О спектрах показателей колеблемости дифференциальных уравнений третьего порядка

Сташ Айдамир Хазретович

Адыгейский государственный университет, Майкоп

Вторая конференция Математических центров России, 7-11 ноября 2022 г., МГУ, МИАН, г. Москва

Объекты исследования

Для заданного натурального n рассмотрим множество $\mathcal{E}^n$ линейных однородных уравнений n-го порядка

$$y^{(n)}+a_1(t)y^{(n-1)}+\dots+a_{n-1}(t)\dot{y}+a_n(t)y=0, \quad t\in\mathbb{R}_+\equiv[0;+\infty),$$

задаваемых непрерывными функциями $a\equiv(a_1,\dots,a_n)\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}^n$, с которыми в дальнейшем и будем отождествлять сами уравнения.
Множество всех ненулевых решений уравнения $a\in\mathcal{E}^n$ обозначим через $\mathcal{S}_*(a)$. Далее, звездочкой снизу будем помечать любое линейное пространство, в котором выколот нуль. Положим

$$\mathcal{S}_*^n=\bigcup_{a\in\mathcal{E}^n}\mathcal{S}_*(a).$$

Основные определения

Смена знака

Скажем, что в точке $t > 0$ происходит *смена знака* функции $y \in \mathcal{S}_*^n$, если в любой окрестности этой точки функция y принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Основные определения

Обозначения

Для момента $t > 0$ и функции $y \in \mathcal{S}_*^n$ введем следующие обозначения:
$\nu^-(y,t)$ — число точек ее *смен знака* на промежутке $(0,t]$;
$\nu^0(y,t)$ — число ее *нулей* на промежутке $(0,t]$;
$\nu^+(y,t)$ — число ее *корней* (т. е. нулей с учетом их *кратности*) на промежутке $(0,t]$.
Далее, для вектора $m \in \mathbb{R}_*^n$ и вектор-функции $\psi y = (y,\, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)})$ введем обозначение $\nu^\gamma(y,m,t) \equiv \nu^\gamma(\langle \psi y, m\rangle, t)$, где $\gamma \in \{-,0,+\}$, $\langle \psi y(\cdot), m\rangle$ — скалярное произведение.

Основные определения

Частоты Сергеева

Верхние (*нижние*) *частоты Сергеева знаков, нулей и корней* любого решения $y \in \mathcal{S}_*^n$ при $\gamma \in \{-, 0, +\}$ соответственно зададим формулами

$$\hat{\nu}^\gamma(y) \equiv \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\pi}{t} \nu^\gamma(y,t) \quad \left(\check{\nu}^\gamma(y) \equiv \underline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\pi}{t} \nu^\gamma(y,t) \right).$$

Замечание 1.

Для любых функции $y \in \mathcal{S}_{\mathcal{E}}^n$ и момента времени $t > 0$ справедливы неравенства

$$\nu^-(y,t) \leq \nu^0(y,t) \leq \nu^+(y,t),$$

$$\hat{\nu}^-(y) \leq \hat{\nu}^0(y) \leq \hat{\nu}^+(y), \quad \check{\nu}^-(y) \leq \check{\nu}^0(y) \leq \check{\nu}^+(y).$$

Основные определения

Показатели колеблемости

Верхние (*нижние*) *сильный* и *слабый показатели колеблемости знаков, нулей* и *корней* функции $y \in \mathcal{S}^n_*$ при $\gamma \in \{-, 0, +\}$ соответственно зададим формулами

$$\hat{\nu}^{\gamma}_{\bullet}(y) \equiv \inf_{m \in \mathbb{R}^n_*} \varlimsup_{t \to +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^{\gamma}(y, m, t),$$

$$\left(\check{\nu}^{\gamma}_{\bullet}(y) \equiv \inf_{m \in \mathbb{R}^n_*} \varliminf_{t \to +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^{\gamma}(y, m, t) \right),$$

$$\hat{\nu}^{\gamma}_{\circ}(y) \equiv \varlimsup_{t \to +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}^n_*} \frac{\pi}{t} \nu^{\gamma}(y, m, t),$$

$$\left(\check{\nu}^{\gamma}_{\circ}(y) \equiv \varliminf_{t \to +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}^n_*} \frac{\pi}{t} \nu^{\gamma}(y, m, t) \right).$$

Основные определения

Замечание 2.

Для любой функции $y \in \mathcal{S}^n_{\mathcal{E}}$ и $\alpha \in \{-, 0, +\}$ справедливы соотношения

$$\hat{\nu}^-_\circ(y) \le \hat{\nu}^0_\circ(y) \le \hat{\nu}^+_\circ(y),$$

$$\hat{\nu}^-_\bullet(y) \le \hat{\nu}^0_\bullet(y) \le \hat{\nu}^+_\bullet(y),$$

$$\check{\nu}^-_\circ(y) \le \check{\nu}^0_\circ(y) \le \check{\nu}^+_\circ(y),$$

$$\check{\nu}^-_\bullet(y) \le \check{\nu}^0_\bullet(y) \le \check{\nu}^+_\bullet(y),$$

$$\hat{\nu}^\alpha_\circ(y) \le \hat{\nu}^\alpha_\bullet(y) \le \hat{\nu}^\alpha(y), \quad \check{\nu}^\alpha_\circ(y) \le \check{\nu}^\alpha_\bullet(y) \le \check{\nu}^\alpha(y).$$

Основные определения

Спектр показателя уравнения

Спектром показателя $\varkappa$ уравнения $a \in \mathcal{E}^n$ назовем множество

$$\varkappa(\mathcal{S}_*(a)) \equiv \{\varkappa(y) | y \in \mathcal{S}_*(a)\}.$$

Обзор результатов

Утверждение

Для решений линейных однородных уравнений первого порядка все показатели колеблемости равны нулю.

И.Н.Сергеев, 2011

Для любой функции $y \in \mathcal{S}^2_{\mathcal{E}}$ и $\alpha \in \{-, 0, +\}$ справедливы соотношения

$$\nu_1 \equiv \hat{\nu}^\alpha_\circ(y) = \hat{\nu}^\alpha_\bullet(y) = \hat{\nu}^\alpha(y) \leq \check{\nu}^\alpha_\circ(y) = \check{\nu}^\alpha_\bullet(y) = \check{\nu}^\alpha(y) \equiv \nu_2.$$

Обзор результатов

А.Ю. Горицкий, 2008

Доказано существование линейного однородного уравнения четвертого порядка с постоянными коэффициентами, спектр характеристических частот нулей которого представляет собой целый отрезок числовой прямой.

Обзор результатов

М.В.Смоленцев, 2012

- доказано существование линейного однородного дифференциального периодического уравнения третьего порядка с любым наперед заданным числом существенных точных значений характеристических частот нулей;
- построено линейное однородное дифференциальное уравнение третьего порядка, спектр характеристической частоты нулей которого содержит счетное множество существенных точных значений;
- доказано существование линейного однородного дифференциального периодического уравнения третьего порядка с континуумом точных значений характеристических частот нулей.

Обзор результатов

А.С.Войделевич, 2015

- построен пример линейного дифференциального уравнения третьего порядка с непрерывными на временной полуоси коэффициентами, спектры частот Сергеева нулей и знаков которого состоят из множества рациональных чисел отрезка $[0, 1]$;
- построен пример линейного дифференциального уравнения третьего порядка с непрерывными на временной полуоси коэффициентами, спектры частот Сергеева нулей и знаков которого состоят из множества иррациональных чисел отрезка $[0, 1]$ и числа ноль.

Обзор результатов

А.Х.Сташ, А.Е.Артисевич, 2021

- Для любого не более чем счетного множества неотрицательных чисел S существует дифференциальное уравнение $a \in \mathcal{E}^3$, что при любом $\gamma \in \{-, 0, +\}$ справедливо равенство

$$\nu_{\bullet}^{\gamma}(\mathcal{S}_*(a)) = \nu_{\circ}^{\gamma}(\mathcal{S}_*(a)) = S \cup \{0\}.$$

- Существуют дифференциальные уравнения $a, b \in \mathcal{E}^3$, что при любом $\gamma \in \{-, 0, +\}$ справедливы равенства

$$\nu_{\bullet}^{\gamma}(\mathcal{S}_*(a)) = \nu_{\circ}^{\gamma}(\mathcal{S}_*(a)) = [0, 1).$$

$$\nu_{\bullet}^{\gamma}(\mathcal{S}_*(b)) = \nu_{\circ}^{\gamma}(\mathcal{S}_*(b)) = ([0, 1] \cap \mathbb{I}) \cup \{0\}.$$

Вспомогательное определение

Суслинское множество

Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется суслинским множеством прямой $\mathbb{R}$, если оно является непрерывным образом множества иррациональных чисел, рассматриваемого в естественной топологии.

Обзор результатов

Е.А.Барабанов, А.С.Войделевич, 2016

Построено линейное дифференциальное уравнение третьего порядка с непрерывными на временной полуоси коэффициентами, спектры частот Сергеева знаков которого совпадают с любым наперед заданным суслинским множеством неотрицательной полуоси расширенной числовой прямой, содержащим ноль.

Основной результат

Теорема

Для произвольного содержащего ноль суслинского множества $\mathcal{A} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ существует дифференциальное уравнение $a \in \mathcal{E}^3$, удовлетворяющее при любом $\gamma \in \{-, 0, +\}$ равенствам

$$\hat{\nu}_\bullet^\gamma(\mathcal{S}_*(a)) = \check{\nu}_\bullet^\gamma(\mathcal{S}_*(a)) = \hat{\nu}_\circ^\gamma(\mathcal{S}_*(a)) = \check{\nu}_\circ^\gamma(\mathcal{S}_*(a)) = \mathcal{A}.$$

Литература

- Сергеев И.Н. Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения // Труды Семинара им. И.Г. Петровского. 2006. Вып. 25. С. 249–294.
- Сергеев И.Н. Ляпуновские характеристики колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем// Тр. семинара им. И.Г. Петровского. 2016. Вып. 31. С. 177–219.
- Сергеев И.Н. Колеблемость и блуждаемость решений дифференциального уравнения второго порядка // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 2011. №6. С. 21–26.
- Горицкий А.Ю. Характеристические частоты линейных комбинаций синусов // Дифференц. уравнения. – 2008. – Т. 44, № 6. – С. 860.

Литература

- Смоленцев М.В. Существование периодического линейного дифференциального уравнения третьего порядка с континуальным спектром частот // Дифференц. уравнения. – 2012. – Т. 48, № 11. – С. 1571–1572.
- Барабанов Е.А., Войделевич А.С. Спектры верхних частот Сергеева нулей и знаков линейных дифференциальных уравнений//Доклады НАН Беларуси. 2016. Т. 60. №1. С. 24–31.
- Сташ А.Х., Артисевич А.Е. О множествах значений показателей колеблемости знаков решений дифференциальных уравнений третьего порядка// Дифференц. уравнения. – 2022. – Т. 58, № 6. – С. 862–863.

Спасибо за внимание!