Совершенные раскраски гиперграфов и их спектры

к.ф.-м.н. Тараненко А. А.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Вторая конференция Математических центров

7 ноября 2022 г.

Совершенные раскраски графов

$G = (V, E)$ – граф: V – множество вершин, E – множество ребер.

Совершенная k-раскраска – это отображение f из множества вершин во множество цветов $\{1, \ldots, k\}$ такое, что любая вершина цвета i смежна ровно с $s_{i,j}$ вершинами цвета j.

Совершенные раскраски графов

$G = (V, E)$ – граф: V – множество вершин, E – множество ребер.

Совершенная k-раскраска – это отображение f из множества вершин во множество цветов $\{1, \dots, k\}$ такое, что любая вершина цвета i смежна ровно с $s_{i,j}$ вершинами цвета j.

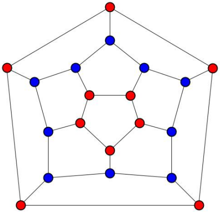
$S = (s_{i,j})$ – матрица параметров совершенной раскраски.

Совершенные раскраски графов

$G = (V, E)$ – граф: V – множество вершин, E – множество ребер.

Совершенная k-раскраска – это отображение f из множества вершин во множество цветов $\{1, \ldots, k\}$ такое, что любая вершина цвета i смежна ровно с $s_{i,j}$ вершинами цвета j.

$S = (s_{i,j})$ – матрица параметров совершенной раскраски.



$$S = \begin{array}{c|cc} & r & b \\ \hline r & 2 & 1 \\ b & 1 & 2 \end{array}$$

Собственные числа графов и раскрасок

Матрица смежности $A = \{a_{i,j}\}$ графа G: $a_{i,j} = 1$ если (i, j) – ребро, $a_{i,j} = 0$ иначе.
Собственные числа и собственные вектора графа G – это собственные числа и вектора его матрицы смежности A.

Собственные числа графов и раскрасок

Матрица смежности $A = \{a_{i,j}\}$ графа G: $a_{i,j} = 1$ если (i, j) – ребро, $a_{i,j} = 0$ иначе.
Собственные числа и собственные вектора графа G – это собственные числа и вектора его матрицы смежности A.

Матрица раскраски – это $(0, 1)$-матрица P, $p_{x,j} = 1 \Leftrightarrow f(x) = j$.
Раскраска P – совершенная тогда и только тогда, когда

$$AP = PS.$$

Собственные числа графов и раскрасок

Матрица смежности $A = \{a_{i,j}\}$ графа G: $a_{i,j} = 1$ если (i,j) – ребро, $a_{i,j} = 0$ иначе.
Собственные числа и собственные вектора графа G – это собственные числа и вектора его матрицы смежности A.

Матрица раскраски – это $(0,1)$-матрица P, $p_{x,j} = 1 \Leftrightarrow f(x) = j$.
Раскраска P – совершенная тогда и только тогда, когда

$$AP = PS.$$

Любое собственное число матрицы параметров S совершенной раскраски является собственным числом матрицы смежности A.

Накрытия графов

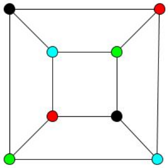
Накрытие графа H графом G – это совершенная раскраска G с матрицей параметров равной матрице смежности H.

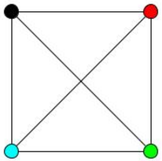
Накрытия графов

Накрытие графа H графом G – это совершенная раскраска G с матрицей параметров равной матрице смежности H.

G накрывает H тогда и только тогда, когда существует локальный изоморфизм ψ:

- ψ – сюръективно;
- ψ отображает вершины (ребра) в вершины (ребра);
- для каждой вершины ψ – это биекция на инцидентных ребрах.





Мотивация

Если f – совершенная раскраска H с матрицей параметров S и ψ – накрытие H графом G, то $\psi \circ f$ – совершенная раскраска G с матрицей параметров S.

Мотивация

Если f – совершенная раскраска H с матрицей параметров S и ψ – накрытие H графом G, то $\psi \circ f$ – совершенная раскраска G с матрицей параметров S.

Совершенные раскраски и накрытия графов образуют решетку относительно разбиений цветов.

Мотивация

Если f – совершенная раскраска H с матрицей параметров S и ψ – накрытие H графом G, то $\psi \circ f$ – совершенная раскраска G с матрицей параметров S.

Совершенные раскраски и накрытия графов образуют решетку относительно разбиений цветов.

Приложения накрытий и совершенных раскрасок

- проблема изоморфизма графов;
- построение трансверсалей, паросочетаний и других структур в графах;
- классификация и конструкции графов.

Мотивация

Если f – совершенная раскраска H с матрицей параметров S и ψ – накрытие H графом G, то $\psi \circ f$ – совершенная раскраска G с матрицей параметров S.

Совершенные раскраски и накрытия графов образуют решетку относительно разбиений цветов.

Приложения накрытий и совершенных раскрасок

- проблема изоморфизма графов;
- построение трансверсалей, паросочетаний и других структур в графах;
- классификация и конструкции графов.

Задача: развить аналогичную теорию для гиперграфов

Гиперграфы, их матрица и граф инцидентности

$\mathcal{G}(X, E)$ – гиперграф: X – множество вершин, $|X| = n$,
E – множество гиперребер, $|E| = m$.

Гиперграфы, их матрица и граф инцидентности

$\mathcal{G}(X, E)$ – гиперграф: X – множество вершин, $|X| = n$,
E – множество гиперребер, $|E| = m$.

Матрица инцидентности B гиперграфа $\mathcal{G}$ – это $(0,1)$-матрица размеров $n \times m$, (x, e)-элемент которой равен $1 \Leftrightarrow x \in e$ в $\mathcal{G}$.

Гиперграфы, их матрица и граф инцидентности

$\mathcal{G}(X, E)$ – гиперграф: X – множество вершин, $|X| = n$,
E – множество гиперребер, $|E| = m$.

Матрица инцидентности B гиперграфа $\mathcal{G}$ – это $(0, 1)$-матрица размеров $n \times m$, (x, e)-элемент которой равен $1 \Leftrightarrow x \in e$ в $\mathcal{G}$.

Степень $deg(x)$ вершины $x \in X$ = число гиперребер, содержащих x.
Гиперграф r-регулярный, если все вершины имеют степень r.
Гиперграф d-однородный, если каждое гиперребро состоит ровно из d вершин.

Гиперграфы, их матрица и граф инцидентности

$\mathcal{G}(X, E)$ – гиперграф: X – множество вершин, $|X| = n$,
E – множество гиперребер, $|E| = m$.

Матрица инцидентности B гиперграфа $\mathcal{G}$ – это $(0, 1)$-матрица размеров $n \times m$, (x, e)-элемент которой равен 1 $\Leftrightarrow$ $x \in e$ в $\mathcal{G}$.

Степень $deg(x)$ вершины $x \in X$ = число гиперребер, содержащих x.
Гиперграф r-регулярный, если все вершины имеют степень r.
Гиперграф d-однородный, если каждое гиперребро состоит ровно из d вершин.

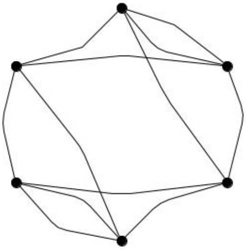
Граф инцидентности G для гиперграфа $\mathcal{G}(X, E)$ – это двудольный граф с долями X и E, где x смежно с e в G $\Leftrightarrow$ x инцидентно e в $\mathcal{G}$.
Матрица смежности A_G графа инцидентности G:

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix}.$$

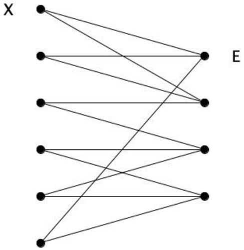
Пример

$\mathcal{G}(X, E)$ – 2-регулярный 3-однородный гиперграф на 6 вершинах с 4 гиперребрами.

$\mathcal{G}(X, E)$



$G(X, E; W)$



$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Многомерная матрица смежности

d-мерная матрица $\mathbb{A}$ порядка n – это массив (a_α), $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, $\alpha_i \in \{1, \dots, n\}$.

Многомерная матрица смежности

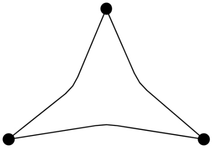
d-мерная матрица $\mathbb{A}$ порядка n – это массив (a_α), $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$, $\alpha_i \in \{1, \ldots, n\}$.

Матрица смежности $\mathbb{A}$ для d-однородного гиперграфа $\mathcal{G}$ на n вершинах – это d-мерная $(0, 1)$-матрица порядка n с элементами $a_\alpha = \frac{1}{(d-1)!} \Leftrightarrow (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ – гиперребро в $\mathcal{G}$.

Многомерная матрица смежности

d-мерная матрица $\mathbb{A}$ порядка n – это массив (a_α), $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, $\alpha_i \in \{1, \dots, n\}$.

Матрица смежности $\mathbb{A}$ для d-однородного гиперграфа $\mathcal{G}$ на n вершинах – это d-мерная $(0,1)$-матрица порядка n с элементами $a_\alpha = \frac{1}{(d-1)!} \Leftrightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ – гиперребро в $\mathcal{G}$.



$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Произведение многомерных матриц

$\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ – d-мерная и t-мерная матрицы порядка n.

Произведение $\mathbb{A} \circ \mathbb{B}$ – это $((d-1)(t-1)+1)$-мерная матрица $\mathbb{C}$ порядка n с элементами

$$c_{i,\beta^2,\ldots,\beta^d} = \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_d=1}^{n} a_{i,i_2,\ldots,i_d} \cdot b_{i_2,\beta^2} \cdots b_{i_d,\beta^d},$$

где индексы $\beta^2, \ldots, \beta^d \in [n]^{t-1}$, $i \in [n]$.

Произведение многомерных матриц

$\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ – d-мерная и t-мерная матрицы порядка n.

Произведение $\mathbb{A} \circ \mathbb{B}$ – это $((d-1)(t-1)+1)$-мерная матрица $\mathbb{C}$ порядка n с элементами

$$c_{i,\beta^2,\ldots,\beta^d} = \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_d=1}^{n} a_{i,i_2,\ldots,i_d} \cdot b_{i_2,\beta^2} \cdots b_{i_d,\beta^d},$$

где индексы $\beta^2, \ldots, \beta^d \in [n]^{t-1}$, $i \in [n]$.

Свойства произведения

- Если $dim(\mathbb{A}), dim(\mathbb{B}) \leq 2$, то $\mathbb{A} \circ \mathbb{B} = \mathbb{A}\mathbb{B}$.

Произведение многомерных матриц

$\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ – d-мерная и t-мерная матрицы порядка n.

Произведение $\mathbb{A} \circ \mathbb{B}$ – это $((d-1)(t-1)+1)$-мерная матрица $\mathbb{C}$ порядка n с элементами

$$c_{i,\beta^2,\dots,\beta^d} = \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_d=1}^{n} a_{i,i_2,\dots,i_d} \cdot b_{i_2,\beta^2} \cdots b_{i_d,\beta^d},$$

где индексы $\beta^2,\dots,\beta^d \in [n]^{t-1}$, $i \in [n]$.

Свойства произведения

- Если $dim(\mathbb{A}), dim(\mathbb{B}) \leq 2$, то $\mathbb{A} \circ \mathbb{B} = \mathbb{A}\mathbb{B}$.
- $(\mathbb{A} \circ \mathbb{B}) \circ \mathbb{C} = \mathbb{A} \circ (\mathbb{B} \circ \mathbb{C})$

Произведение многомерных матриц

$\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ – d-мерная и t-мерная матрицы порядка n.

Произведение $\mathbb{A} \circ \mathbb{B}$ – это $((d-1)(t-1)+1)$-мерная матрица $\mathbb{C}$ порядка n с элементами

$$c_{i,\beta^2,\dots,\beta^d} = \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_d=1}^{n} a_{i,i_2,\dots,i_d} \cdot b_{i_2,\beta^2} \cdots b_{i_d,\beta^d},$$

где индексы $\beta^2, \dots, \beta^d \in [n]^{t-1}$, $i \in [n]$.

Свойства произведения

- Если $dim(\mathbb{A}), dim(\mathbb{B}) \leq 2$, то $\mathbb{A} \circ \mathbb{B} = \mathbb{A}\mathbb{B}$.
- $(\mathbb{A} \circ \mathbb{B}) \circ \mathbb{C} = \mathbb{A} \circ (\mathbb{B} \circ \mathbb{C})$
- $\mathbb{A} \circ (\lambda \mathbb{B}) = \lambda^{d-1} (\mathbb{A} \circ \mathbb{B})$

Произведение многомерных матриц

$\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ – d-мерная и t-мерная матрицы порядка n.

Произведение $\mathbb{A} \circ \mathbb{B}$ – это $((d-1)(t-1)+1)$-мерная матрица $\mathbb{C}$ порядка n с элементами

$$c_{i,\beta^2,\dots,\beta^d} = \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_d=1}^{n} a_{i,i_2,\dots,i_d} \cdot b_{i_2,\beta^2} \cdots b_{i_d,\beta^d},$$

где индексы $\beta^2, \dots, \beta^d \in [n]^{t-1}$, $i \in [n]$.

Свойства произведения

- Если $dim(\mathbb{A}), dim(\mathbb{B}) \leq 2$, то $\mathbb{A} \circ \mathbb{B} = \mathbb{A}\mathbb{B}$.
- $(\mathbb{A} \circ \mathbb{B}) \circ \mathbb{C} = \mathbb{A} \circ (\mathbb{B} \circ \mathbb{C})$
- $\mathbb{A} \circ (\lambda \mathbb{B}) = \lambda^{d-1}(\mathbb{A} \circ \mathbb{B})$
- Если v – вектор, то $\mathbb{A} \circ v$ – это вектор.

Произведение многомерных матриц

$\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ – d-мерная и t-мерная матрицы порядка n.

Произведение $\mathbb{A} \circ \mathbb{B}$ – это $((d-1)(t-1)+1)$-мерная матрица $\mathbb{C}$ порядка n с элементами

$$c_{i,\beta^2,\dots,\beta^d} = \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_d=1}^{n} a_{i,i_2,\dots,i_d} \cdot b_{i_2,\beta^2} \cdots b_{i_d,\beta^d},$$

где индексы $\beta^2,\dots,\beta^d \in [n]^{t-1}$, $i \in [n]$.

Свойства произведения

- Если $dim(\mathbb{A}), dim(\mathbb{B}) \leq 2$, то $\mathbb{A} \circ \mathbb{B} = \mathbb{A}\mathbb{B}$.
- $(\mathbb{A} \circ \mathbb{B}) \circ \mathbb{C} = \mathbb{A} \circ (\mathbb{B} \circ \mathbb{C})$
- $\mathbb{A} \circ (\lambda \mathbb{B}) = \lambda^{d-1}(\mathbb{A} \circ \mathbb{B})$
- Если v – вектор, то $\mathbb{A} \circ v$ – это вектор.
- Если P – 2-мерная матрица и $\mathbb{A}$ – d-мерная матрица, то $\mathbb{A} \circ P$ и $P \circ \mathbb{A}$ – d-мерные матрицы.

Собственные числа многомерных матриц и гиперграфов

$\mathbb{A}$ – d-мерная матрица порядка n.
$\mathbb{I}$ – d-мерная единичная матрица порядка n (1 на главной диагонали, 0 вне ее).

Собственные числа многомерных матриц и гиперграфов

$\mathbb{A}$ – d-мерная матрица порядка n.
$\mathbb{I}$ – d-мерная единичная матрица порядка n (1 на главной диагонали, 0 вне ее).

$\lambda \in \mathbb{C}$ – собственное число и $x \in \mathbb{C}^n$ – собственный вектор $\mathbb{A}$, если

$$\mathbb{A} \circ x = \lambda(\mathbb{I} \circ x).$$

Собственные числа многомерных матриц и гиперграфов

$\mathbb{A}$ – d-мерная матрица порядка n.
$\mathbb{I}$ – d-мерная единичная матрица порядка n (1 на главной диагонали, 0 вне ее).

$\lambda \in \mathbb{C}$ – собственное число и $x \in \mathbb{C}^n$ – собственный вектор $\mathbb{A}$, если

$$\mathbb{A} \circ x = \lambda(\mathbb{I} \circ x).$$

Теорема (Qi, 2005)

Существует характеристический полином $\varphi_{\mathbb{A}}$ степени $n(d-1)^{n-1}$ такой, что λ – собственное число $\mathbb{A} \Leftrightarrow \lambda$ – корень $\varphi_{\mathbb{A}}$.

Собственные числа многомерных матриц и гиперграфов

$\mathbb{A}$ – d-мерная матрица порядка n.
$\mathbb{I}$ – d-мерная единичная матрица порядка n (1 на главной диагонали, 0 вне ее).

$\lambda \in \mathbb{C}$ – собственное число и $x \in \mathbb{C}^n$ – собственный вектор $\mathbb{A}$, если

$$\mathbb{A} \circ x = \lambda(\mathbb{I} \circ x).$$

Теорема (Qi, 2005)

Существует характеристический полином $\varphi_{\mathbb{A}}$ степени $n(d-1)^{n-1}$ такой, что λ – собственное число $\mathbb{A} \Leftrightarrow \lambda$ – корень $\varphi_{\mathbb{A}}$.

Собственные числа и вектора гиперграфа $\mathcal{G}$ – это собственные числа и вектора его матрицы смежности $\mathbb{A}$.

Совершенные раскраски гиперграфов

$\mathcal{G} = (X, E)$ – d-однородный гиперграф с матрицей инцидентности B и матрицей смежности $\mathbb{A}$.

Совершенные раскраски гиперграфов

$\mathcal{G} = (X, E)$ – d-однородный гиперграф с матрицей инцидентности B и матрицей смежности $\mathbb{A}$.

Прямое определение: Функция $f : X \to \{1, \ldots, k\}$ – совершенная k-раскраска $\mathcal{G}$, если цвет вершины однозначно определяет цветовые составы инцидентных ребер.

Совершенные раскраски гиперграфов

$\mathcal{G} = (X, E)$ – d-однородный гиперграф с матрицей инцидентности B и матрицей смежности $\mathbb{A}$.

Прямое определение: Функция $f : X \to \{1, \dots, k\}$ – совершенная k-раскраска $\mathcal{G}$, если цвет вершины однозначно определяет цветовые составы инцидентных ребер.

Через граф инцидентности: Совершенная k-раскраска $\mathcal{G}$ задается k-раскраской вершин P и раскраской гиперребер R такими, что

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & P \\ R & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & P \\ R & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & W \\ V & 0 \end{pmatrix}.$$

V – матрица XE-параметров; W – матрица EX-параметров.

Совершенные раскраски гиперграфов

$\mathcal{G} = (X, E)$ – d-однородный гиперграф с матрицей инцидентности B и матрицей смежности $\mathbb{A}$.

Прямое определение: Функция $f : X \to \{1, \dots, k\}$ – совершенная k-раскраска $\mathcal{G}$, если цвет вершины однозначно определяет цветовые составы инцидентных ребер.

Через граф инцидентности: Совершенная k-раскраска $\mathcal{G}$ задается k-раскраской вершин P и раскраской гиперребер R такими, что

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & P \\ R & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & P \\ R & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & W \\ V & 0 \end{pmatrix}.$$

V – матрица XE-параметров; W – матрица EX-параметров.

Многомерный подход: k-раскраска P является совершенной для $\mathcal{G}$ если

$$\mathbb{A} \circ P = P \circ \mathbb{S}.$$

Матрица параметров $\mathbb{S}$ – d-мерная матрица порядка k.

Совершенные раскраски гиперграфов

$\mathcal{G} = (X, E)$ – d-однородный гиперграф с матрицей инцидентности B и матрицей смежности $\mathbb{A}$.

Прямое определение: Функция $f : X \to \{1, \dots, k\}$ – совершенная k-раскраска $\mathcal{G}$, если цвет вершины однозначно определяет цветовые составы инцидентных ребер.

Через граф инцидентности: Совершенная k-раскраска $\mathcal{G}$ задается k-раскраской вершин P и раскраской гиперребер R такими, что

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & P \\ R & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & P \\ R & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & W \\ V & 0 \end{pmatrix}.$$

V – матрица XE-параметров; W – матрица EX-параметров.

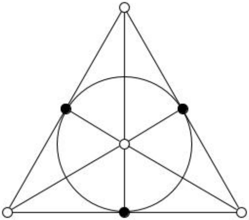
Многомерный подход: k-раскраска P является совершенной для $\mathcal{G}$ если

$$\mathbb{A} \circ P = P \circ \mathbb{S}.$$

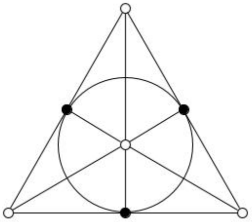
Матрица параметров $\mathbb{S}$ – d-мерная матрица порядка k.

Все три определения эквивалентны.

Пример: совершенная 2-раскраска гиперграфа плоскости Фано



Пример: совершенная 2-раскраска гиперграфа плоскости Фано



Матрицы параметров совершенной раскраски:

$$V = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad W = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbb{S} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 2 & 3/2 & 0 \end{array}\right).$$

Параметры совершенных раскрасок

$\mathcal{G}$ – гиперграф с матрицей смежности B.
P – матрица раскраски вершин, R – матрица раскраски гиперребер,
V – матрица XE-параметров, W – матрица EX-параметров.

$$BR = PV; \quad B^T P = RW.$$

Параметры совершенных раскрасок

$\mathcal{G}$ – гиперграф с матрицей смежности B.
P – матрица раскраски вершин, R – матрица раскраски гиперребер,
V – матрица XE-параметров, W – матрица EX-параметров.

$$BR = PV; \quad B^T P = RW.$$

Утверждение

- $N = P^T P$ – диагональная матрица с диагональными элементами равными числу вершин данного цвета;
- $M = R^T R$ диагональная матрица с диагональными элементами равными числу гиперребер данного цвета;

Параметры совершенных раскрасок

$\mathcal{G}$ – гиперграф с матрицей смежности B.
P – матрица раскраски вершин, R – матрица раскраски гиперребер,
V – матрица XE-параметров, W – матрица EX-параметров.

$$BR = PV; \quad B^T P = RW.$$

Утверждение

- $N = P^T P$ – диагональная матрица с диагональными элементами равными числу вершин данного цвета;
- $M = R^T R$ диагональная матрица с диагональными элементами равными числу гиперребер данного цвета;
- $NV = W^T M$;

Параметры совершенных раскрасок

$\mathcal{G}$ – гиперграф с матрицей смежности B.
P – матрица раскраски вершин, R – матрица раскраски гиперребер,
V – матрица XE-параметров, W – матрица EX-параметров.

$$BR = PV; \quad B^T P = RW.$$

Утверждение

- $N = P^T P$ – диагональная матрица с диагональными элементами равными числу вершин данного цвета;
- $M = R^T R$ диагональная матрица с диагональными элементами равными числу гиперребер данного цвета;
- $NV = W^T M$;
- Если V и W удовлетворяют этим условиям, то существует совершенная раскраска с параметрами (V, W) для некоторого гиперграфа $\mathcal{G}$.

Многомерная матрица параметров совершенной раскраски

$\mathcal{G}$ – d-однородный гиперграф с матрицей смежности $\mathbb{A}$.
P – совершенная k-раскраска $\mathcal{G}$ тогда и только тогда, когда

$$\mathbb{A} \circ P = P \circ \mathbb{S}.$$

$\mathbb{S}$ – матрица параметров совершенной раскраски.

Многомерная матрица параметров совершенной раскраски

$\mathcal{G}$ – d-однородный гиперграф с матрицей смежности $\mathbb{A}$.
P – совершенная k-раскраска $\mathcal{G}$ тогда и только тогда, когда

$$\mathbb{A} \circ P = P \circ \mathbb{S}.$$

$\mathbb{S}$ – матрица параметров совершенной раскраски.

Теорема (Т., 2022+)

Элементы s_γ многомерной матрицы параметров $\mathbb{S}$ равны

$$s_\gamma = v_{\gamma_1,\gamma} \binom{d-1}{d_1, \cdots, d_k}^{-1},$$

где $v_{\gamma_1,\gamma}$ – число гиперребер цветового состава γ, инцидентных вершине цвета γ_1, цвет l появляется в $\{\gamma_2, \ldots, \gamma_d\}$ ровно d_l раз.

Многомерная матрица параметров совершенной раскраски

Теорема (Т., 2022+)

Элементы s_γ многомерной матрицы параметров $\mathbb{S}$ равны

$$s_\gamma = v_{\gamma_1,\gamma} \binom{d-1}{d_1, \cdots, d_k}^{-1},$$

где $v_{\gamma_1,\gamma}$ – число гиперребер цветового состава γ, инцидентных вершине цвета γ_1, цвет l появляется в $\{\gamma_2, \ldots, \gamma_d\}$ ровно d_l раз.

Многомерная матрица параметров совершенной раскраски

Теорема (Т., 2022+)

Элементы s_γ многомерной матрицы параметров $\mathbb{S}$ равны

$$s_\gamma = v_{\gamma_1,\gamma} \binom{d-1}{d_1, \cdots, d_k}^{-1},$$

где $v_{\gamma_1,\gamma}$ – число гиперребер цветового состава γ, инцидентных вершине цвета γ_1, цвет l появляется в $\{\gamma_2, \dots, \gamma_d\}$ ровно d_l раз.

Следствия

1. Сумма всех элементов i-ой гиперграни первого направления в $\mathbb{S}$ равна степени вершины x_i.

Многомерная матрица параметров совершенной раскраски

Теорема (Т., 2022+)

Элементы s_γ многомерной матрицы параметров $\mathbb{S}$ равны

$$s_\gamma = v_{\gamma_1,\gamma} \binom{d-1}{d_1, \cdots, d_k}^{-1},$$

где $v_{\gamma_1,\gamma}$ – число гиперребер цветового состава γ, инцидентных вершине цвета γ_1, цвет l появляется в $\{\gamma_2, \ldots, \gamma_d\}$ ровно d_l раз.

Следствия

1. Сумма всех элементов i-ой гиперграни первого направления в $\mathbb{S}$ равна степени вершины x_i.
2. Матрица $(P^T P) \circ \mathbb{S}$ симметрична.

Собственные числа совершенных раскрасок

Теорема (Т., 2022+)

Пусть P – матрица раскраски и $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ – d-мерные матрицы, связанные соотношением $\mathbb{A} \circ P = P \circ \mathbb{B}$. Если λ и x – собственные число и вектор для $\mathbb{B}$, то λ и Px – собственные число и вектор для $\mathbb{A}$.

Собственные числа совершенных раскрасок

Теорема (Т., 2022+)

Пусть P – матрица раскраски и $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ – d-мерные матрицы, связанные соотношением $\mathbb{A} \circ P = P \circ \mathbb{B}$. Если λ и x – собственные число и вектор для $\mathbb{B}$, то λ и Px – собственные число и вектор для $\mathbb{A}$.

$\mathcal{G}$ – d-однородный гиперграф с матрицей смежности $\mathbb{A}$,
P – совершенная раскраска $\mathcal{G}$ с матрицей параметров $\mathbb{S}$.

$$\mathbb{A} \circ P = P \circ \mathbb{S}.$$

Собственные числа совершенных раскрасок

Теорема (Т., 2022+)

Пусть P – матрица раскраски и $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ – d-мерные матрицы, связанные соотношением $\mathbb{A} \circ P = P \circ \mathbb{B}$. Если λ и x – собственные число и вектор для $\mathbb{B}$, то λ и Px – собственные число и вектор для $\mathbb{A}$.

$\mathcal{G}$ – d-однородный гиперграф с матрицей смежности $\mathbb{A}$,
P – совершенная раскраска $\mathcal{G}$ с матрицей параметров $\mathbb{S}$.

$$\mathbb{A} \circ P = P \circ \mathbb{S}.$$

Теорема (Т., 2022+)

Если λ и x – собственные число и вектор для $\mathbb{S}$, то λ и Px собственные число и вектор для матрицы смежности $\mathbb{A}$.

Собственные числа совершенных раскрасок

Теорема (Т., 2022+)

Пусть P – матрица раскраски и $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ – d-мерные матрицы, связанные соотношением $\mathbb{A} \circ P = P \circ \mathbb{B}$. Если λ и x – собственные число и вектор для $\mathbb{B}$, то λ и Px – собственные число и вектор для $\mathbb{A}$.

$\mathcal{G}$ – d-однородный гиперграф с матрицей смежности $\mathbb{A}$,
P – совершенная раскраска $\mathcal{G}$ с матрицей параметров $\mathbb{S}$.

$$\mathbb{A} \circ P = P \circ \mathbb{S}.$$

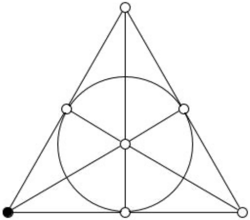
Теорема (Т., 2022+)

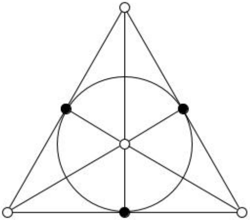
Если λ и x – собственные число и вектор для $\mathbb{S}$, то λ и Px собственные число и вектор для матрицы смежности $\mathbb{A}$.

Следствие

С помощью совершенных раскрасок можно находить собственные числа гиперграфов (и многомерных матриц).

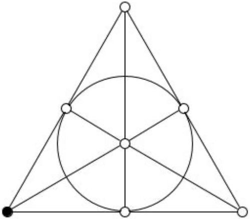
Пример: совершенные 2-раскраски гиперграфа плоскости Фано

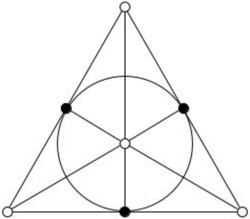




$$\mathbb{S}_1 = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 3 & 1/2 & 2 \end{array} \right); \quad \mathbb{S}_2 = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 2 & 3/2 & 0 \end{array} \right).$$

Пример: совершенные 2-раскраски гиперграфа плоскости Фано



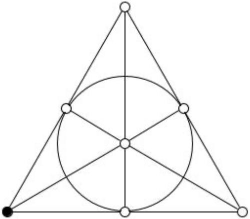


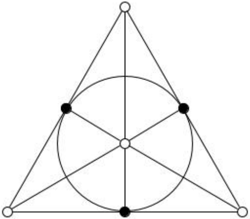
$$\mathbb{S}_1 = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 3 & 1/2 & 2 \end{array} \right); \quad \mathbb{S}_2 = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 2 & 3/2 & 0 \end{array} \right).$$

Характеристические полиномы совершенных раскрасок:

$$\varphi_1(\lambda) = \lambda(\lambda - 3)(\lambda^2 - \lambda + 1); \quad \varphi_2(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda - 1)(\lambda^2 + 2\lambda + 6).$$

Пример: совершенные 2-раскраски гиперграфа плоскости Фано





$$\mathbb{S}_1 = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 3 & 1/2 & 2 \end{array}\right); \quad \mathbb{S}_2 = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 2 & 3/2 & 0 \end{array}\right).$$

Характеристические полиномы совершенных раскрасок:

$$\varphi_1(\lambda) = \lambda(\lambda-3)(\lambda^2-\lambda+1); \quad \varphi_2(\lambda) = (\lambda-3)(\lambda-1)(\lambda^2+2\lambda+6).$$

Собственные числа гиперграфа: $0,\ 1,\ 3,\ \frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3}),\ -1 \pm i\sqrt{5}$.

Трансверсали в гиперграфах

$\mathcal{G} = (X, E)$ – d-однородный r-регулярный гиперграф.
k-трансверсаль в $\mathcal{G}$ – это $U \subseteq X$ такое, что любое гиперребро e содержит ровно k вершин из U.

Трансверсали в гиперграфах

$\mathcal{G} = (X, E)$ – d-однородный r-регулярный гиперграф.
k-трансверсаль в $\mathcal{G}$ – это $U \subseteq X$ такое, что любое гиперребро e содержит ровно k вершин из U.

Если U – k-трансверсаль в $\mathcal{G}$, то U и $X \setminus U$ – цветовые классы совершенной 2-раскраски $\mathcal{G}$.

Трансверсали в гиперграфах

$\mathcal{G} = (X, E)$ – d-однородный r-регулярный гиперграф.
k-трансверсаль в $\mathcal{G}$ – это $U \subseteq X$ такое, что любое гиперребро e содержит ровно k вершин из U.

Если U – k-трансверсаль в $\mathcal{G}$, то U и $X \setminus U$ – цветовые классы совершенной 2-раскраски $\mathcal{G}$.

Матрицы XE- и EX-параметров:

$$V = \begin{pmatrix} r \\ r \end{pmatrix}; \quad W = \begin{pmatrix} k & d-k \end{pmatrix}.$$

Трансверсали в гиперграфах

$\mathcal{G} = (X, E)$ – d-однородный r-регулярный гиперграф.
k-трансверсаль в $\mathcal{G}$ – это $U \subseteq X$ такое, что любое гиперребро e содержит ровно k вершин из U.

Если U – k-трансверсаль в $\mathcal{G}$, то U и $X \setminus U$ – цветовые классы совершенной 2-раскраски $\mathcal{G}$.

Матрицы XE- и EX-параметров:

$$V = \begin{pmatrix} r \\ r \end{pmatrix}; \quad W = \begin{pmatrix} k & d-k \end{pmatrix}.$$

$\mathbb{S}_k^d$ – матрица параметров k-трансверсали в d-однородном r-регулярном гиперграфе.

Многомерные матрицы параметров трансверсалей

$$\mathbb{S}_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & r \\ r & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbb{S}_1^3 = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & {}^{r}\!/_{2} & r & 0 \\ {}^{r}\!/_{2} & 0 & 0 & 0 \end{array}\right); \quad \mathbb{S}_2^3 = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & {}^{r}\!/_{2} \\ 0 & r & {}^{r}\!/_{2} & 0 \end{array}\right);$$

$$\mathbb{S}_1^4 = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & {}^{r}\!/_{3} & {}^{r}\!/_{3} & 0 \\ {}^{r}\!/_{3} & 0 & 0 & 0 \\ \hline r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right); \quad \mathbb{S}_2^4 = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & {}^{r}\!/_{3} \\ 0 & {}^{r}\!/_{3} & {}^{r}\!/_{3} & 0 \\ \hline 0 & {}^{r}\!/_{3} & {}^{r}\!/_{3} & 0 \\ {}^{r}\!/_{3} & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Многомерные матрицы параметров трансверсалей

$$\mathbb{S}_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & r \\ r & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbb{S}_1^3 = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & r/2 & r & 0 \\ r/2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right); \quad \mathbb{S}_2^3 = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & r/2 \\ 0 & r & r/2 & 0 \end{array}\right);$$

$$\mathbb{S}_1^4 = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & r/3 & r/3 & 0 \\ r/3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right); \quad \mathbb{S}_2^4 = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & r/3 \\ 0 & r/3 & r/3 & 0 \\ \hline 0 & r/3 & r/3 & 0 \\ r/3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Теорема (Т., 2022+)

Собственные числа $\mathbb{S}_k^d$ равны $r\xi^{ik}$, $i = 0, \dots, d-1$, где ξ – примитивный корень из единицы степени d.

Многомерные матрицы параметров трансверсалей

$$\mathbb{S}_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & r \\ r & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbb{S}_1^3 = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & r/2 & r & 0 \\ r/2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right); \qquad \mathbb{S}_2^3 = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & r/2 \\ 0 & r & r/2 & 0 \end{array}\right);$$

$$\mathbb{S}_1^4 = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & r/3 & r/3 & 0 \\ r/3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right); \qquad \mathbb{S}_2^4 = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & r/3 \\ 0 & r/3 & r/3 & 0 \\ \hline 0 & r/3 & r/3 & 0 \\ r/3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Теорема (Т., 2022+)

Собственные числа $\mathbb{S}_k^d$ равны $r\xi^{ik}$, $i = 0, \ldots, d-1$, где ξ – примитивный корень из единицы степени d.

Следствие

Если d-однородный r-регулярный гиперграф содержит k-трансверсаль, то в его спектре должны быть числа $r\xi^{ik}$.

Накрытия гиперграфов

Гиперграф $\mathcal{G}$ накрывает гиперграф $\mathcal{H}$, если существует совершенная раскраска $\mathcal{G}$ с матрицей параметров $\mathbb{S}$ равной матрице смежности $\mathcal{H}$.

Накрытия гиперграфов

Гиперграф $\mathcal{G}$ накрывает гиперграф $\mathcal{H}$, если существует совершенная раскраска $\mathcal{G}$ с матрицей параметров $\mathbb{S}$ равной матрице смежности $\mathcal{H}$.

- накрытие – это локальный изоморфизм, отображающий вершины (гиперребра) в вершины (гиперребра) с сохранением их инцидентности;
- любое накрытие является k-накрытием: k вершин $\mathcal{G}$ отображаются в одну вершину $\mathcal{H}$.

Спектральные свойства накрытий

Гиперграф $\mathcal{G}$ накрывает гиперграф $\mathcal{H}$, если существует совершенная раскраска ψ гиперграфа $\mathcal{G}$ с матрицей параметров $\mathbb{S}$ равной матрице смежности $\mathcal{H}$.

Спектральные свойства накрытий

Гиперграф $\mathcal{G}$ накрывает гиперграф $\mathcal{H}$, если существует совершенная раскраска ψ гиперграфа $\mathcal{G}$ с матрицей параметров $\mathbb{S}$ равной матрице смежности $\mathcal{H}$.

Теорема (Song, Fan, Wang, et al., 2022+)

Если ψ задает накрытие $\mathcal{H}$ гиперграфом $\mathcal{G}$, то любые собственые число λ и вектор x гиперграфа $\mathcal{H}$ дают собственное число λ и вектор $\psi^{-1}(x)$ гиперграфа $\mathcal{G}$.

Спектральные свойства накрытий

Гиперграф $\mathcal{G}$ накрывает гиперграф $\mathcal{H}$, если существует совершенная раскраска ψ гиперграфа $\mathcal{G}$ с матрицей параметров $\mathbb{S}$ равной матрице смежности $\mathcal{H}$.

Теорема (Song, Fan, Wang, et al., 2022+)

Если ψ задает накрытие $\mathcal{H}$ гиперграфом $\mathcal{G}$, то любые собственые число λ и вектор x гиперграфа $\mathcal{H}$ дают собственное число λ и вектор $\psi^{-1}(x)$ гиперграфа $\mathcal{G}$.

Theorem (T., 2022+)

Если $\mathcal{G}$ накрывает $\mathcal{H}$, то для любой совершенной раскраски $\mathcal{H}$ с матрицей параметров $\mathbb{S}$ существует совершенная раскраска $\mathcal{G}$ с той же матрицей параметров $\mathbb{S}$.

Общее накрытие

Теорема (Leighton, 1982)

Графы H_1 и H_2 имеют совершенную раскраску с одинаковой матрицей параметров S тогда и только тогда, когда существует граф G, накрывающий и H_1, и H_2.

Общее накрытие

Теорема (Leighton, 1982)

Графы H_1 и H_2 имеют совершенную раскраску с одинаковой матрицей параметров S тогда и только тогда, когда существует граф G, накрывающий и H_1, и H_2.

Теорема (Т., 2022+)

d-однородные гиперграфы $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ имеют совершенную раскраску с одинаковой матрицей параметров $\mathbb{S}$ тогда и только тогда, когда существует гиперграф $\mathcal{G}$, накрывающий и $\mathcal{H}_1$, и $\mathcal{H}_2$.

Общее накрытие

Теорема (Leighton, 1982)

Графы H_1 и H_2 имеют совершенную раскраску с одинаковой матрицей параметров S тогда и только тогда, когда существует граф G, накрывающий и H_1, и H_2.

Теорема (Т., 2022+)

d-однородные гиперграфы $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ имеют совершенную раскраску с одинаковой матрицей параметров $\mathbb{S}$ тогда и только тогда, когда существует гиперграф $\mathcal{G}$, накрывающий и $\mathcal{H}_1$, и $\mathcal{H}_2$.

Спасибо за внимание!