Гипотеза Эрдеша о паросочетаниях для случая почти совершенных паросочетаний

Дмитрий Колупаев

Московский физико-технический институт

11 ноября 2022

Постановка задачи

$n, k \geqslant 2$ – натуральные числа.
$[n] = \{1, \ldots, n\}$
$\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k} = \{F \subset [n] : |F| = k\}$

Постановка задачи

$n, k \geqslant 2$ – натуральные числа.
$[n] = \{1, \ldots, n\}$
$\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k} = \{F \subset [n] : |F| = k\}$

Обозначим через $\nu(\mathcal{F})$ максимальное количество попарно непересекающихся элементов $\mathcal{F}$.

Постановка задачи

$n, k \geqslant 2$ – натуральные числа.
$[n] = \{1, \dots, n\}$
$\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k} = \{F \subset [n] : |F| = k\}$

Обозначим через $\nu(\mathcal{F})$ максимальное количество попарно непересекающихся элементов $\mathcal{F}$.

Для натуральных s, k и $n \geqslant (s+1)k$ можно рассмотреть семейства:

$$\mathcal{A} = \binom{[(s+1)k-1]}{k} \tag{1}$$

$$\mathcal{B} = \left\{B \in \binom{[n]}{k} : B \cap [s] \neq \varnothing\right\} \tag{2}$$

Постановка задачи

$n, k \geqslant 2$ – натуральные числа.
$[n] = \{1, \ldots, n\}$
$\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k} = \{F \subset [n] : |F| = k\}$

Обозначим через $\nu(\mathcal{F})$ максимальное количество попарно непересекающихся элементов $\mathcal{F}$.

Для натуральных s, k и $n \geqslant (s+1)k$ можно рассмотреть семейства:

$$\mathcal{A} = \binom{[(s+1)k-1]}{k} \tag{1}$$

$$\mathcal{B} = \left\{B \in \binom{[n]}{k} : B \cap [s] \neq \varnothing\right\} \tag{2}$$

Нетрудно понять, что $\nu(\mathcal{A}) = \nu(\mathcal{B}) = s$.

Гипотеза Эрдеша о паросочетаниях

Гипотеза Эрдеша о паросочетаниях, 1965

Пусть k, s *– натуральные числа,* $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$, $\nu(\mathcal{F}) \leqslant s$. *Тогда*

$$|\mathcal{F}| \leqslant \max\{|\mathcal{A}|, |\mathcal{B}|\} \tag{3}$$

Гипотеза Эрдеша о паросочетаниях

Гипотеза Эрдеша о паросочетаниях, 1965

Пусть k, s *– натуральные числа,* $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$, $\nu(\mathcal{F}) \leqslant s$. *Тогда*

$$|\mathcal{F}| \leqslant \max\{|\mathcal{A}|, |\mathcal{B}|\} \qquad (3)$$

Франкл, Купавский, 2018: $n \geqslant \frac{5}{3}sk - \frac{2}{3}s$ и $s \geqslant s_0$.

Гипотеза Эрдеша о паросочетаниях

Гипотеза Эрдеша о паросочетаниях, 1965

Пусть k, s *– натуральные числа,* $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$, $\nu(\mathcal{F}) \leqslant s$. *Тогда*

$$|\mathcal{F}| \leqslant \max\{|\mathcal{A}|, |\mathcal{B}|\} \tag{3}$$

Франкл, Купавский, 2018: $n \geqslant \frac{5}{3}sk - \frac{2}{3}s$ и $s \geqslant s_0$.
Клейтман, 1968: $n = (s+1)k$.

Гипотеза Эрдеша о паросочетаниях

Гипотеза Эрдеша о паросочетаниях, 1965

Пусть k, s – натуральные числа, $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$, $\nu(\mathcal{F}) \leqslant s$. Тогда

$$|\mathcal{F}| \leqslant \max\{|\mathcal{A}|, |\mathcal{B}|\} \tag{3}$$

Франкл, Купавский, 2018: $n \geqslant \frac{5}{3}sk - \frac{2}{3}s$ и $s \geqslant s_0$.
Клейтман, 1968: $n = (s+1)k$.

При $n \geqslant (s+1)(k+1)$ выполнено $|\mathcal{A}| < |\mathcal{B}|$.

Основные результаты

Теорема 1 (Франкл, 2017)

Пусть $s > k \geqslant 2$ – натуральные числа. Тогда для n, удовлетворяющих $(s+1)k \leqslant n < (s+1)(k + k^{-2k-1}/2)$, для любого семейства $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$, $\nu(\mathcal{F}) \leqslant s$, выполнено $|\mathcal{F}| \leqslant |\mathcal{A}|$.

Основные результаты

Теорема 1 (Франкл, 2017)

Пусть $s > k \geqslant 2$ – натуральные числа. Тогда для n, удовлетворяющих $(s+1)k \leqslant n < (s+1)(k + k^{-2k-1}/2)$, для любого семейства $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$, $\nu(\mathcal{F}) \leqslant s$, выполнено $|\mathcal{F}| \leqslant |\mathcal{A}|$.

Теорема 2

Пусть $s, k \geqslant 12$, $s > 101k^3$. Тогда для n, удовлетворяющих $(s+1)k \leqslant n < (s+1)(k + \frac{1}{100k})$, и для любого семейства $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$, $\nu(\mathcal{F}) \leqslant s$, выполнено $|\mathcal{F}| \leqslant |\mathcal{A}|$.

Сдвинутость, след

$F = \{a_1, \ldots, a_k\}$, $a_1 < \ldots < a_k$; $G = \{b_1, \ldots, b_k\}$, $b_1 < \ldots < b_k$.
$F \prec G$, если $a_i \leqslant b_i$ для $i \in [k]$.
Если для любых F, G из $(G \in \mathcal{F}) \wedge (F \prec G)$ следует $F \in \mathcal{F}$, то говорят, что семейство $\mathcal{F}$ *сдвинутое*.

Сдвинутость, след

$F = \{a_1, \ldots, a_k\}$, $a_1 < \ldots < a_k$; $G = \{b_1, \ldots, b_k\}$, $b_1 < \ldots < b_k$.
$F \prec G$, если $a_i \leqslant b_i$ для $i \in [k]$.
Если для любых F, G из $(G \in \mathcal{F}) \wedge (F \prec G)$ следует $F \in \mathcal{F}$, то говорят, что семейство $\mathcal{F}$ *сдвинутое*.
$\mathcal{F}$ максимальное, $\mathcal{F}$ сдвинутое.

Сдвинутость, след

$F = \{a_1, \ldots, a_k\}$, $a_1 < \ldots < a_k$; $G = \{b_1, \ldots, b_k\}$, $b_1 < \ldots < b_k$.
$F \prec G$, если $a_i \leqslant b_i$ для $i \in [k]$.
Если для любых F, G из $(G \in \mathcal{F}) \wedge (F \prec G)$ следует $F \in \mathcal{F}$, то говорят, что семейство $\mathcal{F}$ *сдвинутое*.
$\mathcal{F}$ максимальное, $\mathcal{F}$ сдвинутое.

$\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{F}) = \{T \cap [(s+1)k - 1] : T \in \mathcal{F}\}$ – *след* $\mathcal{F}$.
$\nu(\mathcal{T}) = s$.

Сдвинутость, след

Утверждение 0 (Франкл, 2017)

- Существует множество $G_0 \subset [(s+1)k-1]$ мощности $k-1$, $G_0 \notin \mathcal{T}$, такое, что для любого множества $B \in \mathcal{F}$, $B \cap G_0 = \varnothing$, выполнено

$$G_0 \cup \{b\} \in \mathcal{F}, \tag{4}$$

где b есть минимальный элемент множества B.

Сдвинутость, след

Утверждение 0 (Франкл, 2017)

- Существует множество $G_0 \subset [(s+1)k-1]$ мощности $k-1$, $G_0 \notin \mathcal{T}$, такое, что для любого множества $B \in \mathcal{F}$, $B \cap G_0 = \varnothing$, выполнено
$$G_0 \cup \{b\} \in \mathcal{F}, \tag{4}$$
где b есть минимальный элемент множества B.
- Существуют попарно непересекающиеся множества $G_1, \ldots, G_s \in \mathcal{T}$ мощности k такие, что $G_i \cap G_0 = \varnothing$ для $i = 1, \ldots, s$.

Ширина и вес

$T \subset [(s+1)k-1],\ T \neq \varnothing.$

Ширина и вес

$T \subset [(s+1)k-1]$, $T \neq \varnothing$.

Шириной множества T назовём $v(T) = |\{i \in [s] : T \cap G_i \neq \varnothing\}|$.
$v(T) \neq 0$ для $T \in \mathcal{T}$.

Ширина и вес

$T \subset [(s+1)k-1]$, $T \neq \varnothing$.

Шириной множества T назовём $v(T) = |\{i \in [s] : T \cap G_i \neq \varnothing\}|$.
$v(T) \neq 0$ для $T \in \mathcal{T}$.

Весом множества T ширины c и мощности d назовём

$$w(T) = w_{c,d} = \frac{\binom{\bar{n}}{k-d}}{\binom{s-c}{k-c}}, \tag{5}$$

где $\bar{n} = n - (s+1)k + 1$.

Ширина и вес

$M = \{m_1, \ldots, m_k\} \subset [s]$.
$G(M) = G_0 \cup B_1 \cup \ldots \cup B_k$, где $B_i = G_{m_i}$, $i \in [k]$.

Ширина и вес

$M = \{m_1, \ldots, m_k\} \subset [s]$.
$G(M) = G_0 \cup B_1 \cup \ldots \cup B_k$, где $B_i = G_{m_i}$, $i \in [k]$.

$\mathcal{T}_M = \mathcal{T}_M(\mathcal{F}) = \{T \in \mathcal{T} : T \subset G(M)\}$.

Ширина и вес

$M = \{m_1, \ldots, m_k\} \subset [s]$.
$G(M) = G_0 \cup B_1 \cup \ldots \cup B_k$, где $B_i = G_{m_i}$, $i \in [k]$.

$\mathcal{T}_M = \mathcal{T}_M(\mathcal{F}) = \{T \in \mathcal{T} : T \subset G(M)\}$.

$$w(M) = w_{\mathcal{F}}(M) = \sum_{T \in \mathcal{T}_M(\mathcal{F})} w(T)$$

Ширина и вес

$M = \{m_1, \ldots, m_k\} \subset [s]$.
$G(M) = G_0 \cup B_1 \cup \ldots \cup B_k$, где $B_i = G_{m_i}$, $i \in [k]$.

$\mathcal{T}_M = \mathcal{T}_M(\mathcal{F}) = \{T \in \mathcal{T} : T \subset G(M)\}$.

$w(M) = w_{\mathcal{F}}(M) = \sum\limits_{T \in \mathcal{T}_M(\mathcal{F})} w(T)$

Несложный двойной подсчёт показывает:

$$|\mathcal{F}| = \sum_{M \in \binom{[s]}{k}} w_{\mathcal{F}}(M) \tag{6}$$

Для доказательства теоремы 2 достаточно для всех M установить

$$w_{\mathcal{F}}(M) \leqslant w_{\mathcal{A}}(M) \tag{7}$$

Оценка суммы весов

Положим $\varepsilon = \frac{1}{100k}$.

Оценка суммы весов

Положим $\varepsilon = \frac{1}{100k}$.
W_g – сумма весов множеств $T \in \mathcal{T}_M$, $|T| < k$, $|T| - v(T) \geqslant g$

Оценка суммы весов

Положим $\varepsilon = \frac{1}{100k}$.
W_g – сумма весов множеств $T \in \mathcal{T}_M$, $|T| < k$, $|T| - v(T) \geqslant g$
$W = W_0$ – сумма весов

Оценка суммы весов

Положим $\varepsilon = \frac{1}{100k}$.
W_g – сумма весов множеств $T \in \mathcal{T}_M$, $|T| < k$, $|T| - v(T) \geqslant g$
$W = W_0$ – сумма весов

Утверждение 1

Для $g = 0, \ldots, k-2$

$$W_g \leqslant \left(1 + \frac{2}{k}\right) \frac{k^{k+2g}}{s^g g!} \varepsilon \tag{8}$$

Оценка суммы весов

Через $\mathcal{R}_d$ обозначим семейство множеств из $\mathcal{T}_M$ мощности d и ширины $d-1$, пересекающих G_0, и через $\mathcal{X}_d$ — не пересекающих G_0. Сумму весов первых обозначим R, вторых — X, а их количества обозначим соответственно $r_d = |\mathcal{R}_d|$ и $x_d = |\mathcal{X}_d|$.

Оценка суммы весов

Через $\mathcal{R}_d$ обозначим семейство множеств из $\mathcal{T}_M$ мощности d и ширины $d-1$, пересекающих G_0, и через $\mathcal{X}_d$ — не пересекающих G_0. Сумму весов первых обозначим R, вторых — X, а их количества обозначим соответственно $r_d = |\mathcal{R}_d|$ и $x_d = |\mathcal{X}_d|$.

Утверждение 2

$$R \leqslant \left(1 + \frac{2}{k}\right) \frac{2\varepsilon}{s} r_{k-1} \tag{9}$$

$$X \leqslant \left(1 + \frac{2}{k}\right) \frac{2\varepsilon}{s} x_{k-1} \tag{10}$$

Полные трансверсали

Назовём множество T *полной трансверсалью*, если $v(T) = |T| = k$.

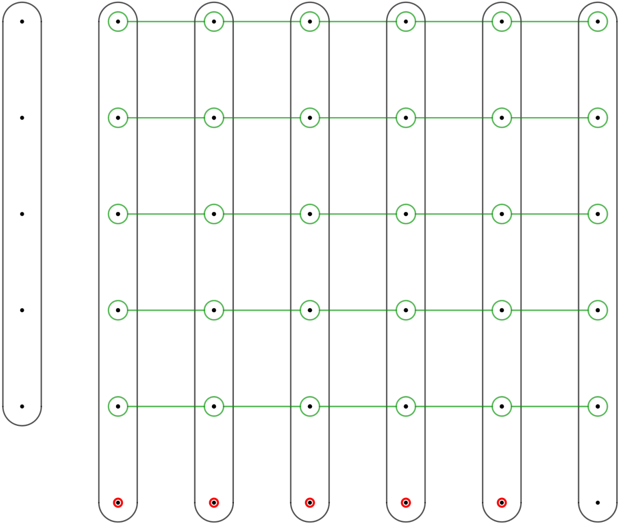
Полные трансверсали

Назовём множество T *полной трансверсалью*, если $v(T) = |T| = k$.

Утверждение 3

В $\mathcal{T}_M$ нет множеств T таких, что $v(T) = |T| < k$.

Полные трансверсали



Полные трансверсали

Следствие 1

$$W = W_1 \leqslant \left(1 + \frac{2}{k}\right) \frac{k^{k+2}\varepsilon}{s} \tag{11}$$

В $\mathcal{T}_M$ отсутствует не более $\left(1 + \frac{2}{k}\right) \frac{k^{k+2}\varepsilon}{s}$ полных трансверсалей.

Полные трансверсали

Следствие 1

$$W = W_1 \leqslant \left(1 + \frac{2}{k}\right) \frac{k^{k+2}\varepsilon}{s} \qquad (11)$$

В $\mathcal{T}_M$ отсутствует не более $\left(1 + \frac{2}{k}\right) \frac{k^{k+2}\varepsilon}{s}$ полных трансверсалей.

Следствие 2

$$W = W_2 + R + X \leqslant \left(1 + \frac{2}{k}\right) \frac{2\varepsilon}{s} (r_{k-1} + x_{k-1}) + \dots \qquad (12)$$

Почти полные трансверсали

Назовём множество T *почти полной трансверсалью*, если $|T| - v(T) = 1$, $|T| = k$. Вес такого множества равен $\frac{1}{s-k+1} > \frac{1}{s}$.

Почти полные трансверсали

Назовём множество T *почти полной трансверсалью*, если $|T| - v(T) = 1$, $|T| = k$. Вес такого множества равен $\frac{1}{s-k+1} > \frac{1}{s}$.

Утверждение 4

$$x_{k-1} \leqslant \left(1 + \frac{3}{k}\right) \varepsilon r_{k-1} \tag{13}$$

Почти полные трансверсали

Назовём множество T *почти полной трансверсалью*, если $|T| - v(T) = 1$, $|T| = k$. Вес такого множества равен $\frac{1}{s-k+1} > \frac{1}{s}$.

Утверждение 4

$$x_{k-1} \leqslant \left(1 + \frac{3}{k}\right) \varepsilon r_{k-1} \tag{13}$$

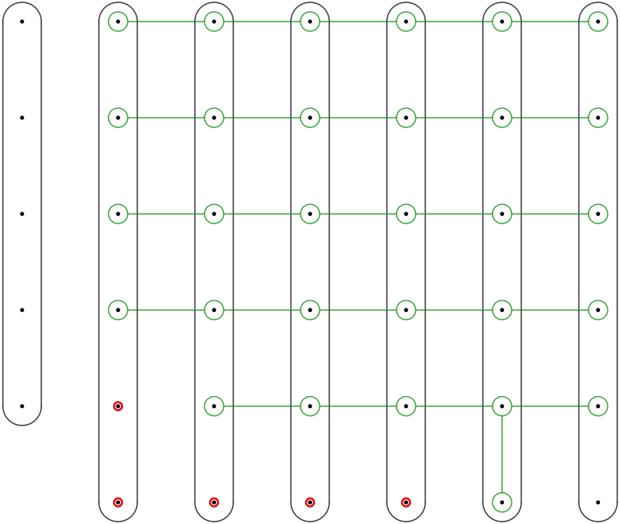
Доказательство.

Каждому $T \in \mathcal{X}_{k-1}$ соответствует $k(k-1)^{k-1}$ почти полных трансверсалей; почти полной трансверсали Q соответствует не больше $\frac{k(k-1)^{k-2}(k-2)}{2}$ множеств из $\mathcal{X}_{k-1}$.

$$2x_{k-1} \leqslant \left(1 + \frac{2}{k}\right) 2\varepsilon \left(x_{k-1} + r_{k-1}\right) + \ldots$$

□

Почти полные трансверсали



Почти полные трансверсали

Следствие

$$W \leqslant \left(1 + \frac{3}{k}\right) \frac{2\varepsilon}{s} r_{k-1} + \dots \tag{14}$$

Следствие

$$W \leqslant \left(1 + \frac{3}{k}\right) \frac{2\varepsilon}{s} r_{k-1} + \dots \tag{14}$$

Утверждение 5

$$r_{k-1} = 0 \tag{15}$$

Почти полные трансверсали

Следствие

$$W \leqslant \left(1 + \frac{3}{k}\right) \frac{2\varepsilon}{s} r_{k-1} + \ldots \qquad (14)$$

Утверждение 5

$$r_{k-1} = 0 \qquad (15)$$

Доказательство.

$a_i = |T \cap B_i|$, $i = 1, \ldots, c$.
$p_0 = 0$, $p_i = a_1 + \ldots + a_i$, $i = 1, \ldots, c$. $p = p_c$, $a_0 = k - p$.

Почти полные трансверсали

Следствие

$$W \leqslant \left(1 + \frac{3}{k}\right) \frac{2\varepsilon}{s} r_{k-1} + \dots \tag{14}$$

Утверждение 5

$$r_{k-1} = 0 \tag{15}$$

Доказательство.

$a_i = |T \cap B_i|$, $i = 1, \dots, c$.
$p_0 = 0$, $p_i = a_1 + \dots + a_i$, $i = 1, \dots, c$. $p = p_c$, $a_0 = k - p$.
$B_i = \{b_i^1, \dots, b_i^k\}$, $G_0 = \{g_1, \dots, g_{k-1}\}$,

$$T = \left(\bigcup_{i=1}^{c} \left\{b_i^{p_{i-1}+1}, \dots, b_i^{p_i}\right\}\right) \cup \{g_{p+1}, \dots, g_{k-1}\}.$$

$\tilde{B}_i = B_i \setminus T$, $i = 1, \dots, c$, $\tilde{B}_i = B_i$, $i = c+1, \dots, k$.

$\mu_i = \min\{j : p_j \geqslant i\}$, $i = 1, \dots, p$.
$Q_{i,\overline{\pi}} = \left\{\pi_1(b_1^i), \dots, \pi_k(b_k^i)\right\} \setminus \left\{\pi_{\mu_i}(b_{\mu_i}^i)\right\} \cup \{\pi_0(g_i)\}$, $i = 1, \dots, p$,
$Q_{i,\overline{\pi}} = \left\{\pi_1(b_1^i), \dots, \pi_k(b_k^i)\right\}$, $i = p+1, \dots, k$.
$Q = Q_{i_0,\overline{\pi}_0}$ содержится в $a_{\mu_{i_0}}(k - a_{\mu_{i_0}})$ наборах $\{Q_{i,\overline{\pi}}\}_{i=1}^k$.

$$(k - a_0)\dots(k - a_c)k^{k-c} > k \cdot \left(1 + \frac{3}{k}\right) 2\varepsilon k^{k+1}.$$

$\square$

Почти полные трансверсали

$\mu_i = \min\{j : p_j \geqslant i\}$, $i = 1, \ldots, p$.
$Q_{i,\overline{\pi}} = \left\{\pi_1(b^i_1), \ldots, \pi_k(b^i_k)\right\} \setminus \left\{\pi_{\mu_i}(b^i_{\mu_i})\right\} \cup \{\pi_0(g_i)\}$, $i = 1, \ldots, p$,
$Q_{i,\overline{\pi}} = \left\{\pi_1(b^i_1), \ldots, \pi_k(b^i_k)\right\}$, $i = p+1, \ldots, k$.
$Q = Q_{i_0,\overline{\pi}_0}$ содержится в $a_{\mu_{i_0}}(k - a_{\mu_{i_0}})$ наборах $\{Q_{i,\overline{\pi}}\}_{i=1}^k$.

$$(k - a_0)\ldots(k - a_c)k^{k-c} > k \cdot \left(1 + \frac{3}{k}\right) 2\varepsilon k^{k+1}.$$

$\square$

Следствие

$$W = W_2 \leqslant \left(1 + \frac{2}{k}\right) \frac{k^4 \varepsilon}{2s^2} \tag{16}$$

Почти полные трансверсали