

# Оптимальные разбиения поверхности тора на части меньшего диаметра

Александр Толмачев, Дмитрий Протасов

Физтех-школа прикладной математики и информатики  
Московский физико-технический институт

II Конференция математических центров России

Москва, МГУ им. Ломоносова  
11 ноября 2022 г.

# Содержание

- Введение и определения
- Результаты для плоских множеств
- Верхние оценки для разбиений тора
- Алгоритм поиска оптимальных разбиений
- Нижние оценки разбиений тора
- Точная оценка для  $n = 3$
- Результаты

# Разбиения множеств на плоскости

## Определение 1

Пусть  $F$  — произвольное ограниченное множество на плоскости,  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда

$$d_n(F) = \inf\{x \in \mathbb{R}^+ : \exists F_1, \dots, F_n : F \subseteq F_1 \cup \dots \cup F_n, \forall i \operatorname{diam}(F_i) \leq x\}.$$

## Определение 2

Пусть

$$d_n = \sup_{\Omega \subset \mathbb{R}^2} d_n(\Omega) = \sup_{\Omega \subset \mathbb{R}^2} \inf \max_{1 \leq i \leq n} \operatorname{diam} \Omega_i, \quad \operatorname{diam} \Omega = 1.$$

Заметим, что  $d_1 = d_2 = 1$  и  $d_n \geq d_{n+1}$ , т.к. одно из множеств разбиения может быть пустым, а также мы можем рассматривать покрытия замкнутыми выпуклыми множествами постоянной ширины 1.

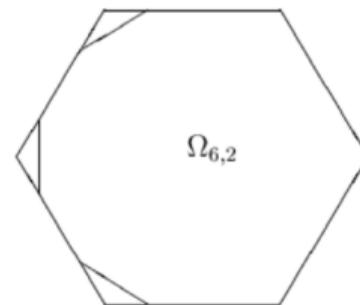
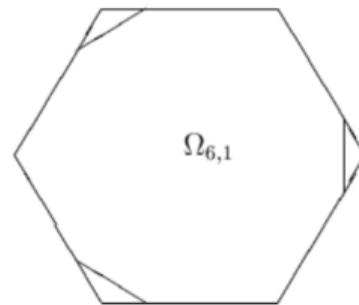
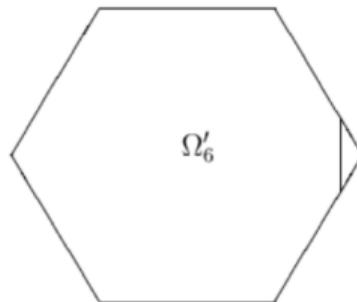
# Универсальные покрышки

## Определение 3

Множество  $U \subset \mathbb{R}^n$  является универсальной покрышкой в  $\mathbb{R}^n$ , если для любого множества  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\text{diam } \Omega = 1$  существует такое движение  $\varphi$ , что  $\varphi_\Omega(\Omega) \subseteq U$ .

## Определение 4

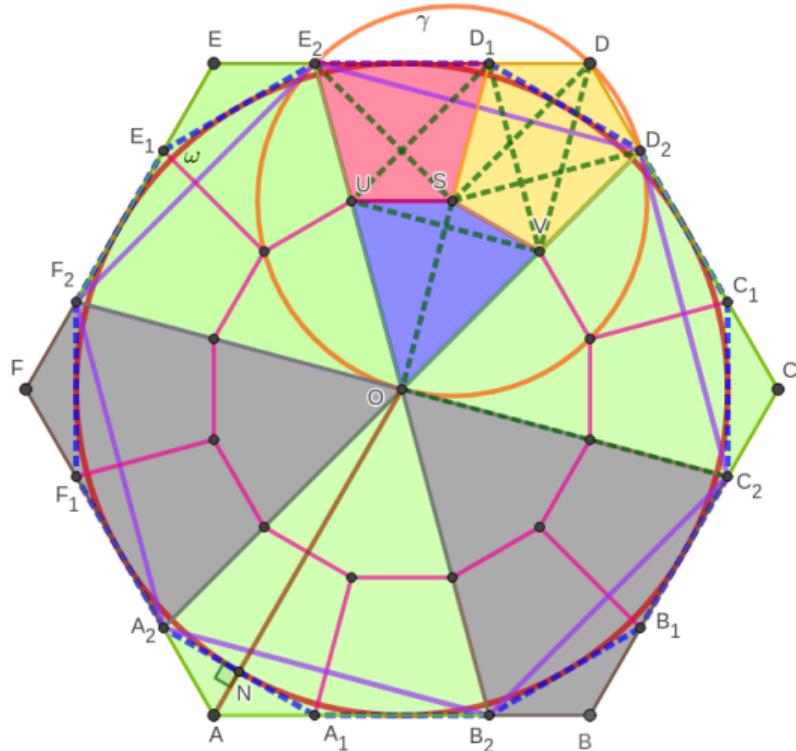
Семейство множеств  $U_1, \dots, U_s$  назовем универсальной покрывающей системой в  $\mathbb{R}^n$ , если для любого множества  $\Omega$ ,  $\text{diam } \Omega = 1$  найдется  $U_i$  и такое движение что  $\varphi_\Omega(\Omega) \subseteq U_i$ .



# Улучшения верхних оценок (пример для $n = 18$ )

Было:  $0.2588 \leq d_{18} \leq 0.3333$

Стало:  $d_{18} \leq \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{3}} \approx 0.2989$



# Предыдущие результаты авторов, улучшения $d_n$ для плоских множеств

$n$	$\underline{d}_n^{old}$	$\underline{d}_n^{new}$	$\bar{d}_n^{new}$	$\bar{d}_n^{old}$	Ком.
1	1.0000	-	-	1.0000	точная
2	1.0000	-	-	1.0000	точная
3	0.8660	-	-	0.8660	точная
4	0.7071	-	-	0.7071	точная
5	0.5877	-	0.5953	0.6020	47%
6	0.5051	-	-	0.5343	-
7	0.5000	-	-	0.5000	точная
8	0.4338	-	-	0.4456	-
9	0.3826	-	-	0.4047	-
10	0.3420	0.3667	0.3905	0.4012	59%
11	0.3333	0.3535	0.3942	0.3970	69%
12	0.3333	0.3420	0.3532	0.3660	65%
13	0.3333	-	0.3419	0.3660	73%
14	0.3090	-	0.3263	0.3324	26%
15	0.2928	-	0.3130	0.3324	49%

# Предыдущие результаты авторов, улучшения $d_n$ для плоских множеств

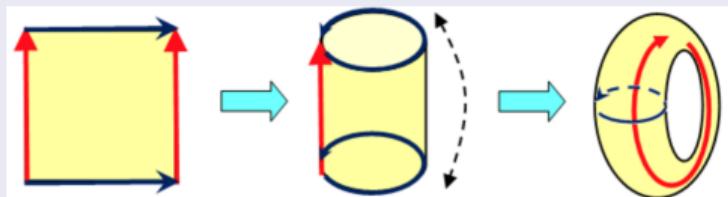
$n$	$\underline{d}_n^{old}$	$\underline{d}_n^{new}$	$\bar{d}_n^{new}$	$\bar{d}_n^{old}$	Ком.
16	0.2817	-	0.3035	0.3324	57%
17	0.2701	-	0.2967	0.3324	57%
18	0.2588	-	0.2989	0.3324	46%
19	0.2588	-	-	0.3324	-
20	0.2500	-	-	0.2857	-
21	0.2393	-	0.2723	0.2857	29%
22	0.2323	-	0.2650	0.2857	39%
23	0.2225	-	0.2650	0.2857	33%
24	0.2167	-	0.2610	0.2849	35%
25	0.2079	-	0.2610	0.2776	24%
26	0.2030	-	0.2610	0.2709	15%
27	0.2000	-	0.2610	0.2646	5%
28	0.2000	-	0.2500	0.2587	15%
29	0.1950	-	0.2500	0.2531	5%
30	0.1939	-	-	0.2479	-

# Разбиения поверхности двумерного тора

## Поверхность двумерного тора

Представим поверхность двумерного тора как факторпространство  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ .

Неформально говоря, это квадрат со стороной 1, пары противоположных сторон которого “склеены”.



## Актуальность задачи

- Разбиение поверхности тора является естественным обобщением известной задачи по разбиениям плоских множеств
- Изучение структуры близких к оптимальным разбиений поверхности тора позволит заметить новые закономерности и улучшить оценки для разбиения множеств пространства большей размерности
- Отдельно отметим, что такая задача рассматривается **впервые в данной работе**

# Верхние оценки для тора ( $n \geq 2$ )

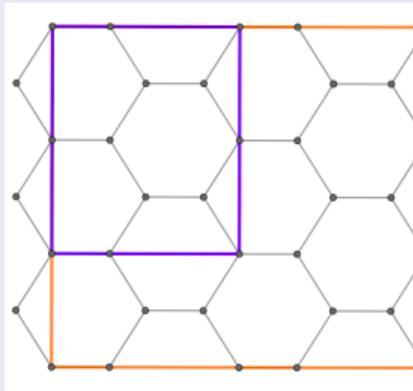
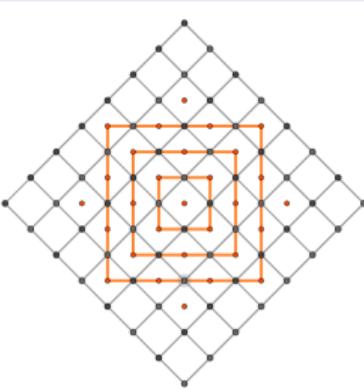
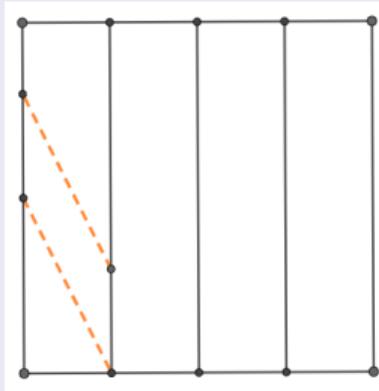
Верхние оценки на основе простых “сеток”

$$d_n(T) \leq \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{n^2}}$$

$$d_{2n^2}(T) \leq \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

$$d_{2n^2-2n}(T) \leq \frac{n^2 + (n-1)^2}{2n^2(n-1)} < \frac{1}{n-1}$$

“Сетки”, на которых основаны верхние оценки



# Наилучшие верхние оценки при $1 \leq n \leq 7$

Наилучшими верхними оценками среди рассмотренных нами “сеток” при  $n \leq 7$  получаются оценки вида  $d_n(T) \leq \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{n^2}}$ , полученные при разбиении на “полоски”:

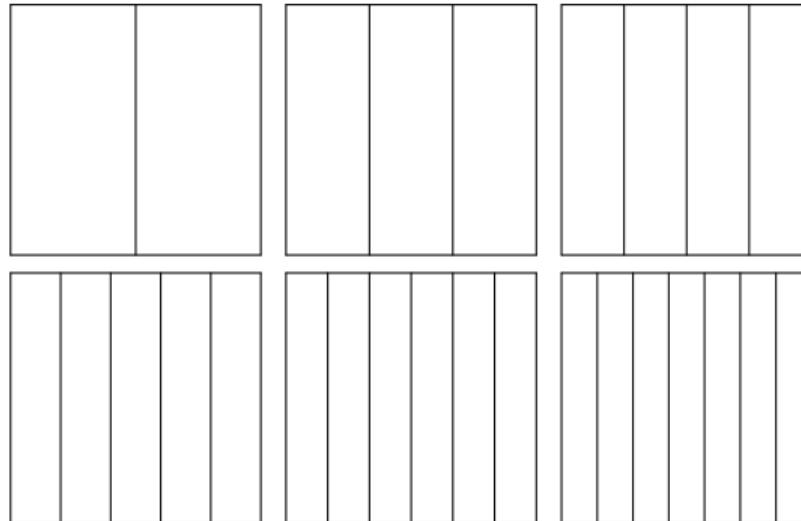


Рис.: Разбиения тора на 2, 3, 4, 5, 6, 7 частей

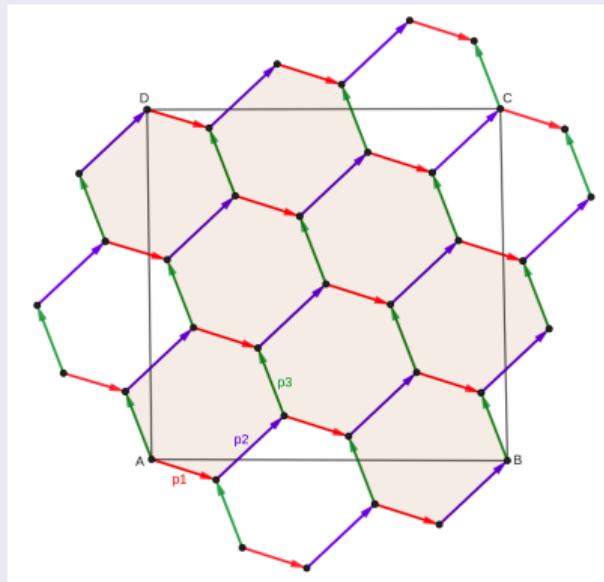
# Верхние оценки для шестиугольных сеток. Пример для $n = 8$

Рассмотрим векторы  $\vec{p_1} = (x_1, y_1)$ ,  $\vec{p_2} = (x_2, y_2)$ ,  $\vec{p_3} = (x_3, y_3)$ , соответствующие сторонам шестиугольника. Тогда, количество частей разбиения и вид сетки будут определять связи между коэффициентами:

$$\begin{cases} 3 \cdot \vec{p_1} + 2 \cdot \vec{p_2} + (-1) \cdot \vec{p_3} = (1, 0) \\ (-1) \cdot \vec{p_1} + 2 \cdot \vec{p_2} + 3 \cdot \vec{p_3} = (0, 1) \end{cases}$$

Обозначим квадрат длины максимальной диагонали шестиугольника за  $d^2(x_1, y_1)$ .  
Тогда будем решать задачу

$$d^2(x_1, y_1) \rightarrow \min_{x_1, y_1}$$



# Верхние оценки для шестиугольных сеток. Пример для $n = 8$

## Оптимационная задача для $n = 8$

В данном случае оптимационная задача выглядит так:

$$d^2(x_1, y_1) = x_1^2 + y_1^2 + \max \left( \left| \frac{1}{4}x_1 + \frac{3}{4}y_1 \right| + \frac{10}{64}, \frac{-5}{4}x_1 + \frac{1}{4}y_1 + \frac{26}{64} \right) \rightarrow \min_{x_1, y_1}$$

Аналитически находим минимум функции:

$$\min_{x_1, y_1} d^2(x_1, y_1) = \frac{25}{128}$$

Минимум достигается в точках  $x_1 = \frac{3}{16}, y_1 = \frac{-1}{16}$ . Тогда диаметр каждой из восьми частей разбиения равен  $\rho = \sqrt{\frac{25}{128}} = \frac{5}{8\sqrt{2}}$  и получаем оценку  $d_8(T) \leq \frac{5}{8\sqrt{2}} \approx 0.441941\dots$

# Разбиение множеств на торе. Верхние оценки

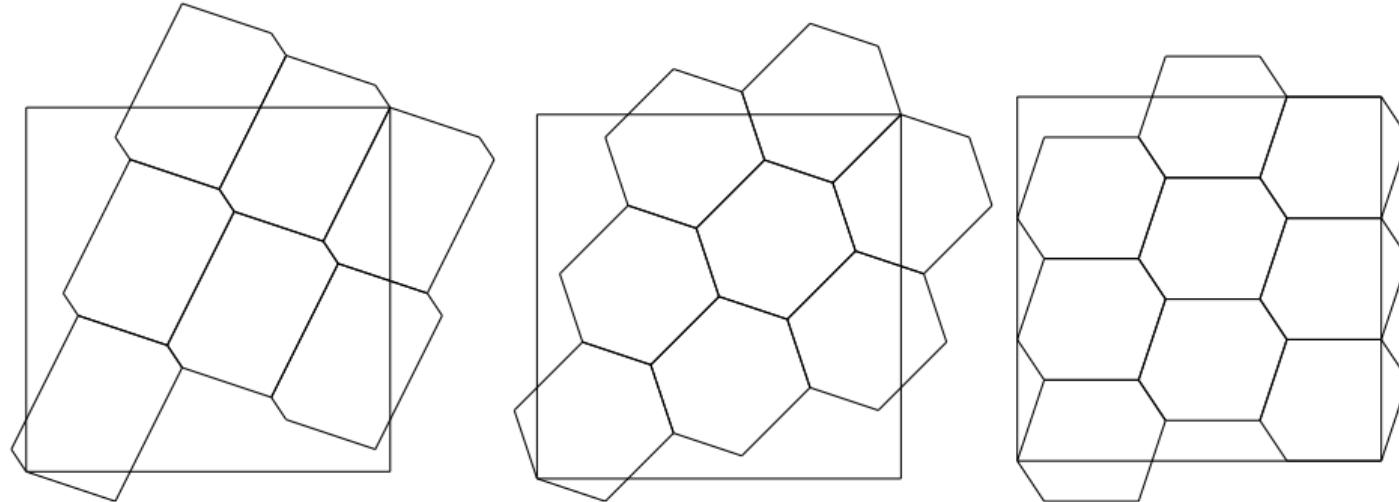


Рис.: Разбиение тора на 7, 8, 9 частей

# Разбиение множеств на торе. Верхние оценки

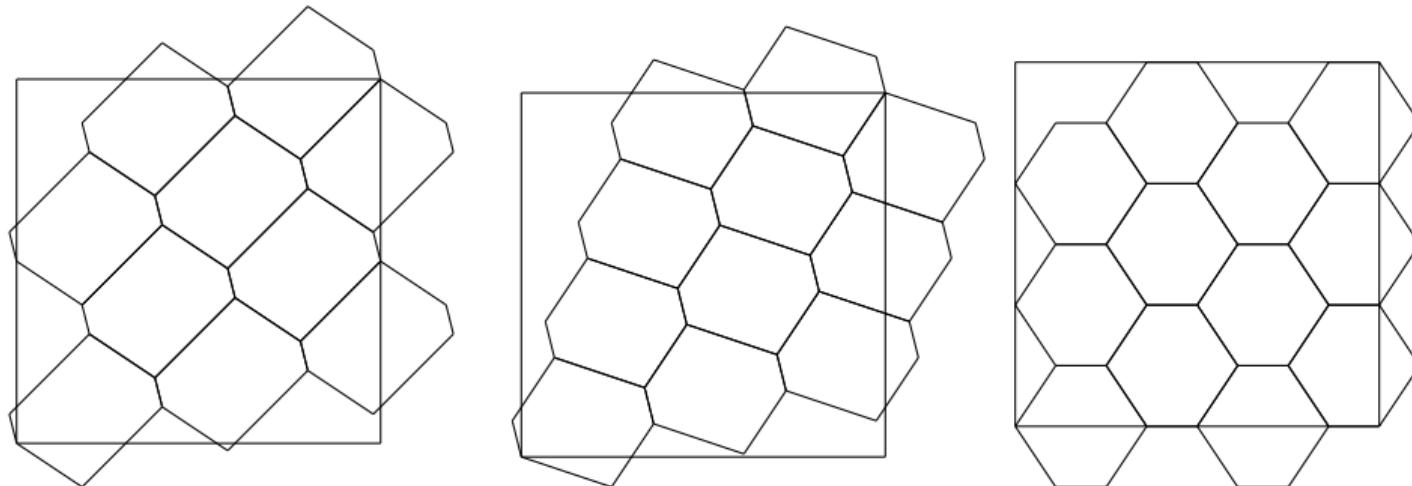


Рис.: Разбиение тора на 10, 11, 12 частей

# Разбиение множеств на торе. Верхние оценки

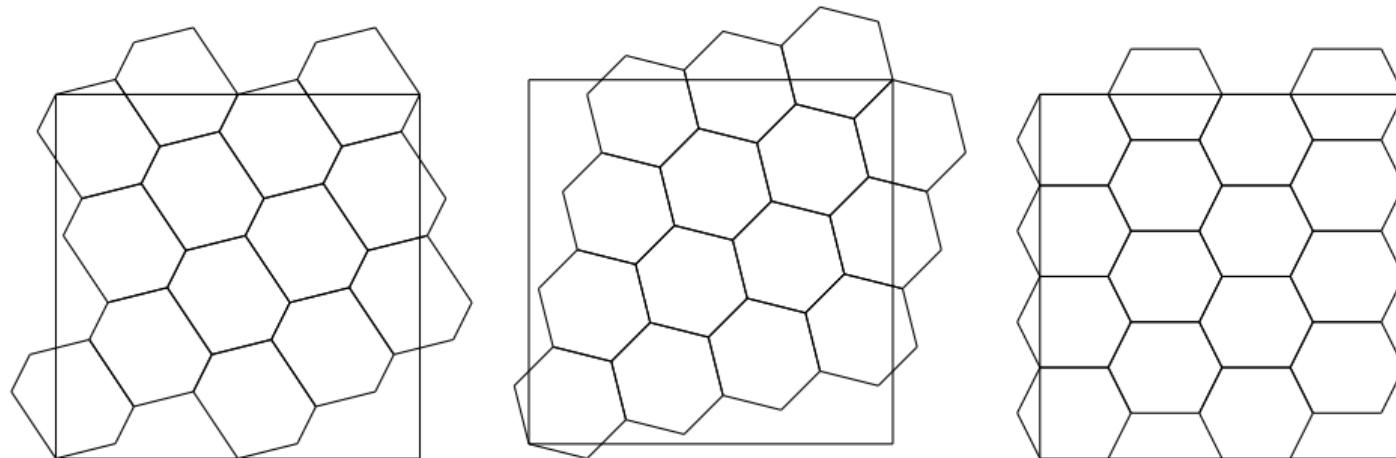


Рис.: Разбиение тора на 14, 15, 16 частей

## Минимизация максимального диаметра

Пусть  $\Omega = \bigcup \Omega_k \subset \mathbb{R}^2$  — некоторое покрытие выпуклого многоугольника  $\Omega$  выпуклыми многоугольниками  $\Omega_k$ ; кривые  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_s$  — стороны  $\Omega$ ;

$X = \{x_j\}$  — вершины разбиения;  $x_j, j \in I_k$  — вершины  $\Omega_k$ .

Пусть  $E = \{(p, q) \mid x_p \in \Gamma_q\}$  определяет принадлежность вершин разбиения сторонам  $\Omega$ .  
Тогда

$$F(X) = \max_k \max_{i, j \in I_k} \|x_i - x_j\| \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$x_p \in \Gamma_q \quad \forall (p, q) \in E,$$

— задача условной оптимизации с кусочно-гладкой целевой функцией и линейными ограничениями.

## Эвристика

Комбинаторный тип субоптимального разбиения может быть получен как диаграмма Вороного для некоторого множества точек  $Y = \{y_j\}$ , полученного при решении вспомогательной оптимизационной задачи.

## Вспомогательная задача: упаковки шаров

$$\Phi(Y) = \min \left\{ \min_{i,j} \gamma_i(y_j), \frac{1}{2} \min_{i < j} \|y_i - y_j\| \right\} \rightarrow \max \quad (2)$$

- ❶ Множество  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  является пересечением полуплоскостей  $\gamma_i(x) \leq 0$ . Выполняется поиск разбиений  $\Omega$  на  $n$  частей с минимизацией максимального диаметра.
- ❷ Случайным образом инициализируется множество точек  $Y_0$ ,  $|Y_0| = n$ .
- ❸ Вычисляется локальный минимум  $Y_1$  в задаче (2) (упаковки шаров).
- ❹ Вершины разбиения  $\Omega$  инициализируются диаграммой Вороного  $\text{Vor}(\Omega; Y_1)$ .
- ❺ Вычисляется локальный минимум  $X_1$  в задаче (1) (оптимизация диаграммы).
- ❻ Если максимальный диаметр найденного разбиения меньше рекордного, то  $X^* := X_1$ .

# Основной алгоритм

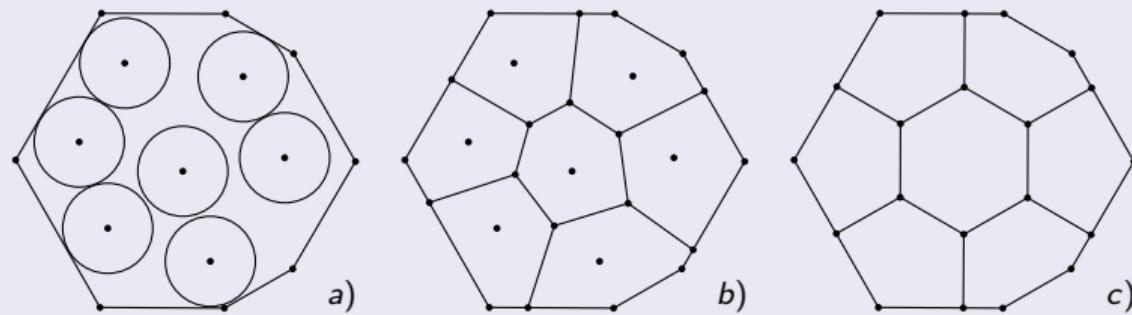
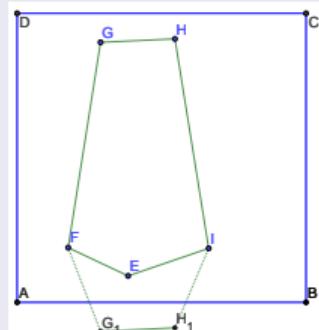
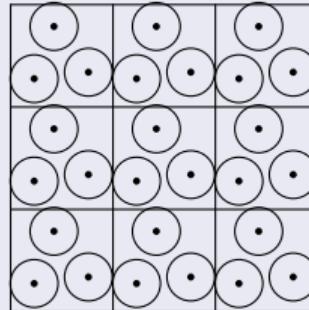
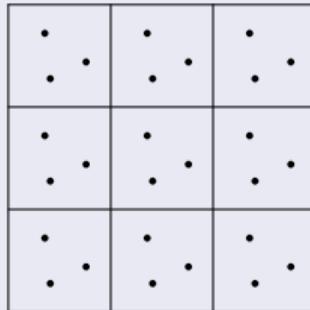


Рис.: Грубое приближение в задаче плотной упаковки кругов (а), диаграмма Вороного (б) и окончательное разбиение (с)

# Адаптация алгоритма для тора

- ① Множество  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  является квадратом  $3 \times 3$
- ② Каждая точка присутствует в 9 экземплярах в каждом квадратике.
- ③ При обновлении текущего оптимума  $X^* := X_1$  дополнительно проверяем что данное разбиение "корректно".



# Разбиение множеств на торе. Верхние оценки

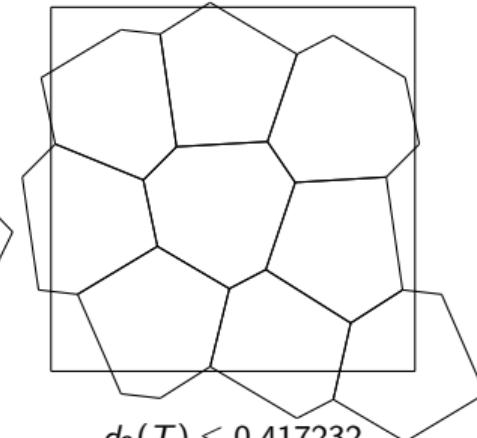
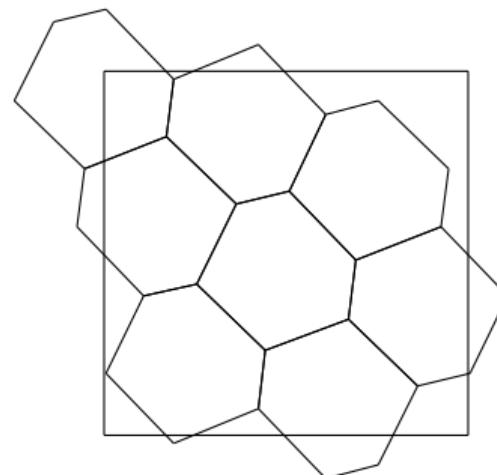
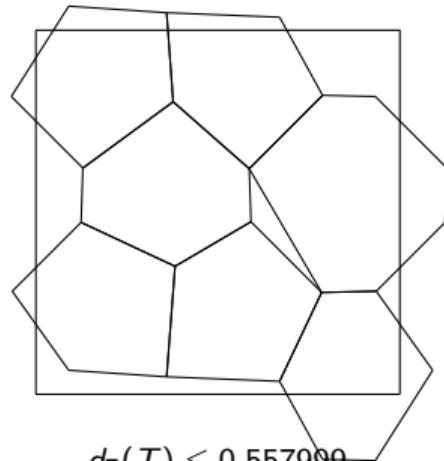


Рис.: Разбиение тора на 7, 8, 9 частей

# Разбиение множеств на торе. Верхние оценки

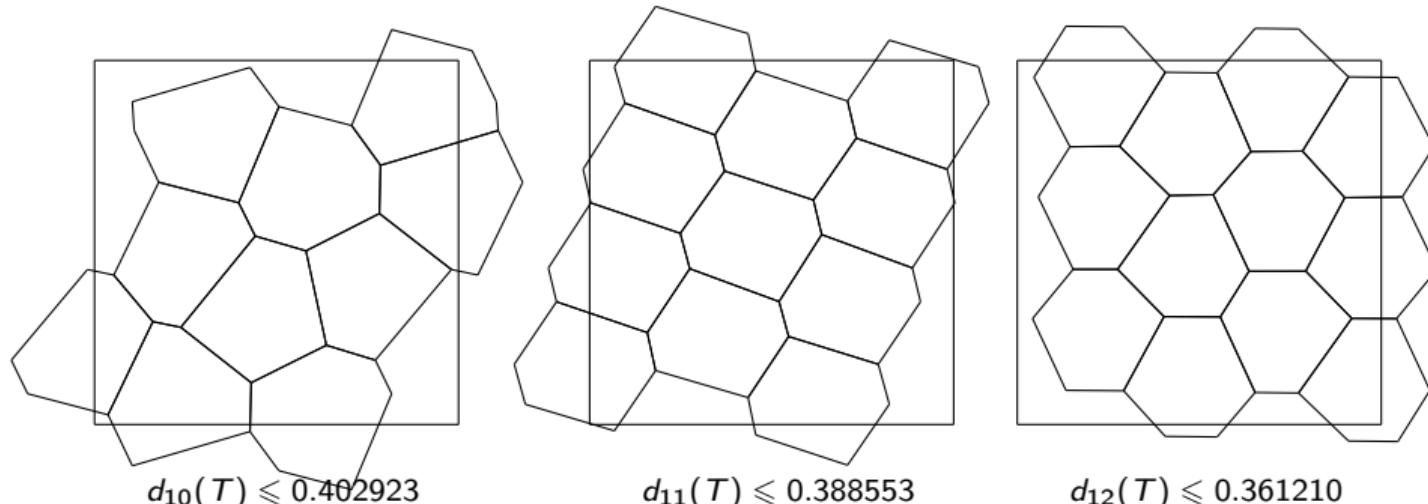
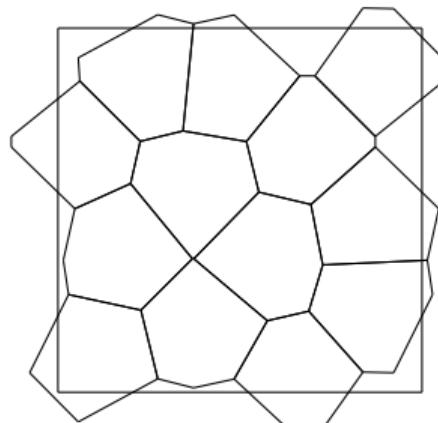
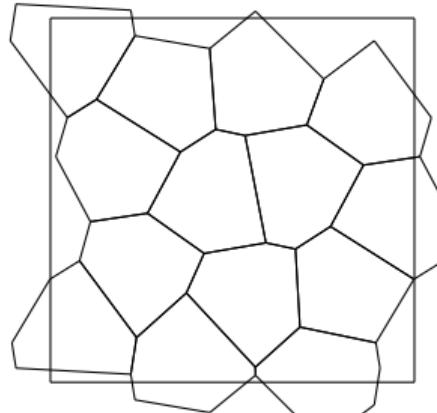


Рис.: Разбиение тора на 10, 11, 12 частей

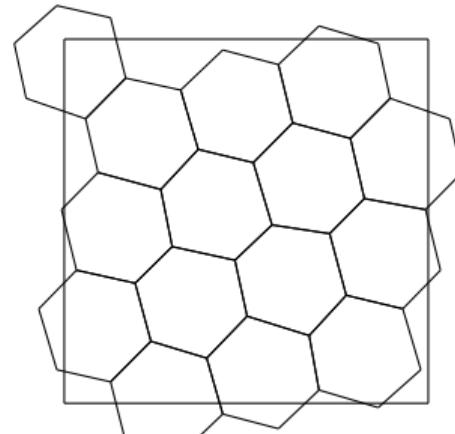
# Разбиение множеств на торе. Верхние оценки



$$d_{13}(T) \leq 0.354547$$



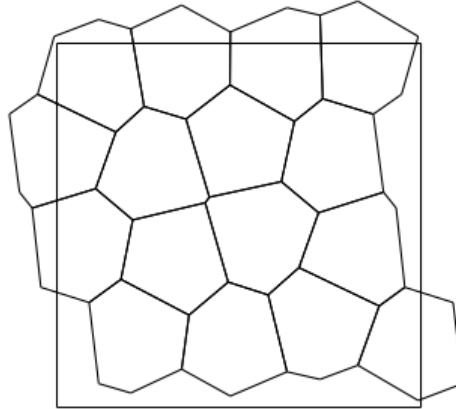
$$d_{14}(T) \leq 0.342738$$



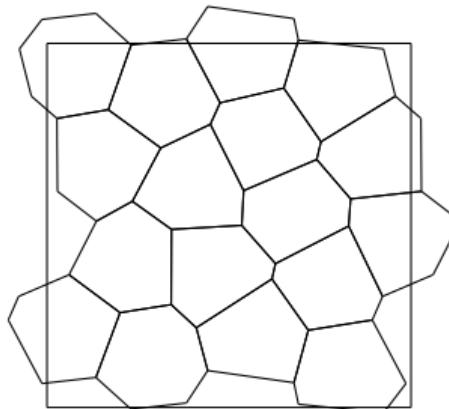
$$d_{15}(T) \leq 0.320656$$

Рис.: Разбиение тора на 13, 14, 15 частей

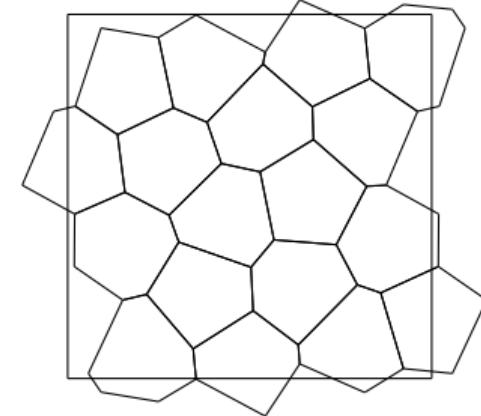
# Разбиение множеств на торе. Верхние оценки



$$d_{16}(T) \leq 0.313256$$



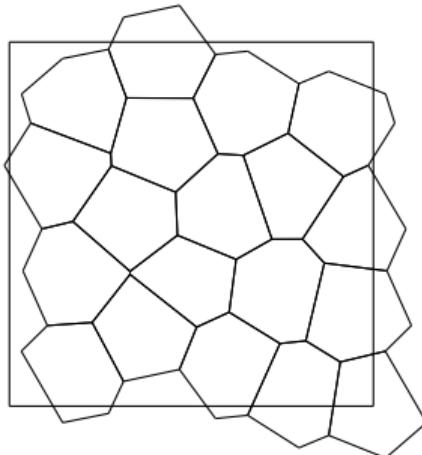
$$d_{17}(T) \leq 0.307750$$



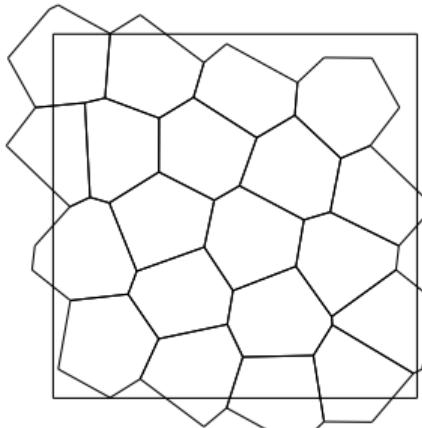
$$d_{18}(T) \leq 0.296217$$

Рис.: Разбиение тора на 16, 17, 18 частей

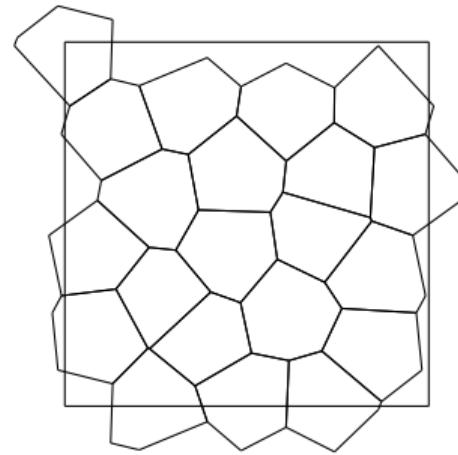
# Разбиение множеств на торе. Верхние оценки



$$d_{19}(T) \leqslant 0.294339$$



$$d_{20}(T) \leqslant 0.288472$$



$$d_{21}(T) \leqslant 0.280116$$

Рис.: Разбиение тора на 19, 20, 21 частей

# Нижние оценки. Базовые соображения

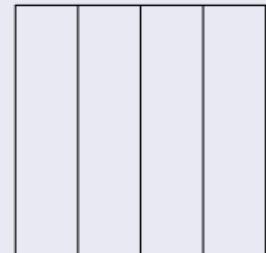
Нижние оценки: пусть  $n \geq 2$

$$d_n(T) \geq \frac{2}{\sqrt{\pi n}} \quad (3)$$

$$d_{n^2+n-1}(T) \geq \frac{1}{n} \quad (4)$$

## Пояснение к оценкам

- (3) Оценим суммарную площадь покрытия  $1 \leq nS_x \leq n \cdot \pi \cdot \frac{x^2}{4}$ .  
Отсюда оценка на диаметр  $x \geq \frac{2}{\sqrt{\pi n}}$
- (4) Каждую из  $n$  полос должно покрывать хотя бы  $n+1$  множество. В частности, при  $n=2$  получаем оценку  $d_5 \geq \frac{1}{2}$



# Нижняя оценка Ленца

## Лемма

Величина  $d_n(T)$  не изменится, если дополнительно потребовать от покрытий в супремуме не только выпуклость и замкнутость, но и пересечение только по граничным точкам

## Теорема

Пусть верна лемма. Тогда для тора  $T$  и любого целого  $n \geq 6$  верно

$$d_n(T) \geq \frac{1}{\sqrt{(f_5 + f_7)[\frac{n}{2}] + f_6(n - [\frac{n}{2}])}}$$

где  $f_h$  – площадь максимального  $h$ -угольника единичного диаметра (некоторые константы). Известно, что

$$f_5 = 0.65716\dots, f_6 = 0.67489\dots, f_7 = 0.71974\dots$$

- Среди всех разбиений тора рассматриваем только разбиения на выпуклые многоугольники. Их вид – планарный граф.
- Формула (неравенство) Эйлера на торе  $0 \leq V - E + F \leq 2, F = n$ .
- Пусть многоугольники разбиения имеют  $h_1, \dots, h_n$  сторон. Тогда,  $\sum_{i=1}^n h_i = 2E = 3V$
- Отсюда получаем неравенство  $\sum_{i=1}^n h_i \leq 6n$

- Среди всех разбиений тора рассматриваем только разбиения на выпуклые многоугольники. Их вид – планарный граф.
- Формула (неравенство) Эйлера на торе  $0 \leq V - E + F \leq 2, F = n$ .
- Пусть многоугольники разбиения имеют  $h_1, \dots, h_n$  сторон. Тогда,  $\sum_{i=1}^n h_i = 2E = 3V$
- Отсюда получаем неравенство  $\sum_{i=1}^n h_i \leq 6n$
- Далее нужно оценить как можно точнее сверху максимальную суммарную площадь

$$g_n(L) = \sup\{f_{h_1} + f_{h_2} + \dots + f_{h_n} \mid h_1 + h_2 + \dots + h_n \leq L\}$$

- Пусть все части покрытия имеют диаметр не превосходящий  $x$ .
- Произвольное покрытие имеет суммарную площадь  $1 \leq x^2 g_n(\sum_{i=1}^n h_i) \leq x^2 g_n(6n)$

- Далее нужно оценить как можно точнее сверху максимальную суммарную площадь

$$g_n(L) = \sup\{f_{h_1} + f_{h_2} + \dots + f_{h_n} \mid h_1 + h_2 + \dots + h_n \leq L\}$$

- Пусть все части покрытия имеют диаметр не превосходящий  $x$ .
- Произвольное покрытие имеет суммарную площадь  $1 \leq x^2 g_n(\sum_{i=1}^n h_i) \leq x^2 g_n(6n)$
- Отсюда  $x \geq \frac{1}{\sqrt{g_n(6n)}}$ .

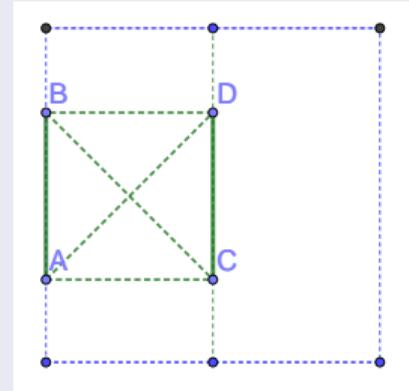
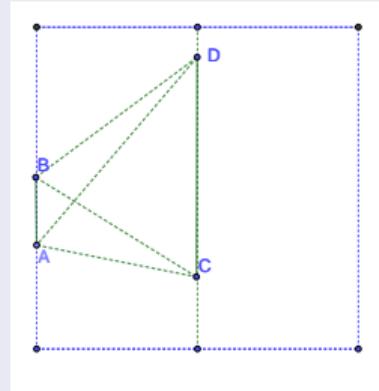
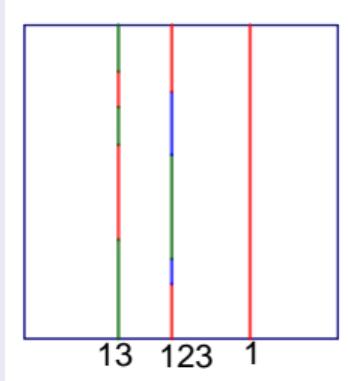
- Далее нужно оценить как можно точнее сверху максимальную суммарную площадь

$$g_n(L) = \sup\{f_{h_1} + f_{h_2} + \dots + f_{h_n} \mid h_1 + h_2 + \dots + h_n \leq L\}$$

- Пусть все части покрытия имеют диаметр не превосходящий  $x$ .
- Произвольное покрытие имеет суммарную площадь  $1 \leq x^2 g_n(\sum_{i=1}^n h_i) \leq x^2 g_n(6n)$
- Отсюда  $x \geq \frac{1}{\sqrt{g_n(6n)}}$ .
- Утверждается, что  $g_n(6n) = (f_5 + f_7)[\frac{n}{2}] + f_6(n - [\frac{n}{2}])$
- Оптимальный набор – чередование пятиугольников и семиугольников. Добавление шестиугольника в случае нечетного  $n$ .
- Данный метод позволяет получить наилучшие нижние оценки для тора начиная с  $n \geq 6$ .

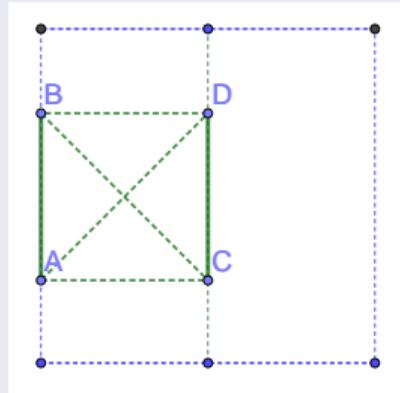
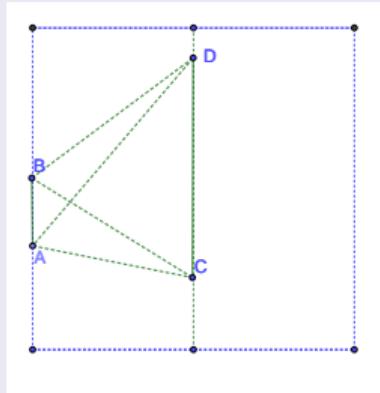
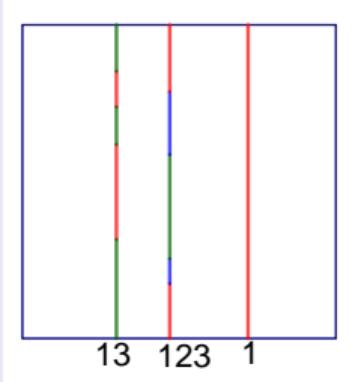
# Точная оценка $n = 3$ . Идеи доказательства

- ➊ Утверждается, что разбиение на три полоски оптимально. То есть  $d_3(T) = \rho_3 = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{9}} = 0.6009\dots$
- ➋ Рассматриваем разбиения на три множества как раскраску.
- ➌ Зафиксируем вертикальную (или горизонтальную) прямую  $x$ . Пусть  $C = \{color(x, y) | y \in [0, 1]\}$ . Будем называть прямую  $x$   $C$ -прямой.



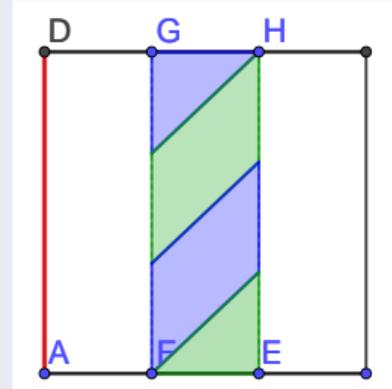
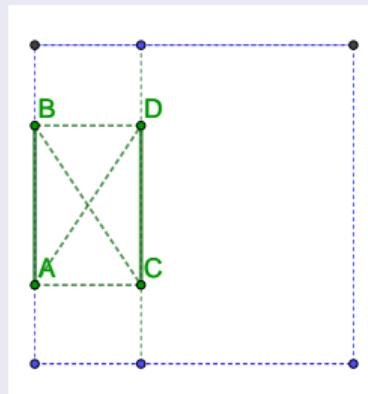
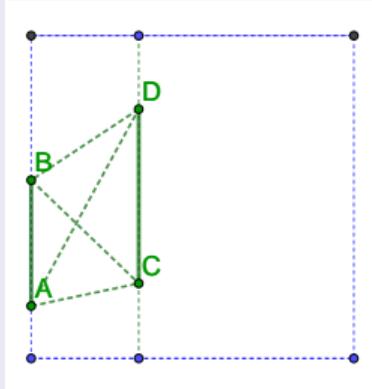
## Точная оценка $n = 3$ . Идеи доказательства

- ① Пусть две трехцветные прямые находятся на расстоянии  $\rho \geqslant \frac{1}{2}$ . Тогда  $d_3(T) \geqslant \rho_3$ .
- ② Пусть две  $ab$ -прямые расположены на расстоянии  $\rho \geqslant \frac{1}{3}$ . Тогда  $d_3(T) \geqslant \rho_3$ .
- ③ Одноцветной прямой не существует (горизонтальной и вертикальной).



## Точная оценка $n = 3$ . Идеи доказательства

- ① Пусть две трехцветные прямые находятся на расстоянии  $\rho \geqslant \frac{1}{2}$ . Тогда  $d_3(T) \geqslant \rho_3$ .
- ② Пусть две  $ab$ -прямые расположены на расстоянии  $\rho \geqslant \frac{1}{3}$ . Тогда  $d_3(T) \geqslant \rho_3$ .
- ③ Одноцветной прямой не существует (горизонтальной и вертикальной).

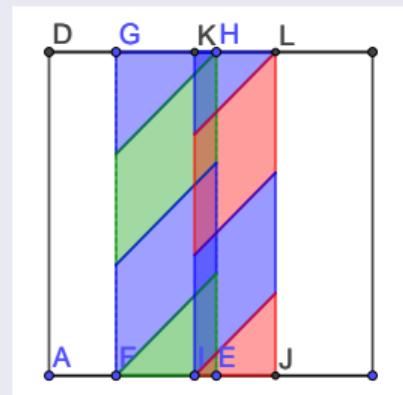
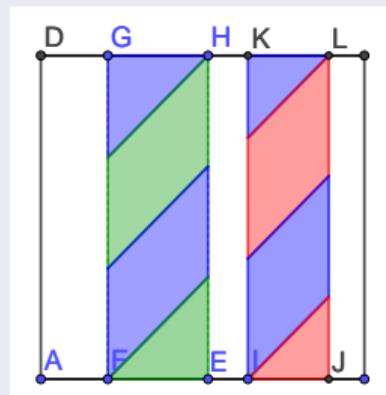
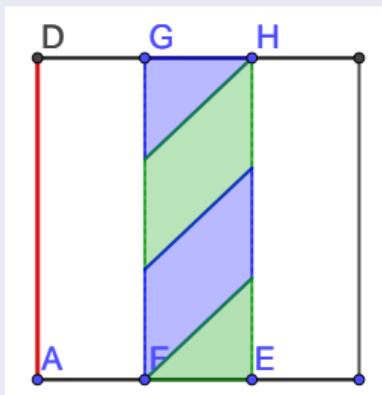


## Точная оценка $n = 3$ . Идеи доказательства

- ➊ Пусть две трехцветные прямые находятся на расстоянии  $\rho \geq \frac{1}{2}$ . Тогда  $d_3(T) \geq \rho_3$ .
- ➋ Пусть две  $ab$ -прямые расположены на расстоянии  $\rho \geq \frac{1}{3}$ . Тогда  $d_3(T) \geq \rho_3$ .
- ➌ Одноцветной прямой не существует (горизонтальной и вертикальной).
- ➍ Все двухцветные прямые заключены в какой-то полосе шириной  $\frac{1}{3}$ .
- ➎ Какой-то цвет присутствует на всей оси. Пусть это будет цвет 2.
- ➏ Осталось три вида прямых (12, 23, 123)
- ➐ Рассмотрим полосы  $A$ ,  $B$  ширины  $\frac{1}{3}$ , в которые заключены все 23 и 12 прямые.
- ➑ Два случая: полосы  $A$  и  $B$  пересекаются или нет.
- ➒ В обоих случаях – находим две трёхцветные прямые на расстоянии 0.5.

# Точная оценка $n = 3$ . Идеи доказательства

- ① Осталось три вида прямых (12, 23, 123)
- ② Рассмотрим полосы  $A$ ,  $B$  ширины  $\frac{1}{3}$ , в которые заключены все 23 и 12 прямые.
- ③ Два случая: полосы  $A$  и  $B$  пересекаются или нет.
- ④ В обоих случаях – находим две трёхцветные прямые на расстоянии 0.5.



# Полученные результаты для разбиений тора: $1 \leq n \leq 15$

$n$	$d_n^{new}(T)$	$\bar{d}_n^{new}(T)$	Зазор	Разбиение
1	0.7071	0.7071	точная	-
2	0.7071	0.7071	точная	полоски
3	0.6009	0.6009	точная	полоски
4	0.5176	0.5590	8.0%	полоски
5	0.5000	0.5385	7.7%	полоски
6	0.4920	0.5270	7.1%	полоски
7	0.4562	0.5200	14.0%	полоски
8	0.4261	0.4419	3.7%	решётка
9	0.4022	0.4172	3.7%	программа
10	0.3811	0.4007	5.7%	программа
11	0.3637	0.3885	6.8%	решётка
12	0.3479	0.3611	3.8%	решётка
13	0.3345	0.3536	5.7%	программа
14	0.3221	0.3392	5.3%	решётка
15	0.2925	0.3206	2.9%	решётка

Полученные результаты для разбиений тора:  $16 \leq n \leq 25$

$n$	$\underline{d}_n^{new}(T)$	$\bar{d}_n^{new}(T)$	Зазор
16	0.3013	0.3125	3.7%
17	0.2925	0.3065	4.8%
18	0.2841	0.2962	4.3%
19	0.2766	0.2943	6.4%
20	0.2695	0.2885	7.0%
21	0.2631	0.2801	6.5%
22	0.2570	0.2756	7.2%
23	0.2514	0.2695	7.2%
24	0.2460	0.2604	5.8%
25	0.2411	0.2556	6.0%

Спасибо за внимание!