Множества с нечётными расстояниями и равноудалённые вправо последовательности в чебышёвской и манхеттенской метриках

Александр Голованов

Московский Физико-Технический Институт

2022

Определения

Определение

Пространством $\mathbb{R}^n_p$ $(1 \leq p < \infty)$ называется множество $\mathbb{R}^n$, снабжённое нормой

$$\| \mathbf{x} \|_p = (|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p)^{1/p}.$$

Если $p = \infty$, то

$$\| \mathbf{x} \|_\infty = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|).$$

Определения

Определение

Пространством $\mathbb{R}_p^n$ $(1 \leq p < \infty)$ называется множество $\mathbb{R}^n$, снабжённое нормой

$$\| \mathbf{x} \|_p = (|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p)^{1/p}.$$

Если $p = \infty$, то

$$\| \mathbf{x} \|_\infty = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|).$$

Определение

Равносторонней размерностью метрического пространства M называется наибольшее число равноудалённых друг от друга точек в M. Обозначение: $e(M)$.

Примеры

- $e(\mathbb{R}_2^n) = n+1$,

Примеры

- $e(\mathbb{R}^n_2) = n + 1$,
- $e(\mathbb{R}^n_\infty) = 2^n$,

Примеры

- $e(\mathbb{R}^n_2) = n + 1$,
- $e(\mathbb{R}^n_\infty) = 2^n$,
- $e(\mathbb{R}^n_1) < cn \log n$ для некоторой константы c (Алон, Пудлак, 2003),

Примеры

- $e(\mathbb{R}_2^n) = n + 1$,
- $e(\mathbb{R}_\infty^n) = 2^n$,
- $e(\mathbb{R}_1^n) < cn\log n$ для некоторой константы c (Алон, Пудлак, 2003),
- $e(\mathbb{R}_1^n) \geq 2n$ (например, вершины кроссполитопа в качестве примера).

Примеры

- $e(\mathbb{R}_2^n) = n + 1$,
- $e(\mathbb{R}_\infty^n) = 2^n$,
- $e(\mathbb{R}_1^n) < cn \log n$ для некоторой константы c (Алон, Пудлак, 2003),
- $e(\mathbb{R}_1^n) \geq 2n$ (например, вершины кроссполитопа в качестве примера).

Известно, что нижняя оценка на $e(\mathbb{R}_1^n)$ точка для $n = 3$ и $n = 4$.

Вариации

- Наибольшее множество точек с попарно *нечётными* расстояниями?

Вариации

- Наибольшее множество точек с попарно *нечётными* расстояниями?
- Наибольшая последовательность точек, где каждая равноудалена от всех *последующих*?

Вариации

- Наибольшее множество точек с попарно *нечётными* расстояниями?
- Наибольшая последовательность точек, где каждая равноудалена от всех *последующих*?

Первая задача позволяет оценить хроматическое число пространства с запрещёнными расстояниями — недавно было доказано, что для евклидовой плоскости это число бесконечно.

Вариации

- Наибольшее множество точек с попарно *нечётными* расстояниями?
- Наибольшая последовательность точек, где каждая равноудалена от всех *последующих*?

Первая задача позволяет оценить хроматическое число пространства с запрещёнными расстояниями — недавно было доказано, что для евклидовой плоскости это число бесконечно. Последняя задача позволяет оценить размер множества точек, между которыми достигаются лишь k различных расстояний.

Результаты

- Наибольшее число точек в $\mathbb{R}^n_\infty$ с нечётными расстояниями —

Результаты

- Наибольшее число точек в $\mathbb{R}^n_\infty$ с нечётными расстояниями — 2^n, то есть $e(\mathbb{R}^n_\infty)$,

Результаты

- Наибольшее число точек в $\mathbb{R}^n_\infty$ с нечётными расстояниями — 2^n, то есть $e(\mathbb{R}^n_\infty)$,
- Размер наибольшей *равноудалённой вправо последовательности* в $\mathbb{R}^n_\infty$ —

Результаты

- Наибольшее число точек в $\mathbb{R}^n_\infty$ с нечётными расстояниями — 2^n, то есть $e(\mathbb{R}^n_\infty)$,
- Размер наибольшей *равноудалённой вправо последовательности* в $\mathbb{R}^n_\infty$ — $2^{n+1} - 1$,

Результаты

- Наибольшее число точек в $\mathbb{R}^n_\infty$ с нечётными расстояниями — 2^n, то есть $e(\mathbb{R}^n_\infty)$,
- Размер наибольшей *равноудалённой вправо последовательности* в $\mathbb{R}^n_\infty$ — $2^{n+1} - 1$,
- Наибольшее число точек в $\mathbb{R}^n_1$ с нечётными расстояниями не больше

Результаты

- Наибольшее число точек в $\mathbb{R}^n_\infty$ с нечётными расстояниями — 2^n, то есть $e(\mathbb{R}^n_\infty)$,
- Размер наибольшей *равноудалённой вправо последовательности* в $\mathbb{R}^n_\infty$ — $2^{n+1} - 1$,
- Наибольшее число точек в $\mathbb{R}^n_1$ с нечётными расстояниями не больше $n! \cdot n \cdot \ln n \cdot (4 + o(1))$,

Результаты

- Наибольшее число точек в $\mathbb{R}^n_\infty$ с нечётными расстояниями — 2^n, то есть $e(\mathbb{R}^n_\infty)$,
- Размер наибольшей *равноудалённой вправо последовательности* в $\mathbb{R}^n_\infty$ — $2^{n+1} - 1$,
- Наибольшее число точек в $\mathbb{R}^n_1$ с нечётными расстояниями не больше $n! \cdot n \cdot \ln n \cdot (4 + o(1))$,
- Размер наибольшей равноудалённой вправо последовательности в $\mathbb{R}^n_1$ не меньше

Результаты

- Наибольшее число точек в $\mathbb{R}^n_\infty$ с нечётными расстояниями — 2^n, то есть $e(\mathbb{R}^n_\infty)$,
- Размер наибольшей *равноудалённой вправо последовательности* в $\mathbb{R}^n_\infty$ — $2^{n+1} - 1$,
- Наибольшее число точек в $\mathbb{R}^n_1$ с нечётными расстояниями не больше $n! \cdot n \cdot \ln n \cdot (4 + o(1))$,
- Размер наибольшей равноудалённой вправо последовательности в $\mathbb{R}^n_1$ не меньше $4n - 1$.

$\mathbb{R}^n_\infty$: главный инструмент

Введём порядок на $\mathbb{R}^n$: будем говорить, что $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$, если $x_n < y_n$, и для всех $i < n$ выполнено $|x_i - y_i| < |x_n - y_n|$.

$\mathbb{R}^n_\infty$: главный инструмент

Введём порядок на $\mathbb{R}^n$: будем говорить, что $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$, если $x_n < y_n$, и для всех $i < n$ выполнено $|x_i - y_i| < |x_n - y_n|$.
Свойства:

$\mathbb{R}^n_\infty$: главный инструмент

Введём порядок на $\mathbb{R}^n$: будем говорить, что $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$, если $x_n < y_n$, и для всех $i < n$ выполнено $|x_i - y_i| < |x_n - y_n|$.

Свойства:

- $(\mathbb{R}^n, \preceq)$ — *частично упорядоченное множество*, то есть, в частности,
$$(\mathbf{x} \preceq \mathbf{y}) \wedge (\mathbf{y} \preceq \mathbf{z}) \Rightarrow (\mathbf{x} \preceq \mathbf{z}).$$

$\mathbb{R}^n_\infty$: главный инструмент

Введём порядок на $\mathbb{R}^n$: будем говорить, что $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$, если $x_n < y_n$, и для всех $i < n$ выполнено $|x_i - y_i| < |x_n - y_n|$.
Свойства:

- $(\mathbb{R}^n, \preceq)$ — *частично упорядоченное множество*, то есть, в частности,
$$(\mathbf{x} \preceq \mathbf{y}) \wedge (\mathbf{y} \preceq \mathbf{z}) \Rightarrow (\mathbf{x} \preceq \mathbf{z}).$$
- Если $\mathbf{x} \preceq \mathbf{y}$, то $\| \mathbf{x} - \mathbf{y} \|_\infty = y_n - x_n$.

Dilworth's theorem

Определение

Пусть $\mathcal{P} = (S, \preceq)$ — частично упорядоченное множество.

Dilworth's theorem

Определение

Пусть $\mathcal{P} = (S, \preceq)$ — частично упорядоченное множество. Назовём множество $C \subseteq S$ *цепью*, если любые два элемента C сравнимы отношением $\preceq$.

Dilworth's theorem

Определение

Пусть $\mathcal{P} = (S, \preceq)$ — частично упорядоченное множество. Назовём множество $C \subseteq S$ *цепью*, если любые два элемента C сравнимы отношением $\preceq$. Назовём множество $A \subseteq S$ *антицепью*, если никакие два элемента A не сравнимы отношением $\preceq$.

Dilworth's theorem

Определение

Пусть $\mathcal{P} = (S, \preceq)$ — частично упорядоченное множество. Назовём множество $C \subseteq S$ *цепью*, если любые два элемента C сравнимы отношением $\preceq$. Назовём множество $A \subseteq S$ *антицепью*, если никакие два элемента A не сравнимы отношением $\preceq$. Обозначим через $\ell(\mathcal{P})$ размер наибольшей *цепи* в $\mathcal{P}$,

Dilworth's theorem

Определение

Пусть $\mathcal{P} = (S, \preceq)$ — частично упорядоченное множество. Назовём множество $C \subseteq S$ *цепью*, если любые два элемента C сравнимы отношением $\preceq$. Назовём множество $A \subseteq S$ *антицепью*, если никакие два элемента A не сравнимы отношением $\preceq$. Обозначим через $\ell(\mathcal{P})$ размер наибольшей *цепи* в $\mathcal{P}$, а через $w(\mathcal{P})$ — размер наибольшей антицепи в $\mathcal{P}$ (или *ширину* ч. у. множества $\mathcal{P}$).

Dilworth's theorem

Определение

Пусть $\mathcal{P} = (S, \preceq)$ — частично упорядоченное множество. Назовём множество $C \subseteq S$ *цепью*, если любые два элемента C сравнимы отношением $\preceq$. Назовём множество $A \subseteq S$ *антицепью*, если никакие два элемента A не сравнимы отношением $\preceq$. Обозначим через $\ell(\mathcal{P})$ размер наибольшей *цепи* в $\mathcal{P}$, а через $w(\mathcal{P})$ — размер наибольшей антицепи в $\mathcal{P}$ (или *ширину* ч. у. множества $\mathcal{P}$).

Теорема

Пусть $\mathcal{P} = (S, \preceq)$ — частично упорядоченное множество.

Dilworth's theorem

Определение

Пусть $\mathcal{P} = (S, \preceq)$ — частично упорядоченное множество. Назовём множество $C \subseteq S$ *цепью*, если любые два элемента C сравнимы отношением $\preceq$. Назовём множество $A \subseteq S$ *антицепью*, если никакие два элемента A не сравнимы отношением $\preceq$. Обозначим через $\ell(\mathcal{P})$ размер наибольшей *цепи* в $\mathcal{P}$, а через $w(\mathcal{P})$ — размер наибольшей антицепи в $\mathcal{P}$ (или *ширину* ч. у. множества $\mathcal{P}$).

Теорема

Пусть $\mathcal{P} = (S, \preceq)$ — частично упорядоченное множество. Тогда ширина $w(\mathcal{P})$ равна наименьшему числу цепей, на которые можно разбить $\mathcal{P}$.

Dilworth's theorem

Определение

Пусть $\mathcal{P} = (S, \preceq)$ — частично упорядоченное множество. Назовём множество $C \subseteq S$ *цепью*, если любые два элемента C сравнимы отношением $\preceq$. Назовём множество $A \subseteq S$ *антицепью*, если никакие два элемента A не сравнимы отношением $\preceq$. Обозначим через $\ell(\mathcal{P})$ размер наибольшей *цепи* в $\mathcal{P}$, а через $w(\mathcal{P})$ — размер наибольшей антицепи в $\mathcal{P}$ (или *ширину* ч. у. множества $\mathcal{P}$).

Теорема

Пусть $\mathcal{P} = (S, \preceq)$ — частично упорядоченное множество. Тогда ширина $w(\mathcal{P})$ равна наименьшему числу цепей, на которые можно разбить $\mathcal{P}$. В частности, $|S| \leq \ell(\mathcal{P})w(\mathcal{P})$.

Последние приготовления

Пусть $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_\infty$. Обозначим $\widehat{\mathbf{x}} = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Последние приготовления

Пусть $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_\infty$. Обозначим $\widehat{\mathbf{x}} = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Утверждение

Если $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *сравнимы отношением* $\preceq$, *то* $\| \mathbf{y} - \mathbf{x} \|_\infty = |y_n - x_n|$.

Последние приготовления

Пусть $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_\infty$. Обозначим $\widehat{\mathbf{x}} = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Утверждение

Если $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *сравнимы отношением* $\preceq$, *то* $\|\, \mathbf{y} - \mathbf{x} \,\|_\infty = |y_n - x_n|$. *Если нет, то* $\|\, \mathbf{y} - \mathbf{x} \,\|_\infty = \|\widehat{\mathbf{y}} - \widehat{\mathbf{x}}\|_\infty$.

Последние приготовления

Пусть $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_\infty$. Обозначим $\widehat{\mathbf{x}} = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Утверждение

Если $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *сравнимы отношением* $\preceq$, *то* $\| \mathbf{y} - \mathbf{x} \|_\infty = |y_n - x_n|$. *Если нет, то* $\| \mathbf{y} - \mathbf{x} \|_\infty = \|\widehat{\mathbf{y}} - \widehat{\mathbf{x}}\|_\infty$.

Мысль: размер всякой цепи в наших задачах окажется невелик априори, а каждая антицепь будет представлять собой пример коразмерности 1, и его размер будет ограничен индукцией по размерности.

Применение: нечётные расстояния в $\mathbb{R}^n_\infty$

Пусть $f(n)$ — ответ для $\mathbb{R}^n_\infty$. Докажем индукцией по n, что $f(n) \le 2^n$.

Применение: нечётные расстояния в $\mathbb{R}^n_\infty$

Пусть $f(n)$ — ответ для $\mathbb{R}^n_\infty$. Докажем индукцией по n, что $f(n) \le 2^n$.

Пусть S — множество с нечётными расстояниями в $\mathbb{R}^n_\infty$.

Применение: нечётные расстояния в $\mathbb{R}^n_\infty$

Пусть $f(n)$ — ответ для $\mathbb{R}^n_\infty$. Докажем индукцией по n, что $f(n) \le 2^n$.
Пусть S — множество с нечётными расстояниями в $\mathbb{R}^n_\infty$. Если $A \subset S$ — антицепь в $\mathcal{P} = (S, \preceq)$, то рассмотрим $\widehat{A} = \{\widehat{\mathbf{x}} \mid \mathbf{x} \in A\}$.

Применение: нечётные расстояния в $\mathbb{R}^n_\infty$

Пусть $f(n)$ — ответ для $\mathbb{R}^n_\infty$. Докажем индукцией по n, что $f(n) \le 2^n$.
Пусть S — множество с нечётными расстояниями в $\mathbb{R}^n_\infty$. Если $A \subset S$ — антицепь в $\mathcal{P} = (S, \preceq)$, то рассмотрим $\widehat{A} = \{\widehat{\mathbf{x}} \mid \mathbf{x} \in A\}$. Тогда $\widehat{A}$ — множество с нечётными расстояниями в $\mathbb{R}^{n-1}_\infty$, поскольку $\mathbf{x} \mapsto \widehat{\mathbf{x}}$ сохраняет расстояния. Значит, $w(\mathcal{P}) \le f(n-1)$.

Применение: нечётные расстояния в $\mathbb{R}^n_\infty$

Пусть $f(n)$ — ответ для $\mathbb{R}^n_\infty$. Докажем индукцией по n, что $f(n) \le 2^n$.
Пусть S — множество с нечётными расстояниями в $\mathbb{R}^n_\infty$. Если $A \subset S$ — антицепь в $\mathcal{P} = (S, \preceq)$, то рассмотрим $\widehat{A} = \{\widehat{\mathbf{x}} \mid \mathbf{x} \in A\}$. Тогда $\widehat{A}$ — множество с нечётными расстояниями в $\mathbb{R}^{n-1}_\infty$, поскольку $\mathbf{x} \mapsto \widehat{\mathbf{x}}$ сохраняет расстояния. Значит, $w(\mathcal{P}) \le f(n-1)$. Если $C \subset S$ — цепь в $\mathcal{P}$, то рассмотрим последние координаты элементов C.

Применение: нечётные расстояния в $\mathbb{R}^n_\infty$

Пусть $f(n)$ — ответ для $\mathbb{R}^n_\infty$. Докажем индукцией по n, что $f(n) \le 2^n$.
Пусть S — множество с нечётными расстояниями в $\mathbb{R}^n_\infty$. Если $A \subset S$ — антицепь в $\mathcal{P} = (S, \preceq)$, то рассмотрим $\widehat{A} = \{\widehat{\mathbf{x}} \mid \mathbf{x} \in A\}$. Тогда $\widehat{A}$ — множество с нечётными расстояниями в $\mathbb{R}^{n-1}_\infty$, поскольку $\mathbf{x} \mapsto \widehat{\mathbf{x}}$ сохраняет расстояния. Значит, $w(\mathcal{P}) \le f(n-1)$. Если $C \subset S$ — цепь в $\mathcal{P}$, то рассмотрим последние координаты элементов C. Они представляют собой цепь в $\mathbb{R}$, поскольку $\mathbf{x} \mapsto x_n$ сохраняет расстояния.

Применение: нечётные расстояния в $\mathbb{R}^n_\infty$

Пусть $f(n)$ — ответ для $\mathbb{R}^n_\infty$. Докажем индукцией по n, что $f(n) \le 2^n$.
Пусть S — множество с нечётными расстояниями в $\mathbb{R}^n_\infty$. Если $A \subset S$ — антицепь в $\mathcal{P} = (S, \preceq)$, то рассмотрим $\widehat{A} = \{\widehat{\mathbf{x}} \mid \mathbf{x} \in A\}$. Тогда $\widehat{A}$ — множество с нечётными расстояниями в $\mathbb{R}^{n-1}_\infty$, поскольку $\mathbf{x} \mapsto \widehat{\mathbf{x}}$ сохраняет расстояния. Значит, $w(\mathcal{P}) \le f(n-1)$. Если $C \subset S$ — цепь в $\mathcal{P}$, то рассмотрим последние координаты элементов C. Они представляют собой цепь в $\mathbb{R}$, поскольку $\mathbf{x} \mapsto x_n$ сохраняет расстояния. Легко убедиться, что $f(1) = 2$, поэтому $f(n) \le 2f(n-1)$, что вместе с базой даёт нужную оценку.

Применение: равноудалённые вправо последовательности в $\mathbb{R}^n_\infty$

Пусть $f(n)$ — ответ для $\mathbb{R}^n_\infty$. Докажем индукцией по n, что $f(n) \leq 2^{n+1} - 1$.

Применение: равноудалённые вправо последовательности в $\mathbb{R}^n_\infty$

Пусть $f(n)$ — ответ для $\mathbb{R}^n_\infty$. Докажем индукцией по n, что $f(n) \le 2^{n+1} - 1$.
Пусть $S = (\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(m)})$ — равноудалённая вправо последовательность в $\mathbb{R}^n_\infty$.

Применение: равноудалённые вправо последовательности в $\mathbb{R}^n_\infty$

Пусть $f(n)$ — ответ для $\mathbb{R}^n_\infty$. Докажем индукцией по n, что $f(n) \le 2^{n+1} - 1$.
Пусть $S = (\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(m)})$ — равноудалённая вправо последовательность в $\mathbb{R}^n_\infty$. Если $A \subset S$ — антицепь в $\mathcal{P} = (S, \preceq)$, то рассмотрим $\widehat{A} = \{\widehat{\mathbf{x}} \mid \mathbf{x} \in A\}$.

Применение: равноудалённые вправо последовательности в $\mathbb{R}^n_\infty$

Пусть $f(n)$ — ответ для $\mathbb{R}^n_\infty$. Докажем индукцией по n, что $f(n) \le 2^{n+1} - 1$.
Пусть $S = (\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(m)})$ — равноудалённая вправо последовательность в $\mathbb{R}^n_\infty$. Если $A \subset S$ — антицепь в $\mathcal{P} = (S, \preceq)$, то рассмотрим $\widehat{A} = \{\widehat{\mathbf{x}} \mid \mathbf{x} \in A\}$. Тогда $\widehat{A}$, взятое в том же порядке, в котором его элементы входят в S — равноудалённая вправо последовательность в $\mathbb{R}^{n-1}_\infty$, поскольку $\mathbf{x} \mapsto \widehat{\mathbf{x}}$ сохраняет расстояния. Значит, $w(\mathcal{P}) \le f(n-1)$.

Применение: равноудалённые вправо последовательности в $\mathbb{R}^n_\infty$

Пусть $f(n)$ — ответ для $\mathbb{R}^n_\infty$. Докажем индукцией по n, что $f(n) \le 2^{n+1} - 1$.
Пусть $S = (\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(m)})$ — равноудалённая вправо последовательность в $\mathbb{R}^n_\infty$. Если $A \subset S$ — антицепь в $\mathcal{P} = (S, \preceq)$, то рассмотрим $\widehat{A} = \{\widehat{\mathbf{x}} \mid \mathbf{x} \in A\}$. Тогда $\widehat{A}$, взятое в том же порядке, в котором его элементы входят в S — равноудалённая вправо последовательность в $\mathbb{R}^{n-1}_\infty$, поскольку $\mathbf{x} \mapsto \widehat{\mathbf{x}}$ сохраняет расстояния. Значит, $w(\mathcal{P}) \le f(n-1)$. Если $C \subset S$ — цепь в $\mathcal{P}$, то рассмотрим последние координаты элементов C.

Применение: равноудалённые вправо последовательности в $\mathbb{R}^n_\infty$

Пусть $f(n)$ — ответ для $\mathbb{R}^n_\infty$. Докажем индукцией по n, что $f(n) \leq 2^{n+1} - 1$.
Пусть $S = (\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(m)})$ — равноудалённая вправо последовательность в $\mathbb{R}^n_\infty$. Если $A \subset S$ — антицепь в $\mathcal{P} = (S, \preceq)$, то рассмотрим $\widehat{A} = \{\widehat{\mathbf{x}} \mid \mathbf{x} \in A\}$. Тогда $\widehat{A}$, взятое в том же порядке, в котором его элементы входят в S — равноудалённая вправо последовательность в $\mathbb{R}^{n-1}_\infty$, поскольку $\mathbf{x} \mapsto \widehat{\mathbf{x}}$ сохраняет расстояния. Значит, $w(\mathcal{P}) \leq f(n-1)$. Если $C \subset S$ — цепь в $\mathcal{P}$, то рассмотрим последние координаты элементов C. Они представляют собой цепь в $\mathbb{R}$, поскольку $\mathbf{x} \mapsto x_n$ сохраняет расстояния.

Применение: равноудалённые вправо последовательности в $\mathbb{R}^n_\infty$

Пусть $f(n)$ — ответ для $\mathbb{R}^n_\infty$. Докажем индукцией по n, что $f(n) \le 2^{n+1} - 1$.
Пусть $S = (\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(m)})$ — равноудалённая вправо последовательность в $\mathbb{R}^n_\infty$. Если $A \subset S$ — антицепь в $\mathcal{P} = (S, \preceq)$, то рассмотрим $\widehat{A} = \{\widehat{\mathbf{x}} \mid \mathbf{x} \in A\}$. Тогда $\widehat{A}$, взятое в том же порядке, в котором его элементы входят в S — равноудалённая вправо последовательность в $\mathbb{R}^{n-1}_\infty$, поскольку $\mathbf{x} \mapsto \widehat{\mathbf{x}}$ сохраняет расстояния. Значит, $w(\mathcal{P}) \le f(n-1)$. Если $C \subset S$ — цепь в $\mathcal{P}$, то рассмотрим последние координаты элементов C. Они представляют собой цепь в $\mathbb{R}$, поскольку $\mathbf{x} \mapsto x_n$ сохраняет расстояния. Легко убедиться, что $f(1) = 3$, поэтому размер любой цепи не превосходит 3.

Применение: равноудалённые вправо последовательности в $\mathbb{R}^n_\infty$

Лемма

Любые две цепи размера 3 в $\mathcal{P}$ имеют общий элемент.

Применение: равноудалённые вправо последовательности в $\mathbb{R}^n_\infty$

Лемма

Любые две цепи размера 3 в $\mathcal{P}$ имеют общий элемент.

Из этой леммы следует, что при разбиении $\mathcal{P}$ на цепи максимум одна будет иметь размер 3, а остальные будут иметь размер не больше 2, поэтому $f(n) \leq 2 \cdot (f(n-1) - 1) + 3 \cdot 1 = 2f(n-1) + 1$, что вместе с базой даёт необходимую оценку.

Пример равноудалённой вправо последовательности размера $2^{n+1} - 1$

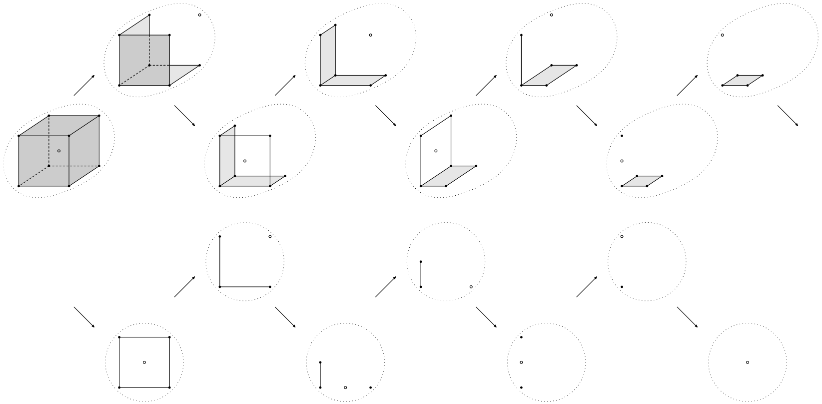
Отсортируем все векторы из нулей и единиц в порядке невозрастания суммы координат, пусть полученная последовательность — $\mathbf{z}^{(1)}, \ldots, \mathbf{z}^{(2^n)}$.

Пример равноудалённой вправо последовательности размера $2^{n+1} - 1$

Отсортируем все векторы из нулей и единиц в порядке невозрастания суммы координат, пусть полученная последовательность — $\mathbf{z}^{(1)}, \dots, \mathbf{z}^{(2^n)}$. Тогда следующая последовательность равноудалена вправо:

$$\begin{array}{rl}
\mathbf{z}^{(1)}, & 2\,\mathbf{z}^{(1)}, \\
\frac{1}{2}\,\mathbf{z}^{(2)}, & \mathbf{z}^{(2)}, \\
\frac{1}{4}\,\mathbf{z}^{(3)}, & \frac{1}{2}\,\mathbf{z}^{(3)}, \\
\dots & \dots \\
2^{1-i}\,\mathbf{z}^{(i)}, & 2^{2-i}\,\mathbf{z}^{(i)}, \\
\dots & \dots \\
\mathbf{z}^{(2^n)}. &
\end{array}$$

Пример равноудалённой вправо последовательности размера $2^{n+1} - 1$



Нечётные расстояния в $\mathbb{R}_1^n$

Уменьшим стандартный (открытый) кросcполитоп в 2 раза:
$C = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \|\mathbf{x}\|_1 < \frac{1}{2}\right\}$.

Нечётные расстояния в $\mathbb{R}^n_1$

Уменьшим стандартный (открытый) кросполитоп в 2 раза: $C = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\|_1 < \frac{1}{2}\right\}$. В каждой целой точке с чётной суммой координат (такие точки образуют решётку Λ с определителем 2) разместим копию C.

Нечётные расстояния в $\mathbb{R}^n_1$

Уменьшим стандартный (открытый) кросполитоп в 2 раза: $C = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\|_1 < \frac{1}{2}\right\}$. В каждой целой точке с чётной суммой координат (такие точки образуют решётку Λ с определителем 2) разместим копию C. Тогда никакие две точки полученного множества $\bigcup_{\mathbf{x}\in\Lambda}(C + \mathbf{x})$ не находятся друг от друга на нечётном расстоянии, поэтому всякое множество с нечётными расстояниями содержит в этих копиях максимум одну свою точку.

Нечётные расстояния в $\mathbb{R}_1^n$

Уменьшим стандартный (открытый) кроссполитоп в 2 раза: $C = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\|_1 < \frac{1}{2}\right\}$. В каждой целой точке с чётной суммой координат (такие точки образуют решётку Λ с определителем 2) разместим копию C. Тогда никакие две точки полученного множества $\bigcup_{\mathbf{x}\in\Lambda}(C + \mathbf{x})$ не находятся друг от друга на нечётном расстоянии, поэтому всякое множество с нечётными расстояниями содержит в этих копиях максимум одну свою точку. Согласно теореме Эрдёша-Роджерса достаточно

$$\frac{\det(\Lambda)}{\operatorname{vol}(C)} \cdot (2 + o(1)) n \ln n$$

копий этого объединения, чтобы покрыть всё пространство, что и даёт искомую оценку.

Пример равноудалённой вправо последовательности размера $4n-1$

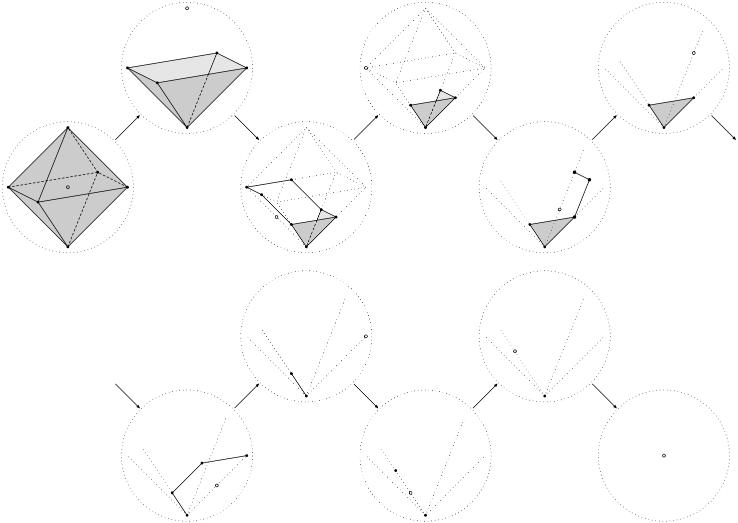
Сдвинем все вершины единичного кросcполитопа на вектор $\mathbf{e}_n$. Отсортируем получившиеся вершины в таком порядке: сначала $2\mathbf{e}_n$, в конце $\mathbf{0}$, между ними все остальные. Пусть полученная последовательность — $\mathbf{z}^{(1)}, \ldots, \mathbf{z}^{(2n)}$.

Пример равноудалённой вправо последовательности размера $4n-1$

Сдвинем все вершины единичного кросполитопа на вектор $\mathbf{e}_n$. Отсортируем получившиеся вершины в таком порядке: сначала $2\mathbf{e}_n$, в конце $\mathbf{0}$, между ними все остальные. Пусть полученная последовательность — $\mathbf{z}^{(1)}, \dots, \mathbf{z}^{(2n)}$. Тогда следующая последовательность равноудалена вправо:

$$\begin{array}{rl} \mathbf{z}^{(1)}, & 2\,\mathbf{z}^{(1)}, \\ \frac{1}{2}\,\mathbf{z}^{(2)}, & \mathbf{z}^{(2)}, \\ \frac{1}{4}\,\mathbf{z}^{(3)}, & \frac{1}{2}\,\mathbf{z}^{(3)}, \\ \dots & \dots \\ 2^{1-i}\,\mathbf{z}^{(i)}, & 2^{2-i}\,\mathbf{z}^{(i)}, \\ \dots & \dots \\ \mathbf{z}^{(2n)}\,. & \end{array}$$

Пример равноудалённой вправо последовательности размера $4n-1$



?