

Степени вершин двудольного графа и разброс когерентных независимых распределений

Фёдор Петров

Санкт-Петербургский Государственный Университет,
ПОМИ им. В. А. Стеклова РАН

9 ноября 2022 г.

Предсказания

Предсказания

A — случайное событие, X — *предсказание* A , то есть случайная величина вида

$$E(\mathbb{1}_A | \dots)$$

Предсказания

A — случайное событие, X — *предсказание* A , то есть случайная величина вида

$$E(\mathbb{1}_A | \dots)$$

два предсказания X, Y одного события A называются *когерентными* случайными величинами

Предсказания

A — случайное событие, X — *предсказание* A , то есть случайная величина вида

$$E(\mathbb{1}_A | \dots)$$

два предсказания X, Y одного события A называются *когерентными* случайными величинами

A : “монета выпала решкой”,

Предсказания

A — случайное событие, X — *предсказание* A , то есть случайная величина вида

$$E(\mathbb{1}_A | \dots)$$

два предсказания X, Y одного события A называются *когерентными* случайными величинами

A : “монета выпала решкой”, $X = \mathbb{1}_A$,

Предсказания

A — случайное событие, X — *предсказание* A , то есть случайная величина вида

$$E(\mathbb{1}_A | \dots)$$

два предсказания X, Y одного события A называются *когерентными* случайными величинами

A : “монета выпала решкой”, $X = \mathbb{1}_A$, $Y = 1/2$

Предсказания

A — случайное событие, X — *предсказание* A , то есть случайная величина вида

$$E(\mathbb{1}_A | \dots)$$

два предсказания X, Y одного события A называются *когерентными* случайными величинами

A : “монета выпала решкой”, $X = \mathbb{1}_A$, $Y = 1/2$

в этом примере всегда $|X - Y| = 1/2$

Предсказания

A — случайное событие, X — *предсказание* A , то есть случайная величина вида

$$E(\mathbb{1}_A | \dots)$$

два предсказания X, Y одного события A называются *когерентными* случайными величинами

A : “монета выпала решкой”, $X = \mathbb{1}_A$, $Y = 1/2$

в этом примере всегда $|X - Y| = 1/2$ но $\text{Prob}(|X - Y| > 1/2) \leq 2/3$

Предсказания

A — случайное событие, X — *предсказание* A , то есть случайная величина вида

$$E(\mathbb{1}_A | \dots)$$

два предсказания X, Y одного события A называются *когерентными* случайными величинами

A : “монета выпала решкой”, $X = \mathbb{1}_A$, $Y = 1/2$

в этом примере всегда $|X - Y| = 1/2$ но $\text{Prob}(|X - Y| > 1/2) \leq 2/3$

К. Бурди, С. Пал (2021); С. Цихомский, А. Осеховский (2022) :

$$\max \text{Prob}(|X - Y| \geq \delta) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq \delta \leq 1/2 \\ \frac{2(1-\delta)}{2-\delta}, & \text{если } 1/2 < \delta \leq 1 \end{cases}$$

Предсказания

A — случайное событие, X — *предсказание* A , то есть случайная величина вида

$$E(\mathbb{1}_A | \dots)$$

два предсказания X, Y одного события A называются *когерентными* случайными величинами

A : “монета выпала решкой”, $X = \mathbb{1}_A$, $Y = 1/2$

в этом примере всегда $|X - Y| = 1/2$ но $\text{Prob}(|X - Y| > 1/2) \leq 2/3$

К. Бурди, С. Пал (2021); С. Цихомский, А. Осеховский (2022) :

$$\max \text{Prob}(|X - Y| \geq \delta) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq \delta \leq 1/2 \\ \frac{2(1-\delta)}{2-\delta}, & \text{если } 1/2 < \delta \leq 1 \end{cases}$$

на работу взяли Борю (вероятность $p := \frac{1-\delta}{2-\delta}$), Васю (тоже p) или Аню ($1 - 2p$), победитель знает что победил. A — событие “взяли Аню”

Предсказания

A — случайное событие, X — *предсказание* A , то есть случайная величина вида

$$E(\mathbb{1}_A | \dots)$$

два предсказания X, Y одного события A называются *когерентными* случайными величинами

A : “монета выпала решкой”, $X = \mathbb{1}_A$, $Y = 1/2$

в этом примере всегда $|X - Y| = 1/2$ но $\text{Prob}(|X - Y| > 1/2) \leq 2/3$

К. Бурди, С. Пал (2021); С. Цихомский, А. Осеховский (2022) :

$$\max \text{Prob}(|X - Y| \geq \delta) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq \delta \leq 1/2 \\ \frac{2(1-\delta)}{2-\delta}, & \text{если } 1/2 < \delta \leq 1 \end{cases}$$

на работу взяли Бору (вероятность $p := \frac{1-\delta}{2-\delta}$), Васю (тоже p) или Аню ($1 - 2p$), победитель знает что победил. A — событие “взяли Аню”

X — предсказание Бори, Y — Васи. Значения X :

$(\frac{1-2p}{1-p}, 0, \frac{1-2p}{1-p}) = (\delta, 0, \delta)$, Y : $(\delta, \delta, 0)$.

Независимые предсказания

Независимые предсказания

X , Y — когерентные и **независимые**.

Независимые предсказания

X , Y — когерентные и **независимые**. n мальчиков и n девочек, Вася выбирает случайно мальчика b , Аня девочку g , событие A : b и g дружат.

Независимые предсказания

X, Y — когерентные и **независимые**. n мальчиков и n девочек, Вася выбирает случайно мальчика b , Аня девочку g , событие A : b и g дружат. X — ожидание Васи, оно равно $\deg(b)/n$, ожидание Ани $Y = \deg(g)/n$

Независимые предсказания

X, Y — когерентные и **независимые**. n мальчиков и n девочек, Вася выбирает случайно мальчика b , Аня девочку g , событие A : b и g дружат. X — ожидание Васи, оно равно $\deg(b)/n$, ожидание Ани $Y = \deg(g)/n$

С. Цихомский, ФП (2021):

$$\max |(b, g) : |\deg(b) - \deg(g)| \geq k| = \begin{cases} n^2, & \text{если } 0 \leq k \leq n/2 \\ 2k(n - k), & \text{если } n/2 < k \leq n \end{cases}$$

Независимые предсказания

X, Y — когерентные и **независимые**. n мальчиков и n девочек, Вася выбирает случайно мальчика b , Аня девочку g , событие A : b и g дружат. X — ожидание Васи, оно равно $\deg(b)/n$, ожидание Ани $Y = \deg(g)/n$

С. Цихомский, ФП (2021):

$$\max |(b, g) : |\deg(b) - \deg(g)| \geq k| = \begin{cases} n^2, & \text{если } 0 \leq k \leq n/2 \\ 2k(n - k), & \text{если } n/2 < k \leq n \end{cases}$$

Примеры: $K_{n,k}$ при $k \leq n/2$ и $K_{k,k}$ при $k > n/2$.

Независимые предсказания

X, Y — когерентные и **независимые**. n мальчиков и n девочек, Вася выбирает случайно мальчика b , Аня девочку g , событие A : b и g дружат. X — ожидание Васи, оно равно $\deg(b)/n$, ожидание Ани $Y = \deg(g)/n$

С. Цихомский, ФП (2021):

$$\max |(b, g) : |\deg(b) - \deg(g)| \geq k| = \begin{cases} n^2, & \text{если } 0 \leq k \leq n/2 \\ 2k(n - k), & \text{если } n/2 < k \leq n \end{cases}$$

Примеры: $K_{n,k}$ при $k \leq n/2$ и $K_{k,k}$ при $k > n/2$.

$$\max \text{Prob}(|X - Y| \geq \delta) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq \delta \leq 1/2 \\ 2\delta(1 - \delta), & \text{если } 1/2 < \delta \leq 1 \end{cases}$$

Произвольный граф

Произвольный граф

n вершин, $k \leq n - 1$ — тогда найдутся $k + 1$ вершин с разбросом степеней $\leq k - 1$

Произвольный граф

n вершин, $k \leq n - 1$ — тогда найдутся $k + 1$ вершин с разбросом степеней $\leq k - 1$

$d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$, пусть $d_{i+k} \geq d_i + k$ при $k = 1, 2, \dots, n - k$

Произвольный граф

n вершин, $k \leq n - 1$ — тогда найдутся $k + 1$ вершин с разбросом степеней $\leq k - 1$

$d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$, пусть $d_{i+k} \geq d_i + k$ при $k = 1, 2, \dots, n - k$

вершины $k + 1, \dots, n$ посылают $\geq d_1 + \dots + d_{n-k} + k(n - k)$ открыток

Произвольный граф

n вершин, $k \leq n - 1$ — тогда найдутся $k + 1$ вершин с разбросом степеней $\leq k - 1$

$d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$, пусть $d_{i+k} \geq d_i + k$ при $k = 1, 2, \dots, n - k$
вершины $k + 1, \dots, n$ посылают $\geq d_1 + \dots + d_{n-k} + k(n - k)$ открыток
хотя бы $k(n - k)$ пришли в вершины $n - k + 1, \dots, n$, но каждая получила $\leq n - k$, и равенство везде невозможно

Произвольный граф

n вершин, $k \leq n - 1$ — тогда найдутся $k + 1$ вершин с разбросом степеней $\leq k - 1$

$d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$, пусть $d_{i+k} \geq d_i + k$ при $k = 1, 2, \dots, n - k$
вершины $k + 1, \dots, n$ посылают $\geq d_1 + \dots + d_{n-k} + k(n - k)$ открыток
хотя бы $k(n - k)$ пришли в вершины $n - k + 1, \dots, n$, но каждая получила $\leq n - k$, и равенство везде невозможно

P. Erdős, G. Chen, C.C. Rousseau, R.H. Schelp (1993)

Произвольный граф

n вершин, $k \leq n - 1$ — тогда найдутся $k + 1$ вершин с разбросом степеней $\leq k - 1$

$d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$, пусть $d_{i+k} \geq d_i + k$ при $k = 1, 2, \dots, n - k$
вершины $k + 1, \dots, n$ посылают $\geq d_1 + \dots + d_{n-k} + k(n - k)$ открыток
хотя бы $k(n - k)$ пришли в вершины $n - k + 1, \dots, n$, но каждая получила $\leq n - k$, и равенство везде невозможно

P. Erdős, G. Chen, C.C. Rousseau, R.H. Schelp (1993)

если $n > k \geq n/2$, то

$\max |\{x, y\} : |\deg(x) - \deg(y)| \geq k| = (k + 1)(n - k - 1)$ (пример: K_{k+1})

Произвольный граф

n вершин, $k \leq n - 1$ — тогда найдутся $k + 1$ вершин с разбросом степеней $\leq k - 1$

$d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$, пусть $d_{i+k} \geq d_i + k$ при $k = 1, 2, \dots, n - k$
вершины $k + 1, \dots, n$ посылают $\geq d_1 + \dots + d_{n-k} + k(n - k)$ открыток
хотя бы $k(n - k)$ пришли в вершины $n - k + 1, \dots, n$, но каждая получила $\leq n - k$, и равенство везде невозможно

P. Erdős, G. Chen, C.C. Rousseau, R.H. Schelp (1993)

если $n > k \geq n/2$, то

$\max |\{x, y\} : |\deg(x) - \deg(y)| \geq k| = (k + 1)(n - k - 1)$ (пример: K_{k+1})
 $k + 1$ особых вершин с разбросом $< k$; a маленьких; $b = n - k - 1 - a$ больших,

Произвольный граф

n вершин, $k \leq n - 1$ — тогда найдутся $k + 1$ вершин с разбросом степеней $\leq k - 1$

$d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$, пусть $d_{i+k} \geq d_i + k$ при $k = 1, 2, \dots, n - k$
вершины $k + 1, \dots, n$ посылают $\geq d_1 + \dots + d_{n-k} + k(n - k)$ открыток
хотя бы $k(n - k)$ пришли в вершины $n - k + 1, \dots, n$, но каждая получила $\leq n - k$, и равенство везде невозможно

P. Erdős, G. Chen, C.C. Rousseau, R.H. Schelp (1993)

если $n > k \geq n/2$, то

$\max |\{x, y\} : |\deg(x) - \deg(y)| \geq k| = (k + 1)(n - k - 1)$ (пример: K_{k+1})
 $k + 1$ особых вершин с разбросом $< k$; a маленьких; $b = n - k - 1 - a$ больших, особая не дружит с большой и маленькой сразу

Произвольный граф

n вершин, $k \leq n - 1$ — тогда найдутся $k + 1$ вершин с разбросом степеней $\leq k - 1$

$d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$, пусть $d_{i+k} \geq d_i + k$ при $k = 1, 2, \dots, n - k$
вершины $k + 1, \dots, n$ посылают $\geq d_1 + \dots + d_{n-k} + k(n - k)$ открыток
хотя бы $k(n - k)$ пришли в вершины $n - k + 1, \dots, n$, но каждая получила $\leq n - k$, и равенство везде невозможно

P. Erdős, G. Chen, C.C. Rousseau, R.H. Schelp (1993)

если $n > k \geq n/2$, то

$\max |\{x, y\} : |\deg(x) - \deg(y)| \geq k| = (k + 1)(n - k - 1)$ (пример: K_{k+1})

$k + 1$ особых вершин с разбросом $< k$; a маленьких; $b = n - k - 1 - a$ больших, особая не дружит с большой и маленькой сразу

$c := \max(a, b)$, пар не больше чем

$$ab + c(k + 1) = c(n - c) \leq (n - k - 1)(k + 1)$$

Двудольный граф

Двудольный граф

мальчики, степени $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$; у девочек $\delta_1 \geq \delta_2 \geq \dots \geq \delta_n$

Двудольный граф

мальчики, степени $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$; у девочек $\delta_1 \geq \delta_2 \geq \dots \geq \delta_n$
хотим: $|(i, j): |d_i - \delta_j| \geq k| \leq 2k(n - k)$

Двудольный граф

мальчики, степени $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$; у девочек $\delta_1 \geq \delta_2 \geq \dots \geq \delta_n$

хотим: $|(i, j): |d_i - \delta_j| \geq k| \leq 2k(n - k)$

Лемма. Для некоторого $s \in \{1, 2, \dots, n - k + 1\}$ имеем

$$d_s \leq \delta_{s+k-1} + k - 1.$$

Двудольный граф

мальчики, степени $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$; у девочек $\delta_1 \geq \delta_2 \geq \dots \geq \delta_n$

хотим: $|(i, j): |d_i - \delta_j| \geq k| \leq 2k(n - k)$

Лемма. Для некоторого $s \in \{1, 2, \dots, n - k + 1\}$ имеем

$$d_s \leq \delta_{s+k-1} + k - 1.$$

иначе $d_s \geq \delta_{s+k-1} + k$ и из мальчиков $1, \dots, n - k + 1$ выходит хотя бы $\delta_k + \dots + \delta_n + k(n - k + 1)$ рёбер,

Двудольный граф

мальчики, степени $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$; у девочек $\delta_1 \geq \delta_2 \geq \dots \geq \delta_n$

хотим: $|(i, j): |d_i - \delta_j| \geq k| \leq 2k(n - k)$

Лемма. Для некоторого $s \in \{1, 2, \dots, n - k + 1\}$ имеем

$d_s \leq \delta_{s+k-1} + k - 1$.

иначе $d_s \geq \delta_{s+k-1} + k$ и из мальчиков $1, \dots, n - k + 1$ выходит хотя бы $\delta_k + \dots + \delta_n + k(n - k + 1)$ рёбер, но в девочек $k, \dots, n$ ведёт не больше чем $\delta_k + \dots + \delta_n$ рёбер, а в девочек $1, \dots, k - 1$ не больше чем $(k - 1)(n - k + 1)$ рёбер.

Двудольный граф

мальчики, степени $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$; у девочек $\delta_1 \geq \delta_2 \geq \dots \geq \delta_n$

хотим: $|(i, j): |d_i - \delta_j| \geq k| \leq 2k(n - k)$

Лемма. Для некоторого $s \in \{1, 2, \dots, n - k + 1\}$ имеем

$$d_s \leq \delta_{s+k-1} + k - 1.$$

иначе $d_s \geq \delta_{s+k-1} + k$ и из мальчиков $1, \dots, n - k + 1$ выходит хотя бы $\delta_k + \dots + \delta_n + k(n - k + 1)$ рёбер, но в девочек $k, \dots, n$ ведёт не больше чем $\delta_k + \dots + \delta_n$ рёбер, а в девочек $1, \dots, k - 1$ не больше чем $(k - 1)(n - k + 1)$ рёбер.

Итак, $d_s \leq \delta_{s+k-1} + k - 1$, аналогично $\delta_t \leq d_{t+k-1} + k - 1$

Двудольный граф

мальчики, степени $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$; у девочек $\delta_1 \geq \delta_2 \geq \dots \geq \delta_n$

хотим: $|(i, j): |d_i - \delta_j| \geq k| \leq 2k(n - k)$

Лемма. Для некоторого $s \in \{1, 2, \dots, n - k + 1\}$ имеем

$$d_s \leq \delta_{s+k-1} + k - 1.$$

иначе $d_s \geq \delta_{s+k-1} + k$ и из мальчиков $1, \dots, n - k + 1$ выходит хотя бы $\delta_k + \dots + \delta_n + k(n - k + 1)$ рёбер, но в девочек $k, \dots, n$ ведёт не больше чем $\delta_k + \dots + \delta_n$ рёбер, а в девочек $1, \dots, k - 1$ не больше чем $(k - 1)(n - k + 1)$ рёбер.

Итак, $d_s \leq \delta_{s+k-1} + k - 1$, аналогично $\delta_t \leq d_{t+k-1} + k - 1$

b, g , $|deg(b) - deg(g)| \geq k$. мужская пара: $deg(b) > deg(g)$, иначе

женская

Двудольный граф

мальчики, степени $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$; у девочек $\delta_1 \geq \delta_2 \geq \dots \geq \delta_n$

хотим: $|(i, j): |d_i - \delta_j| \geq k| \leq 2k(n - k)$

Лемма. Для некоторого $s \in \{1, 2, \dots, n - k + 1\}$ имеем

$$d_s \leq \delta_{s+k-1} + k - 1.$$

иначе $d_s \geq \delta_{s+k-1} + k$ и из мальчиков $1, \dots, n - k + 1$ выходит хотя бы $\delta_k + \dots + \delta_n + k(n - k + 1)$ рёбер, но в девочек $k, \dots, n$ ведёт не больше чем $\delta_k + \dots + \delta_n$ рёбер, а в девочек $1, \dots, k - 1$ не больше чем $(k - 1)(n - k + 1)$ рёбер.

Итак, $d_s \leq \delta_{s+k-1} + k - 1$, аналогично $\delta_t \leq d_{t+k-1} + k - 1$

b, g , $|\deg(b) - \deg(g)| \geq k$. **мужская** пара: $\deg(b) > \deg(g)$, иначе

женская

$\exists i_0$: для мужской пары (b, g) имеем $b < i_0$, для женской $b \geq i_0$, аналогично j_0 для девочек

Двудольный граф

мальчики, степени $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$; у девочек $\delta_1 \geq \delta_2 \geq \dots \geq \delta_n$

хотим: $|(i, j): |d_i - \delta_j| \geq k| \leq 2k(n - k)$

Лемма. Для некоторого $s \in \{1, 2, \dots, n - k + 1\}$ имеем

$$d_s \leq \delta_{s+k-1} + k - 1.$$

иначе $d_s \geq \delta_{s+k-1} + k$ и из мальчиков $1, \dots, n - k + 1$ выходит хотя бы $\delta_k + \dots + \delta_n + k(n - k + 1)$ рёбер, но в девочек $k, \dots, n$ ведёт не больше чем $\delta_k + \dots + \delta_n$ рёбер, а в девочек $1, \dots, k - 1$ не больше чем $(k - 1)(n - k + 1)$ рёбер.

Итак, $d_s \leq \delta_{s+k-1} + k - 1$, аналогично $\delta_t \leq d_{t+k-1} + k - 1$

b, g , $|\deg(b) - \deg(g)| \geq k$. **мужская** пара: $\deg(b) > \deg(g)$, иначе

женская

$\exists i_0$: для мужской пары (b, g) имеем $b < i_0$, для женской $b \geq i_0$,

аналогично j_0 для девочек

для мужской пары (b, g) : $b < s$ или $g > s + k - 1$,

Двудольный граф

мальчики, степени $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$; у девочек $\delta_1 \geq \delta_2 \geq \dots \geq \delta_n$

хотим: $|(i, j): |d_i - \delta_j| \geq k| \leq 2k(n - k)$

Лемма. Для некоторого $s \in \{1, 2, \dots, n - k + 1\}$ имеем

$$d_s \leq \delta_{s+k-1} + k - 1.$$

иначе $d_s \geq \delta_{s+k-1} + k$ и из мальчиков $1, \dots, n - k + 1$ выходит хотя бы $\delta_k + \dots + \delta_n + k(n - k + 1)$ рёбер, но в девочек $k, \dots, n$ ведёт не больше чем $\delta_k + \dots + \delta_n$ рёбер, а в девочек $1, \dots, k - 1$ не больше чем $(k - 1)(n - k + 1)$ рёбер.

Итак, $d_s \leq \delta_{s+k-1} + k - 1$, аналогично $\delta_t \leq d_{t+k-1} + k - 1$

b, g , $|\deg(b) - \deg(g)| \geq k$. **мужская** пара: $\deg(b) > \deg(g)$, иначе **женская**

$\exists i_0$: для мужской пары (b, g) имеем $b < i_0$, для женской $b \geq i_0$, аналогично j_0 для девочек

для мужской пары (b, g) : $b < s$ или $g > s + k - 1$, для женской $g < t$ или $b > t + k - 1$

Двудольный граф

мальчики, степени $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$; у девочек $\delta_1 \geq \delta_2 \geq \dots \geq \delta_n$

хотим: $|(i, j): |d_i - \delta_j| \geq k| \leq 2k(n - k)$

Лемма. Для некоторого $s \in \{1, 2, \dots, n - k + 1\}$ имеем

$$d_s \leq \delta_{s+k-1} + k - 1.$$

иначе $d_s \geq \delta_{s+k-1} + k$ и из мальчиков $1, \dots, n - k + 1$ выходит хотя бы $\delta_k + \dots + \delta_n + k(n - k + 1)$ рёбер, но в девочек $k, \dots, n$ ведёт не больше чем $\delta_k + \dots + \delta_n$ рёбер, а в девочек $1, \dots, k - 1$ не больше чем $(k - 1)(n - k + 1)$ рёбер.

Итак, $d_s \leq \delta_{s+k-1} + k - 1$, аналогично $\delta_t \leq d_{t+k-1} + k - 1$

b, g , $|\deg(b) - \deg(g)| \geq k$. **мужская** пара: $\deg(b) > \deg(g)$, иначе **женская**

$\exists i_0$: для мужской пары (b, g) имеем $b < i_0$, для женской $b \geq i_0$, аналогично j_0 для девочек

для мужской пары (b, g) : $b < s$ или $g > s + k - 1$, для женской $g < t$ или $b > t + k - 1$

этих условий хватает для нужной оценки

Редукция к двудольному графу

Редукция к двудольному графу

выбираем $2n$ исходов $v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_n$ независимо

Редукция к двудольному графу

выбираем $2n$ исходов $v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_n$ независимо
дружим мальчика i с девочкой j с вероятностью
 $\text{Prob}(A|X = X(v_i), Y = Y(u_j))$

Редукция к двудольному графу

выбираем $2n$ исходов $v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_n$ независимо

дружим мальчика i с девочкой j с вероятностью

$$\text{Prob}(A|X = X(v_i), Y = Y(u_j))$$

Сколько подруг у мальчика i ? Примерно

$$\begin{aligned} \sum_j \text{Prob}(A|X = X(v_i), Y = Y(u_j)) &= \frac{\sum_j \text{Prob}(A, X = X(v_i)|Y = Y(u_j))}{\text{Prob}(X = X(v_i))} \\ &\sim n \frac{\text{Prob}(A, X = X(v_i))}{\text{Prob}(X = X(v_i))} = n \text{Prob}(A|X = X(v_i)) = nX(v_i) \end{aligned}$$