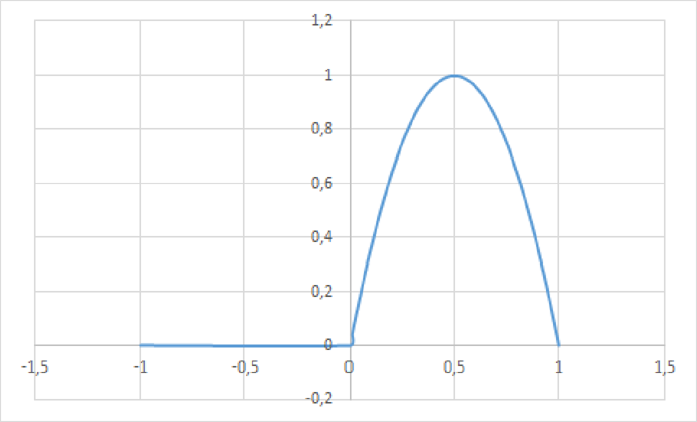
О БЭРОВСКОЙ КЛАССИФКАЦИИ ЛОКАЛЬНОЙ ЭНТРОПИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Ветохин Александр Николаевич

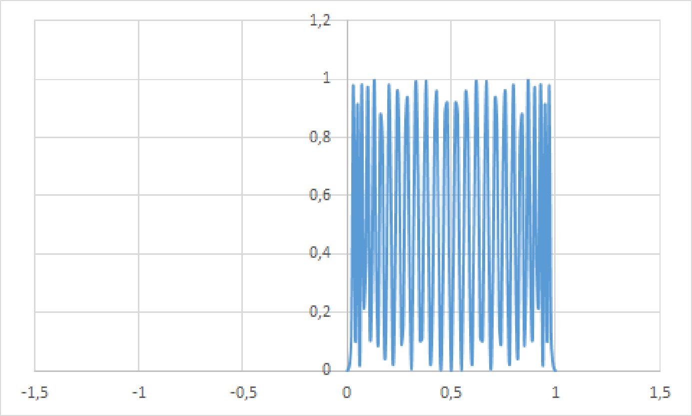
Логистическое отображение

$$\lambda(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } -1 \leqslant x \leqslant 0; \\ 4x(1-x), & \text{при } 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$



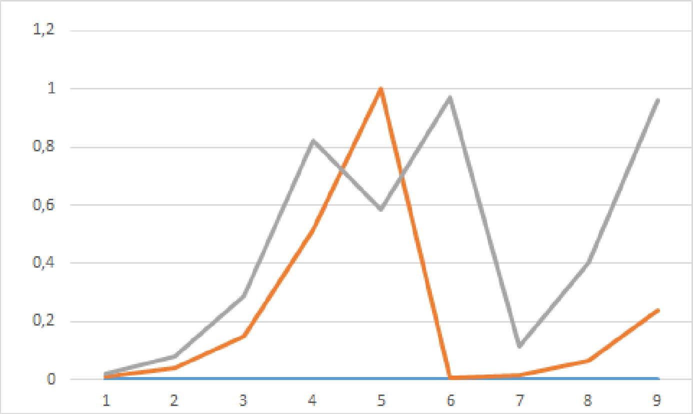
Логистическое отображение

Шестая итерация отображения λ



Логистическое отображение

Траектории трех точек близких в начальный момент



Топологическая энтропия

Пусть X — локально компактное метрическое пространство $f : X \to X$ — непрерывное отображение. Пусть d — исходная метрика на X, определим на X дополнительную систему метрик

$$d_n^f(x,y) = \max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} d(f^i(x), f^i(y)), \quad x, y \in X, \quad n \in \mathbb{N},$$

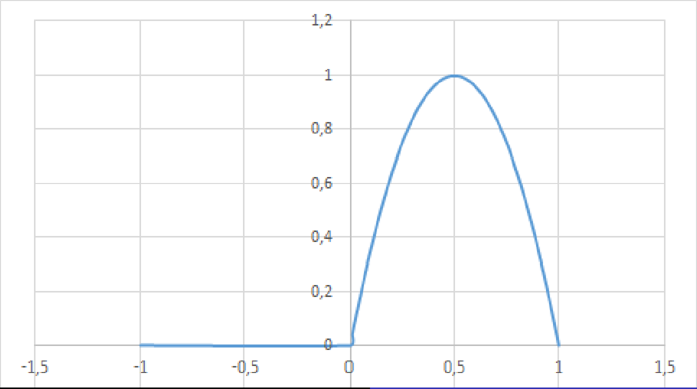
где f^i, $i \in \mathbb{N}$ – i-я итерация отображения f, $f^0 \equiv \mathrm{id}_X$. Зафиксируем точку $x \in X$, для всяких $n \in \mathbb{N}$, $r > 0$ и $\rho > 0$ обозначим через $N_d(f, r, n, x, \rho)$ максимальное число точек в шаре $B_d(x, \rho) = \{y \in X : d(x,y) < \rho\}$, попарные d_n^f-расстояния между которыми больше, чем r.

Локальная энтропия

Локальная энтропия отображения f в точке x определяется формулой [Каток А. Б., Хасселблат Б. 2005 г.]

$$h_d(f, x) = \lim_{r \to 0} \lim_{\rho \to 0} \varlimsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln N_d(f, r, n, x, \rho),$$

Для отображения λ имеем равенство $h_d(\lambda, 0) = \ln 2$.



Разрывы локальной энтропии

Для логистического отображения λ выполнены равенства

$$h_d(\lambda, x) = 0, \text{ при } x \in [-1,\, 0), \quad h_d(\lambda, 0) = \ln 2.$$

Таким образом функция $x \mapsto h_d(\lambda, x)$ является разрывной.
Рассмотрим последовательность отображений

$$\lambda_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}\lambda(nx), & \text{если } x \in [-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}]\ ; \\ 0, & \text{если } x \in [-1, -\frac{1}{n}) \cup (\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

равномерно сходящихся к нулю на отрезке $[-1,\, 1]$. Так как

$$h_d(0,0) = 0, \quad h_d(\lambda_n, 0) = \ln 2, \quad n \in \mathbb{N},$$

то функция $\lambda \mapsto h_d(\lambda, 0)$ является разрывной на пространстве $C([-1,\, 1], [-1,\, 1])$.
Поэтому возникает естественный вопрос о *бэровской классификации* функций $x \mapsto h_d(f, x)$, $f \mapsto h_d(f, x)$, $(f, x) \mapsto h_d(f, x)$.

Определение

Функциями *0-го класса Бэра* на метрическом пространстве $\mathcal{M}$ называются непрерывные функции, и для всякого натурального p функциями *p-го класса Бэра* называются поточечные пределы последовательностей функций $(p-1)$-го класса Бэра.

Пример: функция Дирихле.

$$D(x) = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} (\cos(m!\pi x))^{2n} = \begin{cases} 0, & \text{при } x \notin \mathbb{Q} \cap [0,\,1]; \\ 1, & \text{при } x \in \mathbb{Q} \cap [0,\,1]. \end{cases}$$

Из формулы следует, что функция D принадлежит 2-му классу Бэра, но она всюду разрывна, а следовательно, не принадлежит 1-му классу Бэра.

Теорема 1

Для любого непрерывного отображения $f : X \to X$ функция $x \mapsto h_d(f, x)$ принадлежит второму бэровскому классу на пространстве X, а ее множество точек полунепрерывности снизу является всюду плотным множеством типа G_δ в X.

Возникает естественный вопрос о наименьшем бэровском классе, которому принадлежит функция $x \mapsto h_d(f, x)$. Обозначим через $\mathcal{K}$ совершенное множество Кантора на отрезке $[0, 1]$.

Теорема 2

Если $X = \mathcal{K}$, то существует непрерывное отображение $f : X \to X$ такое, что функция $x \mapsto h_d(f, x)$ всюду разрывна и не принадлежит первому бэровскому классу на пространстве X.

Обозначим через $KC(X,X)$ — пространство непрерывных отображений из X в X с топологией равномерной сходимости на компактах.

Теорема 3

Для любого локально компактного метрического пространства X функция $(f,x) \mapsto h_d(f,x)$ принадлежит третьему бэровскому классу на пространстве $KC(X,X) \times X$.

Из теоремы 3 следует, что для любого $x \in X$ функция $f \mapsto h_d(f,x)$ принадлежит третьему классу Бэра на пространстве $KC(X,X)$.
Возникает естественный вопрос о наименьшем бэровском классе, которому принадлежат функции $f \mapsto h_d(f,x)$ и $(f,x) \mapsto h_d(f,x)$.

Локальная энтропия

Теорема 4

Если $X = \mathcal{K} \times \mathbb{N}$ с метрикой

$$d((x,i),(y,j)) = \begin{cases} |x-y|, & \text{если } i = j; \\ 1, & \text{если } i \neq j, \end{cases}$$

то для любой точки $(x,i) \in X$ функция $f \mapsto h_d(f,(x,i))$ не принадлежит второму бэровскому классу на пространстве $KC(X,X)$.

Из теоремы 4 следует, что функция $(f,x) \mapsto h_d(f,x)$ вообще говоря не принадлежит второму бэровскому классу на пространстве $KC(X,X) \times X$.

Теорема 5

Если $X = \mathcal{K}$, то для любой точки $x \in X$ функция $f \mapsto h_d(f, x)$ не принадлежит первому бэровскому классу на пространстве $C(X, X)$.

Вопрос

Пусть X компактное метрическое пространство. Какому наименьшему классу Бэра принадлежит функция $(f, x) \mapsto h_d(f, x)$ на пространстве $C(X, X) \times X$.

Спасибо за внимание!