Оптимизация помогает Твербергу

Полянский Александр Андреевич

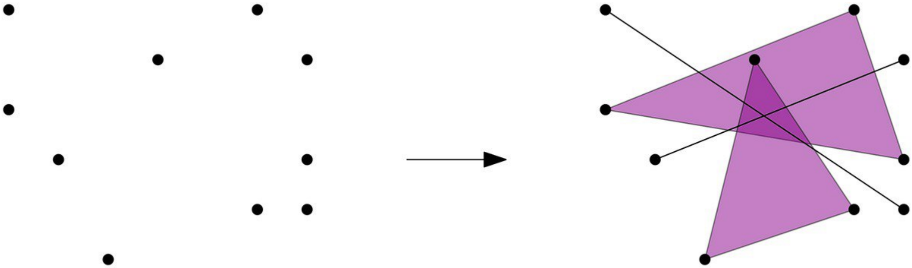
основано на совместной статье с Алексеем Василевским и Олимджоном Пирахмадом и работе с Полиной Барабанщиковой

МФТИ

7 ноября 2022 г.

Теорема Тверберга (1966)

Для любого множества из $(r-1)(d+1)+1$ точек в $\mathbb{R}^d$ существует разбиение на r частей, выпуклые оболочки которых имеют общую точку.



$r=4, d=2$

Теорема Тверберга: подход Руднева

Идея доказательства. Для r-разбиения $\mathcal{P}$ мнжества из $(r-1)(d+1)+1$ точек рассмотрим функцию $H_{\mathcal{P}} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ определённую равенством

$$H_{\mathcal{P}}(x) = \sum_{Y \in \mathcal{P}} \operatorname{dist}^2(x, \operatorname{conv} Y),$$

где $\operatorname{dist}(A, B)$ — это расстояние между множествами $A, B \subset \mathbb{R}^d$. Поскольку $H_{\mathcal{P}}$ — строго выпуклая фукнция она достигает своего минимума.

Теорема Тверберга: подход Руднева

Идея доказательства. Для r-разбиения $\mathcal{P}$ мнжества из $(r-1)(d+1)+1$ точек рассмотрим функцию $H_{\mathcal{P}} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ определённую равенством

$$H_{\mathcal{P}}(x) = \sum_{Y \in \mathcal{P}} \operatorname{dist}^2(x, \operatorname{conv} Y),$$

где $\operatorname{dist}(A, B)$ — это расстояние между множествами $A, B \subset \mathbb{R}^d$. Поскольку $H_{\mathcal{P}}$ — строго выпуклая фукнция она достигает своего минимума.
Выберем такое разбиение $\mathcal{P}_0$ для которого этот минимум принимает наименьшее значение; обозначим его через $m \geq 0$.
1. Если $m = 0$, то мы нашли искомое разбиение.

2. Предположим, что $m > 0$ и достигается в точке $x = x_{\mathcal{P}_0}$.
Анализируя конфигруцию точки $x_{\mathcal{P}_0}$ и $\operatorname{conv} Y$, где $Y \in \mathcal{P}_0$, мы найдём новое r-разбиение $\mathcal{P}_0'$ такое, что

$$H_{\mathcal{P}_0'}(x_{\mathcal{P}_0}) < H_{\mathcal{P}_0}(x_{\mathcal{P}_0}) = m,$$

противоречие.

Теорема Тверберга: подход Руднева

2. Предположим, что $m > 0$ и достигается в точке $x = x_{\mathcal{P}_0}$.
Анализируя конфигруцию точки $x_{\mathcal{P}_0}$ и conv Y, где $Y \in \mathcal{P}_0$, мы найдём новое r-разбиение $\mathcal{P}_0'$ такое, что

$$H_{\mathcal{P}_0'}(x_{\mathcal{P}_0}) < H_{\mathcal{P}_0}(x_{\mathcal{P}_0}) = m,$$

противоречие.
Более того, разбиение $\mathcal{P}_0'$ получается из разбиения $\mathcal{P}_0$ перемещением одной точки между двумя множествами.

Оптимизационные подход

Краткий план.

1. Выбрать правильную функцию $H_{\mathcal{P}} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

2. Минимизировать над $\mathbb{R}^d$

3. Найти оптимальное разбиение $\mathcal{P}_0$

4. Предположим (противное), что $\mathcal{P}_0$ не удовлетворяет утверждению теоремы.

5. Найдём новое разбиение $\mathcal{P}_0'$ такое, что $\min H_{\mathcal{P}_0'}$ меньше $\min H_{\mathcal{P}_0}$

Паросочетание Тверберга

Для точек $x, y \in \mathbb{R}^d$ обозначим через $D(xy)$ замкнутый шар с диаметром xy. Совершенное паросочетание $\mathcal{M}$ чётного числа точек в $\mathbb{R}^d$ называется паросочетанием Тверберга, если

$$\bigcap_{xy \in \mathcal{M}} D(xy) \neq \varnothing.$$

Паросочетание Тверберга

Для точек $x, y \in \mathbb{R}^d$ обозначим через $D(xy)$ замкнутый шар с диаметром xy. Совершенное паросочетание $\mathcal{M}$ чётного числа точек в $\mathbb{R}^d$ называется паросочетанием Тверберга, если

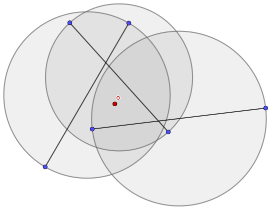
$$\bigcap_{xy \in \mathcal{M}} D(xy) \neq \varnothing.$$

Заменяя **замкнутые** шары на **открытые** шары в определении, мы определим **открытое паросочетание Тверберга**.

Теорема типа Тверберга

Теорема (Василевский, Пирахмад, П., 2022).

Для любого чётного числа различных точек в $\mathbb{R}^d$ существует открытое паросочетание Тверберга.



Теоремы типа Тверберга

Теорема (Василевский Пирахмад, П. 2022).

Для любых n красных точек и n синих точек в $\mathbb{R}^d$, существует красно-синее паросочетание Тверберга (каждое ребро этого паросочетания соединяет красную вершину с синей).

Доказательство теоремы

- Обозначим через $\mathcal{R}$ и $\mathcal{B}$ множества из n красных точек и n синих точек в $\mathbb{R}^d$.
- Выберем красно-синий матчинг $\mathcal{M}^*$, который будет "экстремальным" для некоторой функции. Для какой именно мы выясним позже.

Доказательство теоремы

- Обозначим через $\mathcal{R}$ и $\mathcal{B}$ множества из n красных точек и n синих точек в $\mathbb{R}^d$.
- Выберем красно-синий матчинг $\mathcal{M}^*$, который будет "экстремальным" для некоторой функции. Для какой именно мы выясним позже.
- Рассмотрим функцию $H_{\mathcal{M}^*} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, определённую равенством

$$H_{\mathcal{M}^*}(x) = \max\left\{\langle r - x, b - x\rangle : rb \in \mathcal{M}^*\right\}.$$

- Если $H_{\mathcal{M}^*}(x) \leq 0$ для некоторого $x \in \mathbb{R}^d$, то мы завершаем доказательство.

Доказательство теоремы

- БОО положим, что $H_{\mathcal{M}^*}$ достигает минимума в точке o и $H_{\mathcal{M}^*}(o) > 0$.

Доказательство теоремы

- БОО положим, что $H_{\mathcal{M}^*}$ достигает минимума в точке o и $H_{\mathcal{M}^*}(o) > 0$.
- Нетрудно показать, что o лежит в выпуклой оболочке середин рёбер $rb \in \mathcal{M}'$ таких, что $\langle r, b \rangle = H_{\mathcal{M}^*}(o)$. Обозначим через $\mathcal{M}_0 = \{r_1 b_1, \ldots, r_m b_m\}$ множество таких пар, где $r_i \in \mathcal{R}$ и $b_i \in \mathcal{B}$.

Доказательство теоремы

- БОО положим, что $H_{\mathcal{M}^*}$ достигает минимума в точке o и $H_{\mathcal{M}^*}(o) > 0$.
- Нетрудно показать, что o лежит в выпуклой оболочке середин рёбер $rb \in \mathcal{M}'$ таких, что $\langle r, b \rangle = H_{\mathcal{M}^*}(o)$. Обозначим через $\mathcal{M}_0 = \{r_1 b_1, \ldots, r_m b_m\}$ множество таких пар, где $r_i \in \mathcal{R}$ и $b_i \in \mathcal{B}$.
- Тогда
$$o = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (r_i + b_i), \text{ где } \lambda_i \geq 0 \text{ и } \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1.$$
Поэтому
$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i r_i = -\sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i.$$
- Значит
$$0 \geq \left\langle \sum_{i=1}^{m} \lambda_i r_i, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i \right\rangle.$$

Доказательство теоремы

$$0 \geq \left\langle \sum_{i=1}^{m} \lambda_i r_i, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i \right\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2 \langle r_i, b_i \rangle + \sum_{1 \leq i < j \leq m} \lambda_i \lambda_j \Big(\langle r_i, b_j \rangle + \langle r_j, b_i \rangle \Big).$$

Доказательство теоремы

$$0 \geq \left\langle \sum_{i=1}^{m} \lambda_i r_i, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i \right\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2 \langle r_i, b_i \rangle + \sum_{1 \leq i < j \leq m} \lambda_i \lambda_j \Big(\langle r_i, b_j \rangle + \langle r_j, b_i \rangle \Big).$$

- Используя $\langle r_i, b_i \rangle = H_{\mathcal{M}^*}(o)$ и предполагая $\langle r_i, b_j \rangle + \langle r_j, b_i \rangle \geq 2H_{\mathcal{M}'}(o)$ для всех различных i и j, мы получаем

Доказательство теоремы

$$0 \geq \Big\langle \sum_{i=1}^{m} \lambda_i r_i, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i \Big\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2 \langle r_i, b_i \rangle + \sum_{1 \leq i < j \leq m} \lambda_i \lambda_j \Big(\langle r_i, b_j \rangle + \langle r_j, b_i \rangle \Big).$$

- Используя $\langle r_i, b_i \rangle = H_{\mathcal{M}^*}(o)$ и предполагая $\langle r_i, b_j \rangle + \langle r_j, b_i \rangle \geq 2H_{\mathcal{M}'}(o)$ для всех различных i и j, мы получаем

$$0 \geq H_{\mathcal{M}'}(o) \cdot \big(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \big)^2 = H_{\mathcal{M}'}(o) > 0,$$

противоречие.

Доказательство теоремы

- Тогда $\langle r_i, b_j \rangle + \langle r_j, b_i \rangle < 2H_{\mathcal{M}'}(o) = \langle r_i, b_i \rangle + \langle r_j, b_j \rangle$ для некоторых различных i и j.

Доказательство теоремы

- Тогда $\langle r_i, b_j\rangle + \langle r_j, b_i\rangle < 2H_{\mathcal{M}'}(o) = \langle r_i, b_i\rangle + \langle r_j, b_j\rangle$ для некоторых различных i и j.
- Теперь рассмотрим новое красно-синее паросочетание

$$\mathcal{M}' = \mathcal{M}^* \setminus \{r_i b_i, r_j b_j\} \cup \{r_i b_j, r_j b_i\},$$

удовлетворяющий неравенству

$$\sum_{rb\in\mathcal{M}'} \langle r, b\rangle < \sum_{rb\in\mathcal{M}^*} \langle r, b\rangle.$$

Доказательство теоремы

- Тогда $\langle r_i, b_j \rangle + \langle r_j, b_i \rangle < 2H_{\mathcal{M}'}(o) = \langle r_i, b_i \rangle + \langle r_j, b_j \rangle$ для некоторых различных i и j.
- Теперь рассмотрим новое красно-синее паросочетание

$$\mathcal{M}' = \mathcal{M}^* \setminus \{r_i b_i, r_j b_j\} \cup \{r_i b_j, r_j b_i\},$$

удовлетворяющий неравенству

$$\sum_{rb \in \mathcal{M}'} \langle r, b \rangle < \sum_{rb \in \mathcal{M}^*} \langle r, b \rangle.$$

- Для того, чтобы завершить доказательство можно потребовать, чтобы последнее неравенство противоречило бы нашему выбору $\mathcal{M}^*$.
- Последнее можно сделать, если выбрать красно-синее паросочетание $\mathcal{M}^*$ максимизирующее следующую функцию

Доказательство теоремы

- Тогда $\langle r_i, b_j\rangle + \langle r_j, b_i\rangle < 2H_{\mathcal{M}'}(o) = \langle r_i, b_i\rangle + \langle r_j, b_j\rangle$ для некоторых различных i и j.
- Теперь рассмотрим новое красно-синее паросочетание

$$\mathcal{M}' = \mathcal{M}^* \setminus \{r_i b_i, r_j b_j\} \cup \{r_i b_j, r_j b_i\},$$

удовлетворяющий неравенству

$$\sum_{rb\in\mathcal{M}'} \langle r, b\rangle < \sum_{rb\in\mathcal{M}^*} \langle r, b\rangle.$$

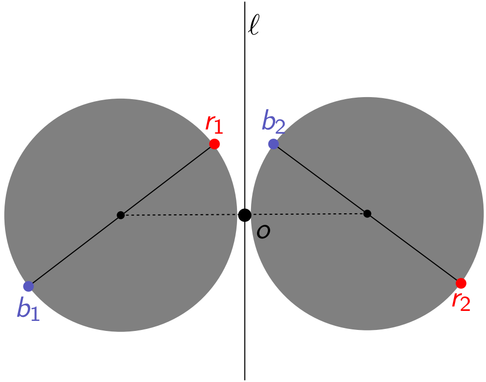
- Для того, чтобы завершить доказательство можно потребовать, чтобы последнее неравенство противоречило бы нашему выбору $\mathcal{M}^*$.
- Последнее можно сделать, если выбрать красно-синее паросочетание $\mathcal{M}^*$ максимизирующее следующую функцию

$$Q(\mathcal{M}) = \sum_{rb\in\mathcal{M}} (r-b)^2 = \sum_{r\in\mathcal{R}} r^2 + \sum_{b\in\mathcal{B}} b^2 - 2\sum_{rb\in\mathcal{M}} \langle r, b\rangle,$$

План доказательства

- Выбираем красно-синее паросочетание $\mathcal{M}^*$ максимизирующую функцию Q, зависящую от красно-синих паросочетания.
- После этого рассматриваем фукнцию $H_{\mathcal{M}^*} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ такую, что если $H_{\mathcal{M}^*}(x) \leq 0$, то задача решена.
- Поэтому предполагаем, что $H_{\mathcal{M}^*}(x) > 0$.
- Исследуя точку минимума фукнции $H_{\mathcal{M}^*}$, удаётся найти паросочетание $\mathcal{M}'$ такое, что $Q(\mathcal{M}') > Q(\mathcal{M}^*)$, противоречие.

Обсуждение



Обобщённый оптимизационный подход

Краткий план.

1. Выбираем правильную функцию $H_{\mathcal{P}} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

2. Минимизируем её над $\mathbb{R}^d$

3. Для некоторой функции Q (возможно совпадающей с H), зависящей от забиения, находим разбиение $\mathcal{P}_0$, которое максимизирует эту функцию.

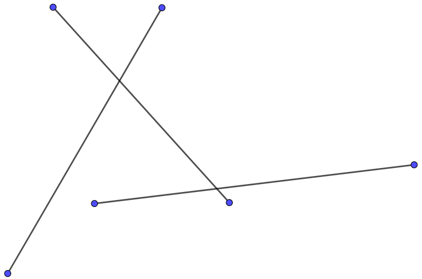
4. Предполагаем (противное), что разбиение $\mathcal{P}_0$ не удовлетворяет условию теоремы.

5. Находим новое разбиение $\mathcal{P}_0'$ такое, что $Q(\mathcal{P}_0') > Q(\mathcal{P}_0)$, противоречие.

Максимальные по сумме паросочетания

Паросочетание $\mathcal{M}$ чётного числа точек в $\mathbb{R}^d$ называется **максимальным**, если оно максимизирует сумму евликдовых расстояний рёбер этого паросочтения

$$\sum_{ab \in \mathcal{M}} \|a - b\| \to max.$$

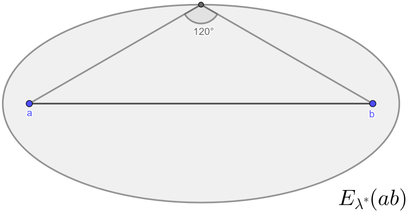


Эллипс

Для пары точек $a, b \in \mathbb{R}^2$ и коэффициента $\lambda > 0$ обозначим через $E_\lambda(ab)$ эллипс с фокусами a и b и эксцентриситетом $1/\lambda$, то есть

$$E_\lambda(ab) := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|a - x\| + \|b - x\| \leq \lambda \|a - b\|\}.$$

Положим $\lambda^* := \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.1547$.



Гипотеза Фингерхата

Гипотеза Фингерхата (1995)

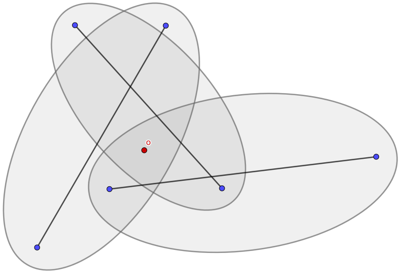
Для любого максимального паросочетания $\mathcal{M}$ для четного числа точек на плоскости, соответствующие эллипсы с коэффициентом λ^* пересекаются, то есть

$$\bigcap_{ab\in\mathcal{M}} E_{\lambda^*}(ab) \neq \varnothing.$$

Гипотеза Фингерхата (1995)

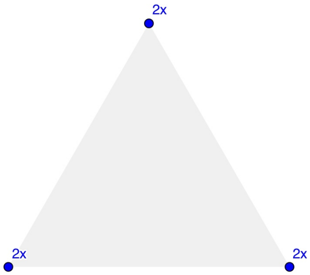
Для любого максимального паросочетания $\mathcal{M}$ для четного числа точек на плоскости, соответствующие эллипсы с коэффициентом λ^* пересекаются, то есть

$$\bigcap_{ab \in \mathcal{M}} E_{\lambda^*}(ab) \neq \varnothing.$$



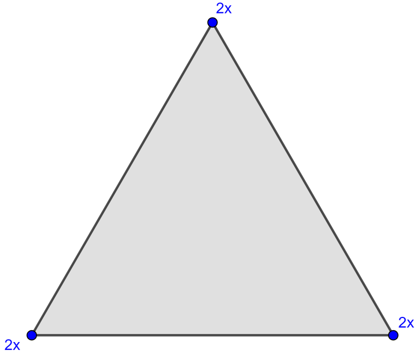
Гипотеза Фингерхата - оценка снизу

Рассмотрим вершины правильного треугольника, каждая из которых взята дважды.



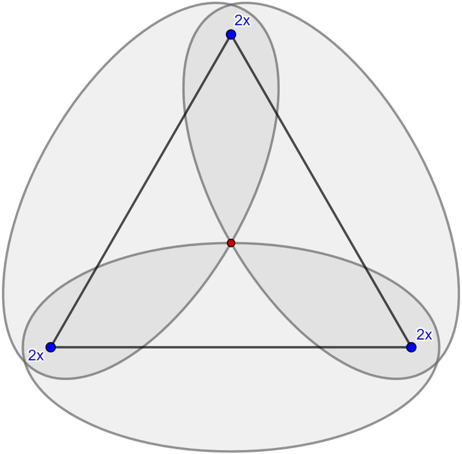
Гипотеза Фигерхата - оценка снизу

Максильное паросочетание для этих шести точек задаётся сторонами треугольника.

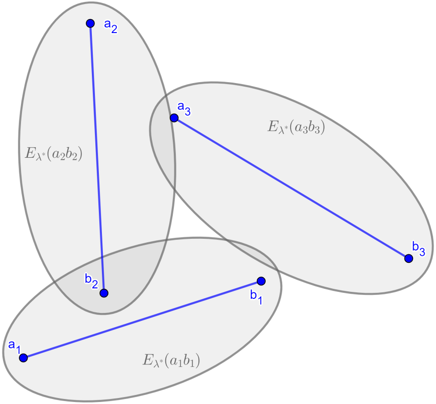


Гипотеза Фигерхата - оценка снизу

Соотвествующие три эллипса пересекаются.

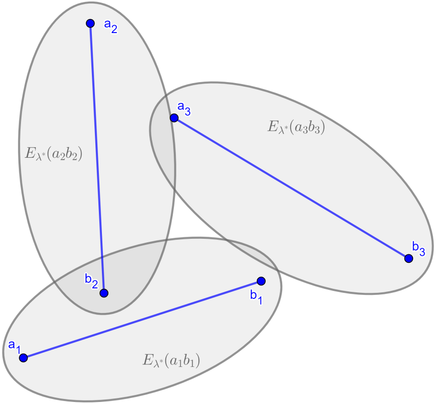


Гипотеза Фингерхата - идея доказательства



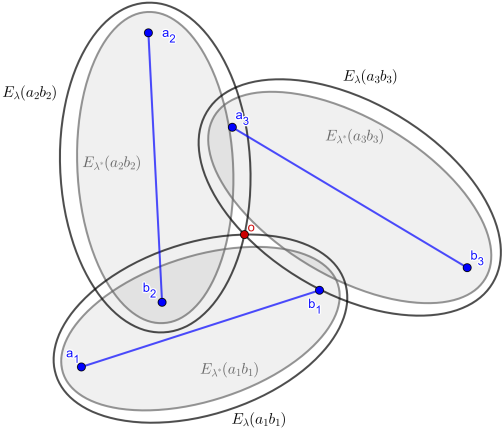
1. По теореме Хелли достаточно доказать теорему для $n = 2, 3$

Гипотеза Фингерхата - идея доказательства



2. Предположим противное для $S \subset \mathbb{R}^2$ и максимального паросочетания $\mathcal{M}$ для S соотвествующие эллипсы не пересекаются.

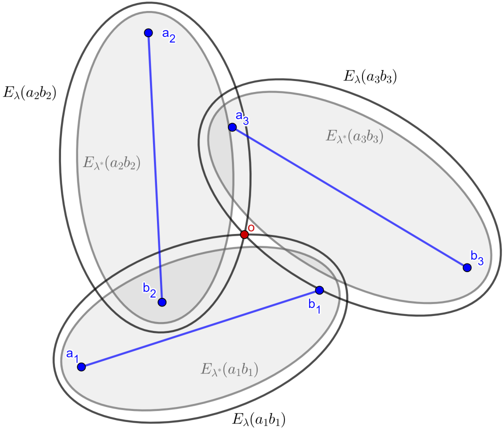
Гипотеза Фингерхата - идея доказательства



$$g_{ab}(x) := \frac{\|a - x\| + \|b - x\|}{\|a - b\|} \qquad H(x) := \max_{ab \in \mathcal{M}} g_{ab}(x) \to \min_{x \in \mathbb{R}^2}$$

$$o := \operatorname{argmin} H(x)$$

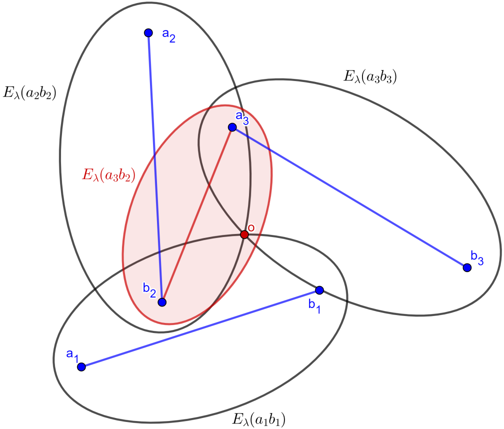
Гипотеза Фингерхата - идея доказательства



$$g_{ab}(x) := \frac{\|a-x\|+\|b-x\|}{\|a-b\|} \qquad H(x) := \max_{ab\in\mathcal{M}} g_{ab}(x) \to \min_{x\in\mathbb{R}^2}$$

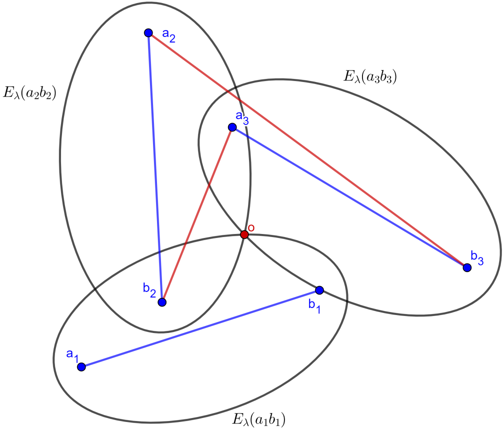
$$o := \operatorname{argmin} H(x) \qquad \lambda := H(o) > \lambda^*$$

Гипотеза Фингерхата - идея доказательства



$$E_b = \mathcal{M} \qquad E_r = \{vu : \|v\| + \|u\| < \lambda\|v - u\|\}$$

Гипотеза Фингерхата - чередующиеся циклы



$$\|a_2 - b_2\| = \frac{1}{\lambda}(\|a_2\| + \|b_2\|) \qquad \|a_2 - b_3\| > \frac{1}{\lambda}(\|a_2\| + \|b_3\|)$$

$$\|a_3 - b_3\| = \frac{1}{\lambda}(\|a_3\| + \|b_3\|) \qquad \|a_3 - b_2\| > \frac{1}{\lambda}(\|a_3\| + \|b_2\|)$$