \alpha_1, \quad y(a) + y(b) = \alpha_2, \end{cases} \tag{129}$$

О.Р. при всех монотонных T_{ij}, $i, j = 1, 2$,

$$\| T_{11} \| \leqslant A, \quad \| T_{12} \| \leqslant C, \quad \| T_{21} \| \leqslant D, \quad \| T_{22} \| \leqslant B, \tag{130}$$

$\Leftrightarrow$

$$A < 2, \quad B < 2, \quad CD < (2 - A)(2 - B). \tag{131}$$

Двухточечная задача

Диагональная матрица, положительные операторы

Теорема

$$\begin{cases} \dot{x} = T_{12}^{+} y + f_1, \\ \dot{y} = T_{21}^{+} x + f_2, \\ x(a) + y(a) = \alpha_1, \quad x(b) + y(b) = \alpha_2, \end{cases} \tag{132}$$

О.Р. при всех T_{12}^{+}, $T_{21}^{-} \geqslant 0$, $\| T_{12} \| = c+$, $\| T_{21} \| = d^{+}$
$\Leftrightarrow$ $c^{+} = 0, \quad d^{+} > 0$ или $d^{+} = 0, \quad c^{+} > 0$ или

$$\frac{d^{+}}{1 - d^{+}} < c^{+} < \frac{2}{d^{+}}(1 + \sqrt{1 - d^{+2}}) \tag{133}$$

или

$$\frac{c^{+}}{1 - c^{+}} < d^{+} < \frac{2}{c^{+}}(1 + \sqrt{1 - c^{+2}}). \tag{134}$$

Особенности работы

- В выбранных семействах уравнений получаем необходимые и достаточные условия для трех основных проблем для краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений.
- Необходимые и достаточные условия для операторов произвольного знака (регулярных операторов).
- Все задачи сводятся к задаче конечномерной оптимизации.
- Приближенные вычисления.
- Резонансные и нерезонансные задачи.
- Сингулярные и несингулярные задачи.
- Возможна явная зависимость от отклонений аргумента.
- Краевые задачи для разностных уравнений.

Выводы

- Метод работает для разных уравнений и краевых задач.
- Возможность изучения различных свойств и семейств.
- Решен класс проблем — есть алгоритм проверки однозначной разрешимости (положительной разрешимости) краевой задачи для всех уравнений семейства. Для многих задач найдены эффективные необходимые и достаточные условия.
- Предложен подход к решению целого класса задач — нахождению необходимых и достаточных условий наличия некоторых свойств краевых задач для семейств функционально-дифференциальных уравнений.