Максимальные индуцированные подграфы в случайном графе $G(n, p)$

Ахмеджанова М.Б. Кожевников В.С.[1] Жуковский М.Е.[2]

МФТИ[1], Tel Aviv University[2]

Вторая конференция Математических центров России:
Комбинаторика, дискретная геометрия, случайные структуры
МГУ, г. Москва
7–11 ноября 2022

Определения

Определения

Случайный граф Эрдёша–Реньи $G(n, p)$

Определения

Случайный граф Эрдёша–Реньи $G(n, p)$ имеет n вершин, каждая пара вершин соединяется ребром с вероятностью p независимо от других пар.

Определения

Случайный граф Эрдёша–Реньи $G(n, p)$ имеет n вершин, каждая пара вершин соединяется ребром с вероятностью p независимо от других пар.

Индуцированный подграф

Определения

Случайный граф Эрдёша–Реньи $G(n, p)$ имеет n вершин, каждая пара вершин соединяется ребром с вероятностью p независимо от других пар.

Индуцированный подграф — подграф, полученный удалением подмножества вершин.

Определения

Случайный граф Эрдёша–Реньи $G(n, p)$ имеет n вершин, каждая пара вершин соединяется ребром с вероятностью p независимо от других пар.

Индуцированный подграф — подграф, полученный удалением подмножества вершин.

Максимальный индуцированный подграф

Определения

Случайный граф Эрдёша–Реньи $G(n, p)$ имеет n вершин, каждая пара вершин соединяется ребром с вероятностью p независимо от других пар.

Индуцированный подграф — подграф, полученный удалением подмножества вершин.

Максимальный индуцированный подграф — индуцированный подграф с наибольшим числом вершин.

Определения

Случайный граф Эрдёша–Реньи $G(n, p)$ имеет n вершин, каждая пара вершин соединяется ребром с вероятностью p независимо от других пар.

Индуцированный подграф — подграф, полученный удалением подмножества вершин.

Максимальный индуцированный подграф — индуцированный подграф с наибольшим числом вершин.

Размер подграфа

Определения

Случайный граф Эрдёша–Реньи $G(n, p)$ имеет n вершин, каждая пара вершин соединяется ребром с вероятностью p независимо от других пар.

Индуцированный подграф — подграф, полученный удалением подмножества вершин.

Максимальный индуцированный подграф — индуцированный подграф с наибольшим числом вершин.

Размер подграфа — число вершин.

Определения

Случайный граф Эрдёша–Реньи $G(n, p)$ имеет n вершин, каждая пара вершин соединяется ребром с вероятностью p независимо от других пар.

Индуцированный подграф — подграф, полученный удалением подмножества вершин.

Максимальный индуцированный подграф — индуцированный подграф с наибольшим числом вершин.

Размер подграфа — число вершин.

Асимптотически почти наверное (а.п.н.)

Определения

Случайный граф Эрдёша–Реньи $G(n, p)$ имеет n вершин, каждая пара вершин соединяется ребром с вероятностью p независимо от других пар.

Индуцированный подграф — подграф, полученный удалением подмножества вершин.

Максимальный индуцированный подграф — индуцированный подграф с наибольшим числом вершин.

Размер подграфа — число вершин.

Асимптотически почти наверное (а.п.н.) — с вероятностью, стремящейся к 1 при $n \to +\infty$.

Двухточечная концентрация

Теорема (Bollobás, Erdős, 1976)

Пусть $p = \mathrm{const}$. *Тогда* $\exists f(n) \sim 2\log_q(np)$, *такая что а.п.н.*

$$f(n) \leq \alpha(G(n,p)) \leq f(n) + 1,$$

где $q = \frac{1}{1-p}$, $\alpha(G(n,p))$ — *число независимости графа G(n,p).*

Двухточечная концентрация

Теорема (Bollobás, Erdős, 1976)

Пусть $p = \mathrm{const}$. *Тогда* $\exists f(n) \sim 2\log_q(np)$, *такая что а.п.н.*

$$f(n) \le \alpha(G(n,p)) \le f(n) + 1,$$

где $q = \frac{1}{1-p}$, $\alpha(G(n,p))$ *— число независимости графа G(n,p).*

Число независимости $\alpha(G(n,p))$ — размер максимального индуцированного пустого подграфа.

Двухточечная концентрация

Теорема (Bollobás, Erdős, 1976)

Пусть $p = \mathrm{const}$. *Тогда* $\exists f(n) \sim 2\log_q(np)$, *такая что а.п.н.*

$$f(n) \le \alpha(G(n,p)) \le f(n) + 1,$$

где $q = \frac{1}{1-p}$, $\alpha(G(n,p))$ — *число независимости графа G(n,p).*

Число независимости $\alpha(G(n,p))$ — размер максимального индуцированного пустого подграфа.
Теорема также верна для максимальных индуцированных

- деревьев;
- лесов;
- путей;
- циклов;
- паросочетаний;
- графов ограниченной степени;
- графов ограниченной средней степени.

Асимптотика

Асимптотика

Теорема (Frieze, 1990)

Пусть $np = c = \mathrm{const}$. *Тогда* $\exists f(n)$, *такая что* $\forall \varepsilon > 0$ *а.п.н.*

$$\left|\frac{\alpha(G(n,p))}{f(n)} - 1\right| \leq \varepsilon$$

причём $f(n) = \alpha(c) \cdot n$, *где* $\alpha(c) \sim \frac{2 \ln c}{c}, c \to +\infty$.

Асимптотика

Теорема (Frieze, 1990)

Пусть $np = c = \mathrm{const}$. *Тогда* $\exists f(n)$, *такая что* $\forall \varepsilon > 0$ *а.п.н.*

$$\left| \frac{\alpha(G(n,p))}{f(n)} - 1 \right| \le \varepsilon$$

причём $f(n) = \alpha(c) \cdot n$, *где* $\alpha(c) \sim \frac{2 \ln c}{c}$, $c \to +\infty$.

Теорема также верна для максимальных индуцированных

- деревьев;
- лесов;
- путей;
- циклов;
- паросочетаний;
- графов ограниченной степени;
- графов ограниченной средней степени.

Асимптотика

Теорема (Frieze, 1990)

Пусть $np = c = \mathrm{const}$. *Тогда* $\exists f(n)$, *такая что* $\forall \varepsilon > 0$ *а.п.н.*

$$\left| \frac{\alpha(G(n,p))}{f(n)} - 1 \right| \le \varepsilon$$

причём $f(n) = \alpha(c) \cdot n$, *где* $\alpha(c) \sim \frac{2\ln c}{c}$, $c \to +\infty$.

Теорема также верна для максимальных индуцированных

- деревьев;
- лесов;
- путей;
- циклов;
- паросочетаний;
- графов ограниченной степени;
- графов ограниченной средней степени.

Пусть $q = \frac{1}{1-p}$, тогда $f(n) \approx \frac{2\ln c}{c} n = \frac{2\ln(np)}{p} \sim 2\log_q(np)$.

Концентрация в интервале размера $o(1/p)$

Теорема (Frieze, 1990)

Пусть $\frac{1}{n} \ll p \ll 1$. *Тогда* $\exists f(n) \sim 2\log_q(np)$, *такая что* $\forall \varepsilon > 0$ *а.п.н.*

$$|\alpha(G(n,p)) - f(n)| \leq \frac{\varepsilon}{p}.$$

где $q = \frac{1}{1-p}$, $\alpha(G(n,p))$ — *число независимости графа G(n,p).*

Концентрация в интервале размера $o(1/p)$

Теорема (Frieze, 1990)

Пусть $\frac{1}{n} \ll p \ll 1$. *Тогда* $\exists f(n) \sim 2\log_q(np)$, *такая что* $\forall \varepsilon > 0$ *а.п.н.*

$$|\alpha(G(n,p)) - f(n)| \leq \frac{\varepsilon}{p}.$$

где $q = \frac{1}{1-p}$, $\alpha(G(n,p))$ — *число независимости графа G(n,p).*

Отметим, что $f(n) \sim \frac{2\ln(np)}{p} \gg \frac{1}{p}$.

Концентрация в интервале размера $o(1/p)$

Теорема (Frieze, 1990)

Пусть $\frac{1}{n} \ll p \ll 1$. *Тогда* $\exists f(n) \sim 2\log_q(np)$, *такая что* $\forall \varepsilon > 0$ *а.п.н.*

$$|\alpha(G(n,p)) - f(n)| \leq \frac{\varepsilon}{p}.$$

где $q = \frac{1}{1-p}$, $\alpha(G(n,p))$ *— число независимости графа G(n,p).*

Отметим, что $f(n) \sim \frac{2\ln(np)}{p} \gg \frac{1}{p}$.

Гипотеза

Теорема верна для максимальных индуцированных

- *деревьев;*
- *лесов;*
- *путей;*
- *циклов;*
- *паросочетаний;*
- *графов ограниченной степени;*
- *графов ограниченной средней степени.*

Индуцированные леса и деревья

Пусть $f(n) = \lceil 2\log_q(enp) + 1 \rceil$.

Индуцированные леса и деревья

Пусть $f(n) = \lceil 2\log_q(enp) + 1 \rceil$.

Для размера максимального индуцированного дерева:

- а.п.н. двухточечная концентрация в $\{f(n), f(n)+1\}$ при $p = \mathrm{const}$ (Камалдинов, Скоркин, Жуковский, 2019);

Индуцированные леса и деревья

Пусть $f(n) = \lceil 2\log_q(enp) + 1 \rceil$.

Для размера максимального индуцированного дерева:

- а.п.н. двухточечная концентрация в $\{f(n), f(n)+1\}$ при $p = \mathrm{const}$ (Камалдинов, Скоркин, Жуковский, 2019);
- а.п.н. асимптотика $f(n)$ при $np = \mathrm{const} > 1$ (Fernandez de la Vega, 1986);

Индуцированные леса и деревья

Пусть $f(n) = \lceil 2\log_q(enp) + 1 \rceil$.

Для размера максимального индуцированного дерева:

- а.п.н. двухточечная концентрация в $\{f(n), f(n)+1\}$ при $p = \mathrm{const}$ (Камалдинов, Скоркин, Жуковский, 2019);
- а.п.н. асимптотика $f(n)$ при $np = \mathrm{const} > 1$ (Fernandez de la Vega, 1986);
- а.п.н. есть путь размера $\sim f(n)$ при $\frac{1}{n} \ll p \ll 1$ (Draganić, Glock, Krivelevich, 2022);

Индуцированные леса и деревья

Пусть $f(n) = \lceil 2\log_q(enp) + 1 \rceil$.

Для размера максимального индуцированного дерева:

- а.п.н. двухточечная концентрация в $\{f(n), f(n)+1\}$ при $p = \mathrm{const}$ (Камалдинов, Скоркин, Жуковский, 2019);
- а.п.н. асимптотика $f(n)$ при $np = \mathrm{const} > 1$ (Fernandez de la Vega, 1986);
- а.п.н. есть путь размера $\sim f(n)$ при $\frac{1}{n} \ll p \ll 1$ (Draganić, Glock, Krivelevich, 2022);
- а.п.н. есть произвольное дерево ограниченной степени размера $\sim f(n)$ при $\frac{(\ln n)^{\frac{10}{9}}}{\sqrt{n}} \ll p \ll 1$ (Draganić, 2020);

Индуцированные леса и деревья

Пусть $f(n) = \lceil 2\log_q(enp) + 1 \rceil$.

Для размера максимального индуцированного дерева:

- а.п.н. двухточечная концентрация в $\{f(n), f(n)+1\}$ при $p = \mathrm{const}$ (Камалдинов, Скоркин, Жуковский, 2019);
- а.п.н. асимптотика $f(n)$ при $np = \mathrm{const} > 1$ (Fernandez de la Vega, 1986);
- а.п.н. есть путь размера $\sim f(n)$ при $\frac{1}{n} \ll p \ll 1$ (Draganić, Glock, Krivelevich, 2022);
- а.п.н. есть произвольное дерево ограниченной степени размера $\sim f(n)$ при $\frac{(\ln n)^{\frac{10}{9}}}{\sqrt{n}} \ll p \ll 1$ (Draganić, 2020);

Для размера максимального индуцированного леса:

- а.п.н. двухточечная концентрация в $\{f(n), f(n)+1\}$ при $p = \mathrm{const}$ (Кривошапко, Жуковский, 2021);

Индуцированные леса и деревья

Пусть $f(n) = \lceil 2\log_q(enp) + 1 \rceil$.

Для размера максимального индуцированного дерева:

- а.п.н. двухточечная концентрация в $\{f(n), f(n)+1\}$ при $p = \mathrm{const}$ (Камалдинов, Скоркин, Жуковский, 2019);
- а.п.н. асимптотика $f(n)$ при $np = \mathrm{const} > 1$ (Fernandez de la Vega, 1986);
- а.п.н. есть путь размера $\sim f(n)$ при $\frac{1}{n} \ll p \ll 1$ (Draganić, Glock, Krivelevich, 2022);
- а.п.н. есть произвольное дерево ограниченной степени размера $\sim f(n)$ при $\frac{(\ln n)^{\frac{10}{9}}}{\sqrt{n}} \ll p \ll 1$ (Draganić, 2020);

Для размера максимального индуцированного леса:

- а.п.н. двухточечная концентрация в $\{f(n), f(n)+1\}$ при $p = \mathrm{const}$ (Кривошапко, Жуковский, 2021);
- а.п.н. есть произвольный лес ограниченной степени размера $\sim f(n)$ при $\frac{\ln n}{\sqrt{n}} \ll p \ll 1$ (Draganić, Glock, Krivelevich, 2022);

Индуцированные леса и деревья: новые результаты

Индуцированные леса и деревья: новые результаты

Пусть $f(n) = \lceil 2 \log_q (a_\Delta np) + 1 \rceil$, где $1 < a_\Delta < e$, $\Delta = \mathrm{const}$.

Индуцированные леса и деревья: новые результаты

Пусть $f(n) = \lceil 2\log_q(a_\Delta np) + 1 \rceil$, где $1 < a_\Delta < e$, $\Delta = \mathrm{const}$.
Для размера макс. индуцированного дерева степени $\leq \Delta$:

- а.п.н. двухточечная концентрация в $\{f(n), f(n)+1\}$ при $p = \mathrm{const}$.

Индуцированные леса и деревья: новые результаты

Пусть $f(n) = \lceil 2\log_q(a_\Delta np) + 1 \rceil$, где $1 < a_\Delta < e$, $\Delta = \mathrm{const}$.
Для размера макс. индуцированного дерева степени $\leq \Delta$:

- а.п.н. двухточечная концентрация в $\{f(n), f(n)+1\}$ при $p = \mathrm{const}$.

Для размера макс. индуцированного леса степени $\leq \Delta$:

- а.п.н. двухточечная концентрация в $\{f(n), f(n)+1\}$ при $p = \mathrm{const}$.

Индуцированные леса и деревья: новые результаты

Пусть $f(n) = \lceil 2\log_q(a_\Delta np) + 1 \rceil$, где $1 < a_\Delta < e$, $\Delta = \mathrm{const}$.
Для размера макс. индуцированного дерева степени $\leq \Delta$:

- а.п.н. двухточечная концентрация в $\{f(n), f(n)+1\}$ при $p = \mathrm{const}$.

Для размера макс. индуцированного леса степени $\leq \Delta$:

- а.п.н. двухточечная концентрация в $\{f(n), f(n)+1\}$ при $p = \mathrm{const}$.

Для размера макс. индуцированного леса:

- а.п.н. концентрация в интервале размера $o(1/p)$ в окрестности $2\log_q(enp)$ при $\frac{1}{n} \ll p \ll 1$.

Индуцированные леса и деревья: новые результаты

Пусть $f(n) = \lceil 2\log_q(a_\Delta np) + 1 \rceil$, где $1 < a_\Delta < e$, $\Delta = \mathrm{const}$.
Для размера макс. индуцированного дерева степени $\leq \Delta$:

- а.п.н. двухточечная концентрация в $\{f(n), f(n)+1\}$ при $p = \mathrm{const}$.

Для размера макс. индуцированного леса степени $\leq \Delta$:

- а.п.н. двухточечная концентрация в $\{f(n), f(n)+1\}$ при $p = \mathrm{const}$.

Для размера макс. индуцированного леса:

- а.п.н. концентрация в интервале размера $o(1/p)$ в окрестности $2\log_q(enp)$ при $\frac{1}{n} \ll p \ll 1$.

Гипотеза

Для размера макс. индуцированного леса степени $\leq \Delta$:

- *а.п.н. концентрация в интервале размера $o(1/p)$ в окрестности $2\log_q(a_\Delta np)$ при $\frac{1}{n} \ll p \ll 1$.*

Монотонные свойства

Монотонные свойства

Что общего у следующих классов графов:

- деревьев;
- лесов;
- путей;
- циклов;
- паросочетаний;
- независимых множеств;
- графов ограниченной степени;
- графов ограниченной средней степени?

Монотонные свойства

Что общего у следующих классов графов:

- деревьев;
- лесов;
- путей;
- циклов;
- паросочетаний;
- независимых множеств;
- графов ограниченной степени;
- графов ограниченной средней степени?

  - Эти графы разреженные, т.е. имеют $o(k^2)$ рёбер, где k — число вершин;

Монотонные свойства

Что общего у следующих классов графов:

- деревьев;
- лесов;
- путей;
- циклов;
- паросочетаний;
- независимых множеств;
- графов ограниченной степени;
- графов ограниченной средней степени?

- Эти графы разреженные, т.е. имеют $o(k^2)$ рёбер, где k — число вершин; их размер $< (2+\varepsilon)\log_q n$ в $G(n, p = \mathrm{const})$.

Монотонные свойства

Что общего у следующих классов графов:

- деревьев;
- лесов;
- путей;
- циклов;
- паросочетаний;
- независимых множеств;
- графов ограниченной степени;
- графов ограниченной средней степени?

- Эти графы разреженные, т.е. имеют $o(k^2)$ рёбер, где k — число вершин; их размер $< (2+\varepsilon)\log_q n$ в $G(n, p = \mathrm{const})$.
- Некоторые являются монотонными свойствами, т.е. замкнуты относительно удаления вершин и рёбер (леса, независимые множества, графы ограниченной степени).

Монотонные свойства

Что общего у следующих классов графов:

- деревьев;
- лесов;
- путей;
- циклов;
- паросочетаний;
- независимых множеств;
- графов ограниченной степени;
- графов ограниченной средней степени?

- Эти графы разреженные, т.е. имеют $o(k^2)$ рёбер, где k — число вершин; их размер $< (2+\varepsilon)\log_q n$ в $G(n, p = \mathrm{const})$.
- Некоторые являются монотонными свойствами, т.е. замкнуты относительно удаления вершин и рёбер (леса, независимые множества, графы ограниченной степени).
- Некоторые являются рёберно-монотонными свойствами, т.е. замкнуты относительно удаления рёбер (графы ограниченной средней степени).

Монотонные свойства

Что общего у следующих классов графов:

- деревьев;
- лесов;
- путей;
- циклов;
- паросочетаний;
- независимых множеств;
- графов ограниченной степени;
- графов ограниченной средней степени?

- Эти графы разреженные, т.е. имеют $o(k^2)$ рёбер, где k — число вершин; их размер $< (2+\varepsilon)\log_q n$ в $G(n, p = \mathrm{const})$.
- Некоторые являются монотонными свойствами, т.е. замкнуты относительно удаления вершин и рёбер (леса, независимые множества, графы ограниченной степени).
- Некоторые являются рёберно-монотонными свойствами, т.е. замкнуты относительно удаления рёбер (графы ограниченной средней степени).
- Некоторые являются границей рёберно-монотонных свойств, т.е. состоят из максимальных по включению графов (деревья, паросочетания, пути).

Наследственные свойства

Наследственные свойства

Вершинно-монотонное (наследственное) свойство — замкнутое относительно удаления вершин.

Наследственные свойства

Вершинно-монотонное (наследственное) свойство — замкнутое относительно удаления вершин.

Теорема (Bollobás, Thomason, 2000)

Пусть $\mathcal{P}$ — произвольное наследственное свойство, $X(\mathcal{P})$ — размер максимального индуцированного подграфа в $G(n, p = \mathrm{const})$, обладающего свойством $\mathcal{P}$.

Наследственные свойства

Вершинно-монотонное (наследственное) свойство — замкнутое относительно удаления вершин.

Теорема (Bollobás, Thomason, 2000)

Пусть $\mathcal{P}$ — произвольное наследственное свойство, $X(\mathcal{P})$ — размер максимального индуцированного подграфа в $G(n, p = \mathrm{const})$, обладающего свойством $\mathcal{P}$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ а.п.н.

$$\frac{2-\varepsilon}{c_{\mathcal{P}}} \ln n < X(\mathcal{P}) < \frac{2+\varepsilon}{c_{\mathcal{P}}} \ln n$$

Наследственные свойства

Вершинно-монотонное (наследственное) свойство — замкнутое относительно удаления вершин.

Теорема (Bollobás, Thomason, 2000)

Пусть $\mathcal{P}$ *— произвольное наследственное свойство,* $X(\mathcal{P})$ *— размер максимального индуцированного подграфа в* $G(n, p = \mathrm{const})$, *обладающего свойством* $\mathcal{P}$. *Тогда* $\forall \varepsilon > 0$ *а.п.н.*

$$\frac{2-\varepsilon}{c_{\mathcal{P}}} \ln n < X(\mathcal{P}) < \frac{2+\varepsilon}{c_{\mathcal{P}}} \ln n,$$

где $c_{\mathcal{P}} = \lim\limits_{k \to +\infty} \frac{-\ln \mathbb{P}(G(k,p) \in \mathcal{P})}{\binom{k}{2}}$.

Наследственные свойства

Вершинно-монотонное (наследственное) свойство — замкнутое относительно удаления вершин.

Теорема (Bollobás, Thomason, 2000)

Пусть $\mathcal{P}$ — произвольное наследственное свойство, $X(\mathcal{P})$ — размер максимального индуцированного подграфа в $G(n, p = \mathrm{const})$, обладающего свойством $\mathcal{P}$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ а.п.н.

$$\frac{2-\varepsilon}{c_{\mathcal{P}}} \ln n < X(\mathcal{P}) < \frac{2+\varepsilon}{c_{\mathcal{P}}} \ln n,$$

где $c_{\mathcal{P}} = \lim\limits_{k \to +\infty} \frac{-\ln \mathbb{P}(G(k,p) \in \mathcal{P})}{\binom{k}{2}}$.

Если $\mathcal{P}$ разреженное, то $c_{\mathcal{P}} = \ln q$,

$$(2-\varepsilon) \log_q n < X(\mathcal{P}) < (2+\varepsilon) \log_q n,$$

где $q = \frac{1}{1-p}$.

Рёберно-монотонные свойства

Рёберно-монотонные свойства

Гипотеза

Пусть $\mathcal{P}$ *— произвольное разреженное рёберно-монотонное свойство,* $X(\mathcal{P})$ *— размер максимального индуцированного подграфа в* $G(n, p = \mathrm{const})$*, обладающего свойством* $\mathcal{P}$*. Тогда* $\exists f(n) \sim 2\log_q(np)$*, такая что а.п.н.*

$$f(n) \leq X(\mathcal{P}) \leq f(n) + 1.$$

Рёберно-монотонные свойства

Гипотеза

Пусть $\mathcal{P}$ *— произвольное разреженное рёберно-монотонное свойство,* $X(\mathcal{P})$ *— размер максимального индуцированного подграфа в* $G(n, p = \mathrm{const})$*, обладающего свойством* $\mathcal{P}$*. Тогда* $\exists f(n) \sim 2\log_q(np)$*, такая что а.п.н.*

$$f(n) \leq X(\mathcal{P}) \leq f(n) + 1.$$

Гипотеза

Пусть $\mathcal{P}$ *— произвольное рёберно-монотонное свойство, для которого а.п.н.* $X(\mathcal{P}) = \Theta(\ln n)$*. Пусть* $\partial\mathcal{P}$ *— граница свойства* $\mathcal{P}$*. Тогда* $\forall \varepsilon > 0$ *а.п.н.*

$$1 - \varepsilon < \frac{X(\partial\mathcal{P})}{X(\mathcal{P})} < 1 + \varepsilon.$$