О ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА СО СТЕПЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ОБЩЕГО ВИДА

Корчемкина Татьяна

научный руководитель:
Асташова И.В.

2022, Москва

$y^{(n)} = p\left(x,\, y,\, y',\dots,y^{(n-1)}\right)\, |y|^k \operatorname{sgn} y, \quad k > 0$

- *I.T. Kiguradze, T.A. Chanturia* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1990.
- *I.V. Astashova* On power and non-power asymptotic behavior of positive solutions to emden-fowler type higher-order equations // Advances in Difference Equations. SpringerOpen Journal. 2013. No 2013:220. P. 1–15.
- *I.V. Astashova* On asymptotic classification of solutions to nonlinear regular and singular third- and fourth-order differential equations with power nonlinearity // Differential and Difference Equations with Applications. — Vol. 164 of Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. — Springer International Publishing, 2016. — P. 191–204.

$y''' \pm p(x, y, y', y'')|y|^{k_0}|y'|^{k_1}|y''|^{k_2} \operatorname{sgn}(y\, y' y'') = 0,\ k_i > 0$

- $k_1 = k_2 = 0$: Astashova I. V. On asymptotic classification of solutions to nonlinear regular and singular third- and fourth-order differential equations with power nonlinearity // Differential and Difference Equations with Applications. — Vol. 164 of Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. — Springer International Publishing, 2016. — P. 191–204.
- $p = p(x), y > 0$: Евтухов В. М. Об одном классе монотонных решений нелинейного дифференциального уравнения *n*-го порядка типа Эмдена–Фаулера // Сообщ. АН Грузии, 145(2), 1992. С. 269-273.
- $p = p(x), y > 0$: Евтухов В. М., Клопот А. М., Асимптотика некоторых классов решений обыкновенных дифференциальных уравнений *n*-го порядка с правильно меняющимися нелинейностями // Укр. мат. журн., 65(3), 2013, с. 354-380.

$y''' \pm p(x, y, y', y'')|y|^{k_0}|y'|^{k_1}|y''|^{k_2}\mathrm{sgn}(yy'y'') = 0,\ k_i > 0\ (1)$

Определение

Решение $y(x)$ уравнения (1), определенное на промежутке (a, b), возможно, бесконечном, назовем *μ-решением*, если выполнены условия:

1) уравнение не имеет решений, совпадающих с y на некотором подынтервале промежутка (a, b), но отличных от y в некоторой точке промежутка (a, b);

2) для любой конечной граничной точки решение y либо непродолжаемо за нее, либо имеет по крайней мере два продолжения, различающихся в точках, сколь угодно близких к ней.

- *Асташова И. В.*, " Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений" // Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа. Под ред. И. В. Асташовой. М.: ЮНИТИ-ДАНА, с. 22–288 (2012)

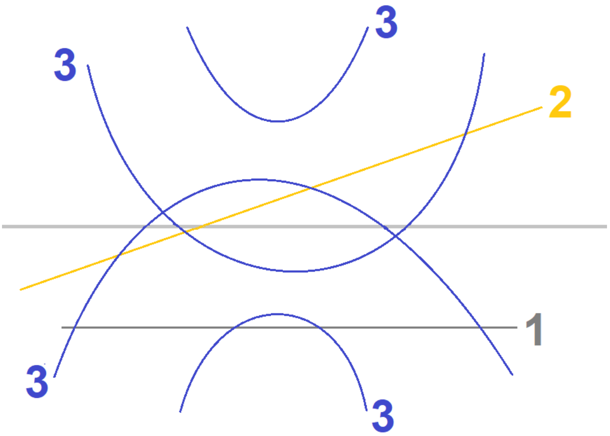
Теорема 1

Пусть функция $p(x, u, v, w)$ непрерывна, липшицева по u, v, w и $0 < m \leq p(x, u, v, w) \leq M$. Пусть $y(x)$ — μ-решение уравнения (1).

Тогда в соответствии со своим качественным поведением μ-решение $y(x)$ относится к одному из следующих типов:

1. постоянное решение $y(x) \equiv y_0$
2. линейная функция $y(x) = ax + b$, $a \neq 0$
3. решение, имеющее ровно один экстремум

$$y''' \pm p(x, y, y', y'')|y|^{k_0}|y'|^{k_1}|y''|^{k_2}\mathrm{sgn}(yy'y'') = 0, \; k_i > 0 \; (1)$$



$y''' + p_0|y|^{k_0}|y'|^{k_1}|y''|^{k_2}\,\mathrm{sgn}(y\,y'y'') = 0,\ k_i > 0 \quad (2)$

Теорема 2

Пусть $p_0 > 0$, $k_0 + k_1 + k_2 \neq 1$, $k_2 - k_0 \neq 2$. Если $y(x)$ — максимально продолженное вправо μ-решение уравнения (2), удовлетворяющее в некоторой точке x_0 условиям $y(x_0) \geq 0$, $y'(x_0) \geq 0$, $y''(x_0) > 0$, то

1) если $0 < k_2 \leq 1$, то

$$y(x), y'(x) \to \text{const},\ y''(x) \to 0 \text{ при } x \to x^* - 0$$

для некоторого $x^* < +\infty$;

причём если $k_0 + k_1 + k_2 < 1$, то $x^* - x_0 \leq \xi\left(y''(x_0)\right)^{-\frac{k_0+k_1+k_2-1}{2k_0+k_1+1}}$, где $\xi = \xi(p_0, k_0, k_1, k_2)$ — константа, не зависящая от решения $y(x)$.

$y''' + p_0|y|^{k_0}|y'|^{k_1}|y''|^{k_2}\operatorname{sgn}(y\,y'y'') = 0,\ k_i > 0 \quad (2)$

2) если $1 < k_2 \le 2$, то

$$y(x) \to +\infty,\ y'(x) \to \text{const},\ y''(x) \to 0 \text{ при } x \to +\infty;$$

3) если $2 < k_2 < 2 + k_0$, то

$$y(x) \to +\infty,\ y'(x) \to \text{const},\ y''(x) \to 0 \text{ при } x \to +\infty,$$

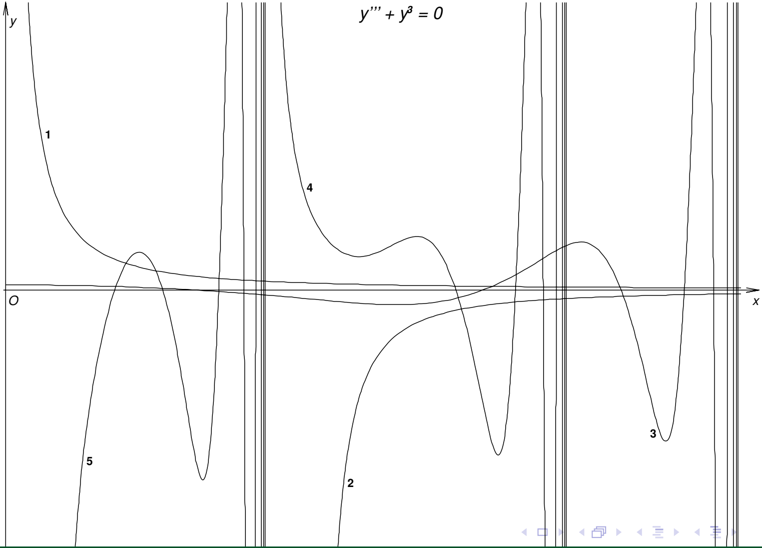
или $y(x),\ y'(x) \to +\infty,\ y''(x) \to 0$ при $x \to +\infty$;

4) если $k_2 > 2 + k_0$, то

$$y(x),\ y'(x) \to +\infty,\ y''(x) \to 0 \text{ при } x \to +\infty.$$

В случаях 2–4 $y(x) = C(p_0)x^{-\alpha}(1 + o(1))$ при $x \to +\infty$, где
$\alpha = \frac{3-2k_2-k_1}{k_0+k_1+k_2-1}$; $C(P) = \left(\frac{|\alpha+2||\alpha+1|^{1-k_2}|\alpha|^{1-k_2-k_1}}{p_0}\right)^{\frac{1}{k_0+k_1+k_2-1}}$

$y''' + p(x, y, y', y'')|y|^k \operatorname{sgn} y = 0, p > 0$ (Асташова И.В.)



Теорема 3

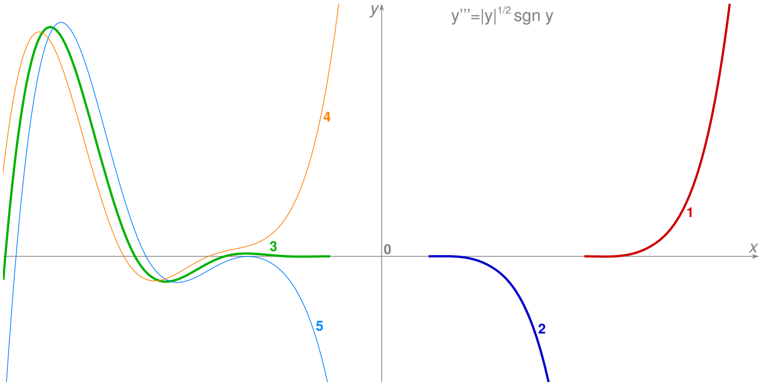
Пусть $k_0 + k_1 + k_2 \neq 1$, $k_1 + 2k_2 \neq 3$, $k_2 \neq 1$, $k_2 \neq 2$, $p_0 > 0$. Если $y(x)$ — максимально продолженное решение уравнения (3), удовлетворяющего в некоторой точке x_0 условиям $y(x_0) \geq 0$, $y'(x_0) \geq 0$ и $y''(x_0) > 0$, то

1. если $k_0 + k_1 + k_2 < 1$, то
   $y \to +\infty$, $y' \to +\infty$, $y'' \to +\infty$ при $x \to +\infty$,
   $$y(x) = C(p_0, k_0, k_1, k_2)(x - x_0)^{-\frac{3-k_1-2k_2}{k_0+k_1+k_2-1}}(1+o(1)), x \to +\infty;$$
2. если $k_0 + k_1 + k_2 > 1$, $k_1 + k_2 < 3$, то
   $y \to +\infty$, $y' \to +\infty$, $y'' \to +\infty$ при $x \to x^* < \infty$,
   $$y(x) = C(p_0, k_0, k_1, k_2)\,(x^* - x)^{-\frac{3-k_1-2k_2}{k_0+k_1+k_2-1}}(1 + o(1)),\quad x \to x^* - 0;$$

2. если $1 < k_2 < 2$, $k_1 + 2k_2 > 3$, то
$y \to y^* < +\infty$, $y' \to +\infty$, $y'' \to +\infty$ при $x \to x^* < \infty$,
$$y(x) = C^*(p_0, y^*, k_0, k_1, k_2)\,(x^* - x)^{-\frac{k_0 - k_2 + 2}{k_0 + k_1 + k_2 - 1}}(1 + o(1)),$$
$$x \to x^* - 0;$$
3. если $k_2 > 2$, то
$y \to y^* < +\infty$, $y' \to y'^* < +\infty$, $y'' \to +\infty$ при
$x \to x^* < \infty$,
$$y(x) = \tilde{C}(p_0, y^*, y'^*, k_0, k_1, k_2)\,(x^* - x)^{2\frac{k_2 - 1}{k_0 + k_2}}(1 + o(1));$$
$$x \to x^* - 0,$$

где C, C^* и $\tilde{C}$ — константы, не зависящие от решения $y(x)$.

$y''' = p(x, y, y', y'')|y|^k \mathrm{sgn}\, y,\ p > 0$ (Асташова И.В.)



Спасибо за внимание!