О сильном хроматическом числе случайного гиперграфа

Д.А. Шабанов
МФТИ, НИУ ВШЭ

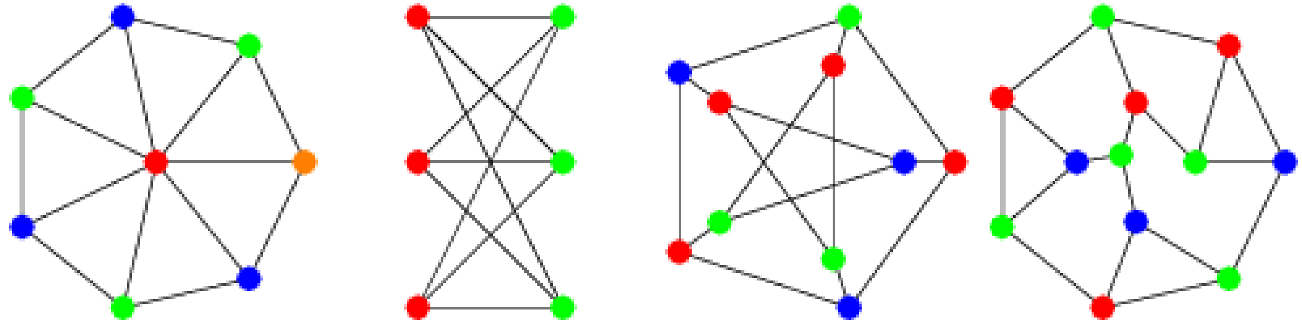
совместная работа с

А.Э. Хузиевой и Т.Г. Матвеевой

Вторая конференция математических центров
МГУ, Москва, 11 ноября 2022

Определения

- **Гиперграфом** $H = (V, E)$ называется **множество вершин** V и семейство его подмножеств $E \subset 2^V$, элементы которого называются **ребрами** гиперграфа.
- Гиперграф $H = (V, E)$ называется k-**однородным,** если каждое его ребро состоит из k вершин.
- Обычный граф – это 2-однородный гиперграф.
- Раскраски графов легко рисовать:



Определения

- **Раскраской** множества вершин гиперграфа $H = (V, E)$ в q цветов – это произвольное отображение $f: V \to \{1, \dots, q\}$.
- Раскраска f называется **сильной** для гиперграфа H, если для каждого ребра $A \in E$ все вершины A раскрашены в разные цвета, т.е.

  $|\{f(v): v \in A\}| = |A|$ для всех $A \in E$.
- Гиперграф называется **сильно** q-**раскрашиваемым,** если для него существует сильная раскраска в q цветов.
- Минимальное число цветов, требуемое для сильной раскраски H называется **сильным хроматическим числом** гиперграфа H и обозначается $\chi_s(H)$.
- Для обычных графов понятие сильного хроматического числа совпадает с обычным хроматическим числом.

Связь с графами

- Для гиперграфа $H = (V, E)$ можно рассмотреть граф смежности $G_H = (V, E_H)$ с тем же множеством вершин и

$$E_H = (\{u, v\}: \exists A \in E \quad \text{такое, что} \quad u, v \in A).$$

- Легко видеть, что каждая сильная раскраска H – это правильная раскраска G_H.

- Стало быть,

$$\chi_s(H) = \chi(G_H).$$

- **Замечание**. Если ребро A имеет мощность 1, то мы считаем, что оно всегда правильно раскрашено в сильном смысле.

Случайные гиперграфы

- Пусть $H(n,k,p)$ – это классическая **биномиальная модель** случайного гиперграфа.
- Напомним, что в этой модели каждое из k-подмножеств n-элементного множества включается в качестве ребра в $H(n,k,p)$ независимо с вероятностью p.
- $H(n,2,p) = G(n,p)$ - это знаменитая модель Эрдеша-Реньи случайного графа.

Задача

Для заданных фиксированных $k, q \geq k$ найти или оценить точную пороговую вероятность для свойства ***сильной q-раскрашиваемости*** в модели $H(n,k,p)$?

Известные результаты

- Мы предполагаем, что k, q фиксированы, а $p = p(n)$ зависит от n.
- Сильное хроматическое число случайного гиперграфа изучается с 1980-х.
- При $pn^k \gg n^2 \ln n$ ситуация тривиальна:

$$\mathbf{P}\big(\chi_s\big(H(n,k,p)\big) = n\big) \to 1.$$

- Кривелевич и Судаков (1998) доказали, что при $pn^k \gg n$, но $pn^k \ll n^2$ выполнено

$$\chi_s\big(H(n,k,p)\big) \sim_{\mathbf{P}} \frac{d}{2\ln d},$$

где $d = (k-1)\binom{n-1}{k-1}p$.

Пороговая вероятность

Функция $\hat{p}_{k,q} = \hat{p}_{k,q}(n)$ называется **точной пороговой вероятностью** для свойства сильной q-раскрашиваемости, если для любого $\varepsilon > 0$,

$$\mathbf{P}\big(\chi_s\big(H(n,k,p)\big) \le q\big) \to \begin{cases} 1, & p < (1-\varepsilon)\hat{p}_{k,q}; \\ 0, & p > (1+\varepsilon)\hat{p}_{k,q}. \end{cases}$$

при $n \to +\infty$.

Утверждение

Для любой пары (k,q) с $q \ge 3$ существует точная пороговая вероятность $\hat{p}_{k,q}(n)$.

Утверждение является простым следствием общего результата Хатами и Моллоя (2008).

Пороговая вероятность

- Каждая точная пороговая вероятность для q -раскрашиваемости соответствует т.н. разреженному случаю, когда
$$p\binom{n}{k} = \Theta(n).$$
- Существует уверенность, что имеет место представление
$$\hat{p}_{k,q}\binom{n}{k} = \hat{c}_{k,q} \cdot n,$$

где $\hat{c}_{k,q}$ не зависит от n. Далее мы будем использовать обозначение $\hat{c}_{k,q}$ вместо $\hat{p}_{k,q}\binom{n}{k}/n$ для формулировки результатов.

Известные результаты

- Аклиоптас, Наор (2005)

$$(q-1)\ln(q-1) < \hat{c}_{2,q} < q\ln q - \frac{1}{2}\ln q\,.$$

- Койя-Оглан (2014), Койя-Оглан, Виленчик (2015)

$$\hat{c}_{2,q} < q\ln q - \frac{1}{2}\ln q - \frac{1}{2} + o(1),$$

$$\hat{c}_{2,q} > q\ln q - \frac{1}{2}\ln q - \ln 2 + o(1).$$

- Суммируя вышеприведенные результаты, можно заключить, что для почти всех значений параметра c хроматическое число случайного графа имеет одноточечное предельное распределение.

Известные результаты

- При $k > 2$ ранее был рассмотрен только случай 3-однородных гиперграфов.

- Балобанов, Шабанов (2018)

$$\hat{c}_{3,q} < \frac{q \ln q}{3} - \frac{5}{18} \ln q + O\left(\frac{\ln q}{q}\right),$$

$$\hat{c}_{3,q} > \frac{q \ln q}{3} - \frac{5}{18} \ln q - \frac{1}{3} + o(1).$$

- Целью работы было получить аналогичные оценки в общем случае.

Новый результат

<u>Теорема</u> (Т. Матвеева, А. Хузиева, Д. Шабанов, 2022)

Если $q \geq q_0(k)$ достаточно велико, то

$$\hat{c}_{k,q} > \frac{q \ln q}{\binom{k}{2}} - \frac{2k-1}{3k(k-1)} \ln q - \frac{1}{\binom{k}{2}} - q^{-\frac{1}{6}},$$

и

$$\hat{c}_{k,q} < \frac{q \ln q}{\binom{k}{2}} - \frac{2k-1}{3k(k-1)} \ln q + O_k\left(\frac{\ln q}{q}\right).$$

При $k = 3$ результат в точности совпадает с ранее известным.

Концентрация значений

Для заданных q, k обозначим

$$u(q,k) = \frac{q \ln q}{\binom{k}{2}} - \frac{2k-1}{3k(k-1)} \ln q \, .$$

Напомним, что $p = cn/\binom{n}{k}$. Тогда

- при $c \in (u(q-1,k)+\varepsilon, u(q,k)-O(1))$ выполнено
$$\mathbf{P}\big(\chi_s\big(H(n,k,p)\big) = q\big) \to 1;$$
- при $c \in (u(q,k)-O(1), u(q,k)+\varepsilon)$ выполнено
$$\mathbf{P}\big(\chi_s\big(H(n,k,p)\big) \in \{q, q+1\}\big) \to 1.$$
- Таким образом, мы получаем концентрацию в одном или двух значениях.

Идеи доказательств

- Доказательство основано на применении метода второго момента. Его анализ приводит к следующей оптимизационной задаче о дважды стохастических матрицах.
- Пусть $\mathcal{M}_q$ - это множество матриц $M = (m_{ij}, i, j = 1, \ldots, q)$ с неотрицательными элементами и следующими свойствами:

$$\sum_{i=1}^{q} m_{ij} = \frac{1}{q}; \qquad \sum_{j=1}^{q} m_{ij} = \frac{1}{q}.$$

- Для $M \in \mathcal{M}_q$ положим

$$\mathcal{H}(M) = -\sum_{i,j=1}^{q} m_{ij} \ln(m_{ij})\,;$$

$$\mathcal{E}(M) = \ln\left(\sum_{\substack{i_1 \neq \cdots \neq i_k \\ j_1 \neq \cdots \neq j_k}} m_{i_1 j_1} \ldots m_{i_k j_k} \right).$$

Идеи доказательств

- Для положительного d обозначим
$$\mathcal{g}_d(M) = \mathcal{H}(M) + d \cdot \mathcal{E}(M).$$
- Пусть J_q обозначает $q \times q$ матрицу со всеми элементами $1/q^2$.

Теорема

Если q достаточно велико и
$$d < \frac{q \ln q}{\binom{k}{2}} - \frac{2k-1}{3k(k-1)} \ln q - \frac{1}{\binom{k}{2}} - q^{-\frac{1}{6}},$$
то существует такое $b = b(q) > 0$, что для любой $M \in \mathcal{M}_q$ выполнено неравенство
$$\mathcal{g}_d(J_q) - \mathcal{g}_d(M) \geq b(q) \sum_{i,j=1}^{q} \left(m_{ij} - \frac{1}{q^2}\right)^2.$$

Идеи доказательств

- Отметим, что оценка в теореме почти оптимальна: для любого $\delta > 0$, если q достаточно велико и
$$d = \frac{q \ln q}{\binom{k}{2}} - \frac{2k-1}{3k(k-1)} \ln q - \frac{1}{\binom{k}{2}} + \delta,$$
то найдется такая матрица $M \in \mathcal{M}_q$, что
$$\mathcal{g}_d(J_q) - \mathcal{g}_d(M) < 0$$
и метод второго момента работать не будет.

- Решение оптимизационной задачи состоит в применении идеологии метода Лапласа из анализа.
- Мы разбиваем строки матрицы на классы в зависимости от значения максимального элемента в строке.

Идеи доказательств

Строка $(m_{ij}, j = 1, \ldots, q)$ называется

- **центральной**, если
$$\max_{j=1,\ldots,q} m_{ij} \le \frac{1}{q} - \frac{2}{q \ln q};$$
- **хорошей**, если
$$\max_{j=1,\ldots,q} m_{ij} \in \left[\frac{1}{q} - \frac{2}{q \ln q}, \frac{1}{q} - q^{-7/4}\right];$$
- **плохой**, если
$$\max_{j=1,\ldots,q} m_{ij} > \frac{1}{q} - q^{-\frac{7}{4}}.$$

Основная трудность состоит, конечно, в наличии плохих строк, которые не позволяют анализировать их по-отдельности.

Идеи доказательств

- Вторая основная трудность состоит в оценке функции

$$\mathcal{E}(M) = \ln\left(\sum_{\substack{i_1 \neq \cdots \neq i_k \\ j_1 \neq \cdots \neq j_k}} m_{i_1 j_1} \ldots m_{i_k j_k}\right).$$

- Если ввести центрированные элементы матрицы:

$$\varepsilon_{ij} = m_{ij} - \frac{1}{q^2}, \qquad \sum_{i=1}^{q} \varepsilon_{ij} = 0\,; \qquad \sum_{j=1}^{q} \varepsilon_{ij} = 0,$$

то многое сводится к оценке сумм вида:

$$\Upsilon_t = \sum_{\substack{i_1 \neq \cdots \neq i_t \\ j_1 \neq \cdots \neq j_t}} \varepsilon_{i_1 j_1} \ldots \varepsilon_{i_t j_t}\,.$$

Идеи доказательств

- Первые два значения легко найти:

$$\Upsilon_2 = \sum_{i,j=1}^{q} \varepsilon_{ij}^2 , \Upsilon_3 = 4 \sum_{i,j=1}^{q} \varepsilon_{ij}^3 .$$

- Было непросто правильно оценить Υ_4:

$$\Upsilon_4 \leq \frac{1}{q} \sum_{j=1}^{q} \left(3 \sum_{i \in I} \varepsilon_{ij}^2 + 9 \sum_{i \notin I} \varepsilon_{ij}^2 \right) + O\left(\frac{1}{q^2} \sum_{i,j=1}^{q} \varepsilon_{ij}^2 \right),$$

где I – это множество плохих строк матрицы.

- Как оказалось, все Υ_t при $t \geq 5$ слишком малы, чтобы влиять на финальную оценку:

$$\Upsilon_t = O\left(\frac{1}{q^2} \sum_{i,j=1}^{q} \varepsilon_{ij}^2 \right).$$

Спасибо за внимание!