

Меры Кларка и операторы композиции для нескольких переменных

Е. С. Дубцов

ПОМИ РАН, СПб

На основе совместных работ с А. Б. Александровым, ПОМИ РАН

08 ноября 2022

Вторая конференция Математических центров России, Москва
Секция «Комплексный анализ»

- A. B. Aleksandrov and E. Doubtsov, *Pluriharmonic Clark measures and analogs of model spaces*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **357** (2019), 7–12. <http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2018.11.013>
- A. B. Aleksandrov and E. Doubtsov, *Clark measures on the complex sphere*, J. Funct. Anal. **278** (2020), no. 2, 108314, 30 pp. <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2019.108314>
- A. B. Aleksandrov and E. Doubtsov, *Clark measures and de Branges–Rovnyak spaces in several variables*, Complex Var. Elliptic Equ., <https://doi.org/10.1080/17476933.2021.1985480>

1 Постановка задачи

- Базовые объекты
- Плюригармонические меры (PM)

2 Меры Кларка (АС-меры)

- Определение
- Внутренние функции
- Теорема о дезинтеграции

3 Операторы композиции

- Пространства Харди
- Основная теорема

4 Доказательства

- Считающие функции Неванлинны
- (i) $\mathfrak{E}^2 \geq \mathfrak{G}$
- (ii) $\mathfrak{G} \geq \mathfrak{N}$
- (iii) $\mathfrak{N} \geq \mathfrak{E}^2$

$B_n :=$ открытый единичный шар в $\mathbb{C}^n$, $n \geq 1$; $\mathbb{D} = B_1$, $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$.

Для $k \in \mathbb{N}$ и $n_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, 2, \dots, k$, полагаем

$$\Omega = \Omega[n_1, n_2, \dots, n_k] = B_{n_1} \times B_{n_2} \cdots \times B_{n_k} \subset \mathbb{C}^{n_1+n_2+\dots+n_k}.$$

Модельные примеры области Ω — это B_n и полидиск $\mathbb{D}^n$.

Пусть $\partial\Omega$ обозначает границу Шилова $\partial B_{n_1} \times \partial B_{n_2} \cdots \times \partial B_{n_k}$ области Ω . Для $z = (z_1, z_2, \dots, z_k) \in \Omega$ имеем

$$C_\Omega(z, \zeta) = \prod_{j=1}^k \frac{1}{(1 - \langle z_j, \zeta_j \rangle)^{n_j}}, \quad \zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k) \in \partial\Omega,$$

$$z_j = (z_{j,1}, z_{j,2}, \dots, z_{j,n_j}) \in B_{n_j}, \quad \zeta_j = (\zeta_{j,1}, \zeta_{j,2}, \dots, \zeta_{j,n_j}) \in \partial B_{n_j}.$$

Ядро Пуассона ($\mathcal{M}$ -гармоническое яП в случае $\Omega = B_n$):

$$P(z, \zeta) = \frac{C(z, \zeta)C(\zeta, z)}{C(z, z)}, \quad z \in \Omega, \quad \zeta \in \partial\Omega.$$

- 1 Постановка задачи
 - Базовые объекты
 - Плюригармонические меры (PM)
- 2 Меры Кларка (АС-меры)
 - Определение
 - Внутренние функции
 - Теорема о дезинтеграции
- 3 Операторы композиции
 - Пространства Харди
 - Основная теорема
- 4 Доказательства
 - Считающие функции Неванлинны
 - (i) $\mathfrak{E}^2 \geq \mathfrak{G}$
 - (ii) $\mathfrak{G} \geq \mathfrak{N}$
 - (iii) $\mathfrak{N} \geq \mathfrak{E}^2$

Пусть $\mu \in M(\partial\Omega)$. По определению $\mu \in PM(\partial\Omega)$ (μ — плюригармоническая мера), если интеграл Пуассона

$$P[\mu](z) = \int_{\partial\Omega} P(z, \zeta) d\mu(\zeta), \quad z \in \Omega,$$

является плюригармонической функцией.

В частности, $\mu \in PM(\mathbb{T}^n)$ тогда и только тогда, когда коэффициенты Фурье меры μ равны нулю вне множества $(-\mathbb{Z}_+^n) \cup \mathbb{Z}_+^n$.

- 1 Постановка задачи
 - Базовые объекты
 - Плюригармонические меры (PM)
- 2 Меры Кларка (АС-меры)
 - Определение
 - Внутренние функции
 - Теорема о дезинтеграции
- 3 Операторы композиции
 - Пространства Харди
 - Основная теорема
- 4 Доказательства
 - Считающие функции Неванлинны
 - (i) $\mathfrak{E}^2 \geq \mathfrak{G}$
 - (ii) $\mathfrak{G} \geq \mathfrak{N}$
 - (iii) $\mathfrak{N} \geq \mathfrak{E}^2$

Для числа $\alpha \in \mathbb{T}$ и голоморфной функции $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ частное

$$\frac{1 - |\varphi(z)|^2}{|\alpha - \varphi(z)|^2} = \operatorname{Re} \left(\frac{\alpha + \varphi(z)}{\alpha - \varphi(z)} \right), \quad z \in \Omega,$$

является положительным и плюригармоническим.

Следовательно, существует единственная положительная мера $\sigma_\alpha = \sigma_\alpha[\varphi] \in M(\partial\Omega)$ такая, что

$$P[\sigma_\alpha](z) = \operatorname{Re} \left(\frac{\alpha + \varphi(z)}{\alpha - \varphi(z)} \right), \quad z \in \Omega.$$

По определению множества $PM(\partial\Omega)$ имеем $\sigma_\alpha \in PM(\partial\Omega)$.

Меры σ_α на окружности $\mathbb{T}$ — классические объекты.

- 1 Постановка задачи
 - Базовые объекты
 - Плюригармонические меры (PM)
- 2 Меры Кларка (АС-меры)
 - Определение
 - Внутренние функции
 - Теорема о дезинтеграции
- 3 Операторы композиции
 - Пространства Харди
 - Основная теорема
- 4 Доказательства
 - Считающие функции Неванлинны
 - (i) $\mathfrak{E}^2 \geq \mathfrak{G}$
 - (ii) $\mathfrak{G} \geq \mathfrak{N}$
 - (iii) $\mathfrak{N} \geq \mathfrak{E}^2$

Пусть Σ — нормированная мера Лебега на $\partial\Omega$.

Определение. Голоморфная функция $I : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ называется *внутренней*, если $|I(\zeta)| = 1$ для Σ -п.в. $\zeta \in \partial\Omega$.

Как обычно, $I(\zeta)$ обозначает предел $\lim_{r \rightarrow 1-} I(r\zeta)$, который существует Σ -п.в. Отметим, что по определению внутренняя функция не является константой.

Для внутренней функции I в Ω имеем

$$P[\sigma_\alpha](\zeta) = \frac{1 - |I(\zeta)|^2}{|\alpha - I(\zeta)|^2} = 0 \quad \Sigma\text{-п.в.},$$

поэтому $\sigma_\alpha = \sigma_\alpha[I]$ — сингулярная мера. Здесь и далее это означает, что σ_α и Σ взаимно сингулярны; кратко: $\sigma_\alpha \perp \Sigma$.

- 1 Постановка задачи
 - Базовые объекты
 - Плюригармонические меры (PM)
- 2 Меры Кларка (АС-меры)
 - Определение
 - Внутренние функции
 - Теорема о дезинтеграции
- 3 Операторы композиции
 - Пространства Харди
 - Основная теорема
- 4 Доказательства
 - Считающие функции Неванлинны
 - (i) $\mathfrak{E}^2 \geq \mathfrak{G}$
 - (ii) $\mathfrak{G} \geq \mathfrak{N}$
 - (iii) $\mathfrak{N} \geq \mathfrak{E}^2$

Даже для внутренней функции I семейство (сингулярных) мер Кларка дезинтегрирует меру Лебега:

Теорема (о дезинтеграции меры Лебега)

Пусть $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ — голоморфная функция и $\sigma_\alpha = \sigma_\alpha[\varphi]$, $\alpha \in \mathbb{T}$.
Тогда

$$\int_{\mathbb{T}} \sigma_\alpha dm_1(\alpha) = \Sigma,$$

т.е.

$$\int_{\mathbb{T}} \int_{\partial\Omega} f d\sigma_\alpha dm_1(\alpha) = \int_{\partial\Omega} f d\Sigma$$

для всех $f \in C(\partial\Omega)$.

- 1 Постановка задачи
 - Базовые объекты
 - Плюригармонические меры (PM)
- 2 Меры Кларка (АС-меры)
 - Определение
 - Внутренние функции
 - Теорема о дезинтеграции
- 3 **Операторы композиции**
 - **Пространства Харди**
 - Основная теорема
- 4 Доказательства
 - Считающие функции Неванлинны
 - (i) $\mathfrak{E}^2 \geq \mathfrak{G}$
 - (ii) $\mathfrak{G} \geq \mathfrak{N}$
 - (iii) $\mathfrak{N} \geq \mathfrak{E}^2$

Пусть $\mathcal{H}ol(B_n)$ — пространство всех голоморфных функций в шаре B_n . Для $0 < p < \infty$ классическое пространство Харди $H^p = H^p(B_n)$ состоит из функций $f \in \mathcal{H}ol(B_n)$ таких, что

$$\|f\|_{H^p}^p = \sup_{0 < r < 1} \int_{S_n} |f(r\zeta)|^p d\Sigma_n(\zeta) < \infty,$$

где $S_n = \partial B_n$. Как обычно, пространство Харди $H^p(B_n)$, $p > 0$, пространство соответствующих граничных значений $H^p(S_n)$ отождествляются.

- Для голоморфной функции $\varphi : B_n \rightarrow \mathbb{D}$ оператор композиции $C_\varphi : f \mapsto f \circ \varphi$ переводит $H^p(\mathbb{D})$ в $H^p(B_n)$. Действительно, пусть $f \in H^p(\mathbb{D})$. Тогда $|f|^p \leq h$ для подходящей гармонической функции h на $\mathbb{D}$. Итак, $|f \circ \varphi|^p \leq h \circ \varphi$, поэтому $f \circ \varphi \in H^p(B_n)$.

- 1 Постановка задачи
 - Базовые объекты
 - Плюригармонические меры (PM)
- 2 Меры Кларка (АС-меры)
 - Определение
 - Внутренние функции
 - Теорема о дезинтеграции
- 3 **Операторы композиции**
 - Пространства Харди
 - **Основная теорема**
- 4 Доказательства
 - Считающие функции Неванлинны
 - (i) $\mathfrak{E}^2 \geq \mathfrak{G}$
 - (ii) $\mathfrak{G} \geq \mathfrak{N}$
 - (iii) $\mathfrak{N} \geq \mathfrak{E}^2$

Следующая теорема устанавливает связи между

- свойствами с точки зрения теории меры (для мер Кларка) и
- операторно-теоретическими свойствами (для композиции)

Теорема (Меры Кларка и существенные нормы)

Пусть $\varphi : B_n \rightarrow \mathbb{D}$ — голоморфная функция. Тогда существенная норма оператора композиции $C_\varphi : f \mapsto f \circ \varphi$, $C_\varphi : H^2(\mathbb{D}) \rightarrow H^2(B_n)$, равна следующей величине:

$$\sqrt{\sup\{\|\sigma_\alpha^s\| : \alpha \in \mathbb{T}\}},$$

где σ_α^s — сингулярная часть меры Кларка $\sigma_\alpha = \sigma_\alpha[\varphi]$.

- (i) $\mathfrak{E}^2 \geq \mathfrak{G}$
- (ii) $\mathfrak{G} \geq \mathfrak{N}$
- (iii) $\mathfrak{N} \geq \mathfrak{E}^2$

- 1 Постановка задачи
 - Базовые объекты
 - Плюригармонические меры (PM)
- 2 Меры Кларка (АС-меры)
 - Определение
 - Внутренние функции
 - Теорема о дезинтеграции
- 3 Операторы композиции
 - Пространства Харди
 - Основная теорема
- 4 Доказательства
 - Считающие функции Неванлинны
 - (i) $\mathfrak{E}^2 \geq \mathfrak{G}$
 - (ii) $\mathfrak{G} \geq \mathfrak{N}$
 - (iii) $\mathfrak{N} \geq \mathfrak{E}^2$

- (i) $\mathfrak{C}^2 \geq \mathfrak{S}$
- (ii) $\mathfrak{S} \geq \mathfrak{N}$
- (iii) $\mathfrak{N} \geq \mathfrak{C}^2$

Для $f \in H^2(\mathbb{D})$ верно следующее равенство Литтлвуда–Пэли:

$$\|f\|_{H^2(\mathbb{D})}^2 = |f(0)|^2 + 2 \int_{\mathbb{D}} |f'(w)|^2 \log \frac{1}{|w|} dA(w), \quad (1)$$

где A — нормированная 2-мера Лебега на круге $\mathbb{D}$. Для изучения операторов композиции, порождённых голоморфным отображением ϕ из круга в круг, Дж. Шапиро (1987) использовал аналогичную формулу для $f \circ \phi$ на основе следующей считающей функции Неванлинны N_ϕ :

$$N_\phi(w) = \sum_{z \in \mathbb{D}: \phi(z)=w} \log \frac{1}{|z|}, \quad w \in \mathbb{D} \setminus \{\phi(0)\},$$

где каждый прообраз считается с кратностью.

- (i) $\mathfrak{E}^2 \geq \mathfrak{S}$
- (ii) $\mathfrak{S} \geq \mathfrak{N}$
- (iii) $\mathfrak{N} \geq \mathfrak{E}^2$

В многомерной ситуации используем следующий результат.

Лемма

Пусть $\varphi : B_n \rightarrow \mathbb{D}$, $n \geq 1$, — голоморфная функция. Тогда

$$\|f \circ \varphi\|_{H^2(B_n)}^2 = |f(\varphi(0))|^2 + 2 \int_{\mathbb{D}} |f'(w)|^2 \left(\int_{S_n} N_{\varphi_\zeta}(w) d\Sigma_n(\zeta) \right) dA(w). \quad (2)$$

Сравнение (2) и (1) подсказывает, что $C_\varphi : H^2(\mathbb{D}) \rightarrow H^2(B_n)$ — это компактный оператор, если $\mathfrak{N}(\varphi) = 0$, где

$$\mathfrak{N}(\varphi) = \limsup_{|w| \rightarrow 1-} \int_{S_n} \frac{N_{\varphi_\zeta}(w)}{1 - |w|} d\Sigma_n(\zeta).$$

Это так; более того, верна следующая теорема.

- (i) $\mathfrak{E}^2 \geq \mathfrak{S}$
- (ii) $\mathfrak{S} \geq \mathfrak{N}$
- (iii) $\mathfrak{N} \geq \mathfrak{E}^2$

Пусть $\mathfrak{E}(\varphi)$ обозначает существенную норму $\|C_\varphi\|_{H^2, \mathfrak{e}}$ оператора композиции $C_\varphi : H^2(\mathbb{D}) \rightarrow H^2(B_n)$.

Основная теорема

Пусть $\varphi : B_n \rightarrow \mathbb{D}$, $n \geq 1$, — голоморфная функция. Тогда

$$\mathfrak{E}^2(\varphi) = \mathfrak{S}(\varphi) = \mathfrak{N}(\varphi),$$

где

$$\mathfrak{S}(\varphi) = \sup_{\alpha \in \mathbb{T}} \|\sigma_\alpha^s\|.$$

План доказательства: $\mathfrak{E}^2 \stackrel{(i)}{\geq} \mathfrak{S} \stackrel{(ii)}{\geq} \mathfrak{N} \stackrel{(iii)}{\geq} \mathfrak{E}^2$.

- (i) $\mathfrak{E}^2 \geq \mathfrak{S}$
- (ii) $\mathfrak{S} \geq \mathfrak{N}$
- (iii) $\mathfrak{N} \geq \mathfrak{E}^2$

Следствие

Пусть $0 < p < \infty$ и $\varphi : B_n \rightarrow \mathbb{D}$, $n \geq 1$, — голоморфная функция. Тогда следующие свойства эквивалентны:

- $\mathfrak{N}(\varphi) = 0$;
- $C_\varphi : H^p(\mathbb{D}) \rightarrow H^p(B_n)$ — компактный оператор;
- все меры $\sigma_\alpha[\varphi]$, $\alpha \in \mathbb{T}$, являются абсолютно непрерывными.

Доказательство. Если $p = 2$, то используем основную теорему. Для завершения доказательства достаточно заметить, что компактность оператора $C_\varphi : H^p(\mathbb{D}) \rightarrow H^p(B_n)$ для некоторого параметра $p > 0$ равносильна его компактности при $p = 2$.

- (i) $\epsilon^2 \geq \epsilon$
- (ii) $\epsilon \geq n$
- (iii) $n \geq \epsilon^2$

- 1 Постановка задачи
 - Базовые объекты
 - Плюригармонические меры (PM)
- 2 Меры Кларка (АС-меры)
 - Определение
 - Внутренние функции
 - Теорема о дезинтеграции
- 3 Операторы композиции
 - Пространства Харди
 - Основная теорема
- 4 Доказательства
 - Считающие функции Неванлинны
 - (i) $\epsilon^2 \geq \epsilon$
 - (ii) $\epsilon \geq n$
 - (iii) $n \geq \epsilon^2$

- (i) $\mathfrak{e}^2 \geq \mathfrak{S}$
- (ii) $\mathfrak{S} \geq \mathfrak{N}$
- (iii) $\mathfrak{N} \geq \mathfrak{e}^2$

Лемма

Для $b \in \mathbb{D}$ положим

$$f_b(w) = \frac{\sqrt{1 - |b|^2}}{1 - \overline{b}w}, \quad w \in \mathbb{D}.$$

Пусть $\alpha \in \mathbb{T}$, $n \geq 1$ и $\varphi : B_n \rightarrow \mathbb{D}$ — голоморфная функция.
Тогда

$$\|f_b \circ \varphi\|_{H^2(B_n)}^2 \rightarrow \|\sigma_\alpha^s\| \quad \text{при радиальной сходимости } b \rightarrow \alpha,$$

где σ_α^s — сингулярная часть меры Кларка $\sigma_\alpha[\varphi]$.

Доказательство. Пусть $b = r\alpha$, $0 < r < 1$, $\alpha \in \mathbb{T}$. Имеем

$$\begin{aligned} \|f_b \circ \varphi\|_{H^2(B_n)}^2 &= \int_{S_n} \frac{1 - r^2}{|\alpha - r\varphi(\zeta)|^2} d\Sigma_n(\zeta) \\ &= \int_{S_n} \frac{1 - |r\varphi(\zeta)|^2}{|\alpha - r\varphi(\zeta)|^2} d\Sigma_n(\zeta) - r^2 \int_{S_n} \frac{1 - |\varphi(\zeta)|^2}{|\alpha - r\varphi(\zeta)|^2} d\Sigma_n(\zeta) \\ &= J_r - K_r. \end{aligned}$$

Для любой фиксированной точки $w \in \mathbb{D}$ функция $r^2|1 - rw|^{-2}$ возрастает при $r \rightarrow 1-$. Поэтому

$$\lim_{r \rightarrow 1-} K_r = \int_{S_n} \frac{1 - |\varphi(\zeta)|^2}{|\alpha - \varphi(\zeta)|^2} d\Sigma_n(\zeta) = \|\sigma_\alpha\|.$$

Это завершает доказательство, так как

$$J_r = \frac{1 - |r\varphi(0)|^2}{|\alpha - r\varphi(0)|^2} \rightarrow \|\sigma_\alpha\| \quad \text{при } r \rightarrow 1-.$$

- (i) $\mathfrak{E}^2 \geq \mathfrak{G}$
- (ii) $\mathfrak{G} \geq \mathfrak{N}$
- (iii) $\mathfrak{N} \geq \mathfrak{E}^2$

(i) $\mathfrak{E}^2 \geq \mathfrak{G}$

Пусть f_b , $b \in \mathbb{D}$, — функция, определённая в лемме. Заметим, что $\|f_b\|_{H^2(\mathbb{D})} = 1$ и $f_b \rightarrow 0$ слабо в пространстве $H^2(\mathbb{D})$ при $|b| \rightarrow 1-$. Поэтому для любого компактного оператора $K : H^2(\mathbb{D}) \rightarrow H^2(B_n)$ имеем $\|Kf_b\|_{H^2(B_n)} \rightarrow 0$ при $|b| \rightarrow 1-$. Следовательно,

$$\|C_\varphi - K\|_{H^2(\mathbb{D}) \rightarrow H^2(B_n)}^2 \geq \limsup_{b \rightarrow \alpha} \|(C_\varphi - K)f_b\|_{H^2(B_n)}^2 \geq \|\sigma_\alpha^s\|$$

в силу леммы. Таким образом, $\|C_\varphi\|_{H^2, e}^2 \geq \mathfrak{G}$, что и требовалось доказать.

- (i) $\mathfrak{E}^2 \geq \mathfrak{G}$
- (ii) $\mathfrak{G} \geq \mathfrak{N}$
- (iii) $\mathfrak{N} \geq \mathfrak{E}^2$

- 1 Постановка задачи
 - Базовые объекты
 - Плюригармонические меры (PM)
- 2 Меры Кларка (АС-меры)
 - Определение
 - Внутренние функции
 - Теорема о дезинтеграции
- 3 Операторы композиции
 - Пространства Харди
 - Основная теорема
- 4 Доказательства
 - Считающие функции Неванлинны
 - (i) $\mathfrak{E}^2 \geq \mathfrak{G}$
 - (ii) $\mathfrak{G} \geq \mathfrak{N}$
 - (iii) $\mathfrak{N} \geq \mathfrak{E}^2$

- (i) $\mathfrak{E}^2 \geq \mathfrak{S}$
- (ii) $\mathfrak{S} \geq \mathfrak{N}$
- (iii) $\mathfrak{N} \geq \mathfrak{E}^2$

(ii) $\mathfrak{S} \geq \mathfrak{N}$ Пусть ϕ — голоморфное отображение из $\mathbb{D}$ в $\mathbb{D}$.
Для $w \in \mathbb{D} \setminus \{\phi(0)\}$ и $\alpha \in \mathbb{T}$ положим

$$\mathcal{N}_\phi(w) = \int_{\mathbb{T}} \log |\psi_w \circ \phi(\xi)| d\Sigma_1(\xi) + \log \frac{1}{|\psi_w(\phi(0))|},$$

где

$$\psi_w(\lambda) = \frac{w - \lambda}{1 - \overline{w}\lambda}.$$

Формула Йенсена и лемма Фату гарантируют, что

$$N_\phi(w) \leq \mathcal{N}_\phi(w), \quad w \in \mathbb{D} \setminus \{\phi(0)\}.$$

Для $\lambda \in \mathbb{D} \cup \mathbb{T} \setminus \{\alpha\}$ прямые вычисления показывают, что

$$-\lim_{w \rightarrow \alpha} \frac{\log |\psi_w(\lambda)|}{1 - |w|} = \frac{1 - |\lambda|^2}{|\alpha - \lambda|^2}.$$

- (i) $\mathfrak{E}^2 \geq \mathfrak{S}$
- (ii) $\mathfrak{S} \geq \mathfrak{N}$
- (iii) $\mathfrak{N} \geq \mathfrak{E}^2$

Поэтому, используя определение функции $\mathcal{N}_{\varphi_\zeta}$, $\zeta \in S_n$, и обратную лемму Фату, имеем

$$\begin{aligned} \limsup_{w \rightarrow \alpha} \int_{S_n} \frac{N_{\varphi_\zeta}(w)}{1 - |w|} d\Sigma_n(\zeta) &\leq \limsup_{w \rightarrow \alpha} \int_{S_n} \frac{\mathcal{N}_{\varphi_\zeta}(w)}{1 - |w|} d\Sigma_n(\zeta) \\ &\leq \int_{S_n} \left(\frac{1 - |\varphi(0)|^2}{|\alpha - \varphi(0)|^2} - \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - |\varphi_\zeta(\xi)|^2}{|\alpha - \varphi_\zeta(\xi)|^2} d\Sigma_1(\xi) \right) d\Sigma_n(\zeta) \\ &= \frac{1 - |\varphi(0)|^2}{|\alpha - \varphi(0)|^2} - \int_{S_n} \frac{1 - |\varphi(\zeta)|^2}{|\alpha - \varphi(\zeta)|^2} d\Sigma_n(\zeta) \\ &= \|\sigma_\alpha^s\|. \end{aligned}$$

Итак, получаем $\mathfrak{N}[\varphi] \leq \mathfrak{S}[\varphi]$, что и требовалось доказать.

- (i) $\mathfrak{E}^2 \geq \mathfrak{G}$
- (ii) $\mathfrak{G} \geq \mathfrak{N}$
- (iii) $\mathfrak{N} \geq \mathfrak{E}^2$

- 1 Постановка задачи
 - Базовые объекты
 - Плюригармонические меры (PM)
- 2 Меры Кларка (АС-меры)
 - Определение
 - Внутренние функции
 - Теорема о дезинтеграции
- 3 Операторы композиции
 - Пространства Харди
 - Основная теорема
- 4 Доказательства
 - Считающие функции Неванлинны
 - (i) $\mathfrak{E}^2 \geq \mathfrak{G}$
 - (ii) $\mathfrak{G} \geq \mathfrak{N}$
 - (iii) $\mathfrak{N} \geq \mathfrak{E}^2$

- (i) $\mathfrak{E}^2 \geq \mathfrak{S}$
- (ii) $\mathfrak{S} \geq \mathfrak{N}$
- (iii) $\mathfrak{N} \geq \mathfrak{E}^2$

(iii) $\mathfrak{N} \geq \mathfrak{E}^2$

Для $f \in H^2(\mathbb{D})$ и $0 < r < 1$ положим $T_r f(z) = f(rz)$, $z \in \mathbb{D}$.
Ясно, что T_r — компактный оператор на пространстве $H^2(\mathbb{D})$.

Идея доказательства:

приблизить C_φ с помощью $C_\varphi T_r$.

- (i) $\mathfrak{E}^2 \geq \mathfrak{S}$
- (ii) $\mathfrak{S} \geq \mathfrak{N}$
- (iii) $\mathfrak{N} \geq \mathfrak{E}^2$

Пусть $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, $z \in \mathbb{D}$, — функция из 1-шара пространства $H^2(\mathbb{D})$. В частности, $|a_k| \leq 1$. В силу (2) имеем

$$\begin{aligned} \|(C_\varphi - C_\varphi T_r)f\|_{H^2}^2 &= |(f - f_r)(\varphi(0))|^2 \\ &+ 2 \int_{\mathbb{D}} |(f - f_r)'(w)|^2 \int_{S_n} N_{\varphi_\zeta}(w) d\Sigma_n(\zeta) dA(w). \end{aligned}$$

Во-первых,

$$|(f - f_r)(\varphi(0))| \leq \sum_{k=1}^{\infty} (1 - r^k) |\varphi(0)|^k \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow 1 - .$$

Во-вторых, для $0 < R < 1$ имеем

$$\begin{aligned} &\int_{R\mathbb{D}} |(f - f_r)'(w)|^2 \int_{S_n} N_{\varphi_\zeta}(w) d\Sigma_n(\zeta) dA(w) \\ &\leq \int_{\mathbb{D}} \int_{S_n} N_{\varphi_\zeta}(w) d\Sigma_n(\zeta) dA(w) \left(\sum_{k=1}^{\infty} k(1 - r^k) R^{k-1} \right)^2 \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow 1 - . \end{aligned}$$

- (i) $\mathfrak{E}^2 \geq \mathfrak{S}$
- (ii) $\mathfrak{S} \geq \mathfrak{N}$
- (iii) $\mathfrak{N} \geq \mathfrak{E}^2$

Теперь зафиксируем $R \in (0, 1)$ и положим

$$\mathfrak{N}_R = \sup_{R \leq |w| < 1} \int_{S_n} \frac{N_{\varphi_\zeta}(w)}{-\log |w|} d\Sigma_n(\zeta).$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Полученные оценки не зависят от f , $\|f\|_{H^2} \leq 1$, поэтому для при достаточно близком к 1 параметре $r = r(\varepsilon, R)$

$$\begin{aligned} \|(C_\varphi - C_\varphi T_r)f\|_{H^2}^2 &\leq \varepsilon + 2 \int_{\mathbb{D} \setminus R\mathbb{D}} |(f - f_r)'(w)|^2 \mathfrak{N}_R \log \frac{1}{|w|} dA(w) \\ &\leq \varepsilon + 2\mathfrak{N}_R \int_{\mathbb{D}} |(f - f_r)'(w)|^2 \log \frac{1}{|w|} dA(w) \\ &\leq \varepsilon + \mathfrak{N}_R \|f - f_r\|_{H^2}^2 \leq \varepsilon + \mathfrak{N}_R \end{aligned}$$

в силу (1). Следовательно, $\|C_\varphi\|_{H^2, \varepsilon}^2 \leq \mathfrak{N}_R$, $0 < R < 1$. Так как $-\log |w| \sim 1 - |w|$ при $|w| \rightarrow 1-$, то доказательство завершено.