

О нулевых множествах медленно убывающих функций

Наталья Абузярова

Уфа, Россия

4 ноября 2022 г.

- ▶ X — линейное топологическое пространство целых функций, в котором операция умножения функций непрерывна, то есть X — топологическая алгебра.
- ▶ $\varphi \in X$ называется **делителем** X , если

$$\Psi \in X, \quad \frac{\Psi}{\varphi} \in H(\mathbb{C}) \implies \frac{\Psi}{\varphi} \in X$$

(для φ имеет место **теорема деления в X**).

$\mathcal{D}(X)$ — совокупность всех делителей X .

Обычно, X — весовое пространство.

ЗАДАЧИ.

- ▶ 1. Описание множества делителей $\mathcal{D}(X)$ в терминах ограничений на поведение φ , оценки снизу для $|\varphi|$.
- ▶ 2. Изучение нулевых множеств $\mathcal{Z}_\varphi$ функций $\varphi \in \mathcal{D}(X)$:
 - а) свойства нулевых множеств делителей?
 - б) пусть $\varphi \in X$;
найти условия на $\mathcal{Z}_\varphi$, при которых $\varphi \in \mathcal{D}(X)$?

Наилучший возможный результат по задаче 2:

полное описание нулевых множеств функций $\varphi \in \mathcal{D}(X)$.

Причина интереса к сформулированным задачам:

X — аналитическая реализация какого-либо функционального пространства F или сильного сопряженного к нему.

Поэтому любая информация об элементах X имеет двойственную интерпретацию в F .

Известные результаты: пример из классической теории роста целых функций

К. Вейерштрасс, Ж. Адамар, Э. Борель, Е.Л. Линделеф

- ▶ Пусть $\rho > 0$.

$X = H_\rho$ — пространство всех целых функций, растущих не быстрее нормального типа при порядке ρ :

$$\varphi \in H_\rho \iff \varphi \in H(\mathbb{C}) \text{ и } |\varphi(z)| \leq C_\varphi e^{C_\varphi |z|^\rho}, \forall z \in \mathbb{C}, C_\varphi > 0.$$

- ▶ H_ρ — алгебра и $H_\rho = \mathcal{D}(H_\rho)$.

Аналитическая реализация: H_1 — это пространство есть образ сильного сопряженного к пространству $H(\mathbb{C})$ при преобразовании Лапласа $\mathcal{L}$.

Пространства целых функций экспоненциального типа с ограничениями на рост вдоль вещественной прямой

Пусть ω — канонический вес:

$\omega : [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$ — возрастающая функция, со спец. свойствами, в том числе

$$\ln x = o(\omega(x)), \quad \omega(x) = o(x), \quad x \rightarrow \infty.$$

.

Определим банаховы пространства:

$$P_{a,r} = \left\{ \varphi \in H(\mathbb{C}) : \|\varphi\|_{a,r} = \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|\varphi(z)|}{\exp(a|\operatorname{Im} z| + r\omega(|z|))} < \infty \right\}, \quad a > 0, \quad r > 0.$$

$$P_{(\omega)} = \bigcup_{r>0} \bigcup_{a>0} P_{a,r} \quad \text{— индуктивный предел семейства } P_{a,r} :$$

$$\varphi \in P_{(\omega)} \iff \|\varphi\|_{a,r} < \infty$$

при некоторых a и r , зависящих от φ .

$P_{(\omega)}$ — топологическая алгебра

(операция умножения функций непрерывна в $P_{(\omega)}$).

Пространства целых функций экспоненциального типа с ограничениями на рост вдоль вещественной прямой

ω — **канонический вес** $\iff$ выполнены условия:

$\omega : [0; \infty) \rightarrow [0; \infty)$ —

неотрицательная, неубывающая на $[0; \infty)$ функция,

$f(\xi) := \omega(e^\xi)$ выпукла на $[0; \infty)$,

$\ln x = o(\omega(x))$,

$\omega(2x) = O(\omega(x))$, $x \rightarrow +\infty$,

$$\int_1^\infty \frac{\omega(x)}{x^2} dx < \infty,$$

в частности, $\omega(x) = o(x)$, $x \rightarrow \infty$.

Пространства целых функций экспоненциального типа с ограничениями на рост вдоль вещественной прямой

Известно, что

$$P_{(\omega)} = \mathcal{F}(\mathcal{U}'_{(\omega)}),$$

где $\mathcal{U}_{(\omega)}$ — пространство ультрадифференцируемых функций Берлинга-Бьорка минимального типа на прямой,

$\mathcal{F}$ — преобразование Фурье-Лапласа:

$$\mathcal{F}(S) = S(e^{-itz}),$$

$S \in \mathcal{U}'_{(\omega)}$ — ультрасредделение с компактным носителем — элемент сильного сопряженного пространства к $\mathcal{U}_{(\omega)}$

(G. Björck, 1965; R.Meise, B.A. Taylor, D.Vogt, 1987).

ЗАДАЧА 1: характеристика делителей алгебры $P_{(\omega)}$ в терминах медленного убывания

- ▶ Для функции $\varphi \in P_{(\omega)}$ выполнено условие медленного убывания в $P_{(\omega)}$, если

$$\exists A > 0 : \forall x \in \mathbb{R} \exists x' \in \mathbb{R} : |x' - x| \leq A\omega(|x|), |x'| > |x|$$
$$\text{и } \ln |\varphi(x')| \geq -A\omega(|x'|),$$

то есть

$$|\ln |\varphi(x')|| \leq A\omega(|x'|)$$

для достаточно большого числа точек $x' \in \mathbb{R}$.

Отметим, что если $\varphi \in P_{(\omega)}$, то

$$\ln |\varphi(x)| \leq A\omega(|x|) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- ▶ **Теорема А.** (R.Meise, B.A. Taylor, D.Vogt, 1987)

Пусть $\varphi \in P_{(\omega)}$.

Для того, чтобы $\varphi \in \mathcal{D}(P_{(\omega)})$ необходимо и достаточно, чтобы для нее выполнялось условие медленного убывания.

ЗАДАЧА 2: нулевые множества медленно убывающих функций в $P_{(\omega)}$

- ▶ Рассмотрим функцию $\sin \pi z$.

Известны оценки

$$|\sin \pi z| \leq e^{\pi |\operatorname{Im} z|}, \quad z \in \mathbb{C},$$

$$|\sin \pi z| \geq M_\delta > 0, \quad z : |z - k| \geq \delta > 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Поэтому $\sin \pi z \in \mathcal{D}(P_{(\omega)})$ (делитель алгебры $P_{(\omega)}$).

$\mathbb{Z} = \{k\}$ — нулевое множество функции $\sin \pi z$.

- ▶ Пусть $l : [0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\lambda_k = k + l(|k|), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

При каких условиях на функцию l последовательность (1) будет нулевым множеством делителя алгебры $P_{(\omega)}$?

ЗАДАЧА 2: нулевые множества медленно убывающих функций в $P_{(\omega)}$



$$\lambda_k = k + l(|k|), \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots,$$

$l : [0; \infty) \rightarrow [0; \infty)$ — канонический вес.

► Теорема 1. (2022)

Предположим, что выполнены условия:

$$l'(t) = O\left(\frac{l(t)}{|t|}\right), \quad |t| \rightarrow \infty, \quad \int \frac{l^2(t)}{t^2} dt < \infty.$$

Если вес l строгий, то функция

$$\varphi(z) = \lim_{R \rightarrow \infty} \prod_{|\lambda_k| < R} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right)$$

— делитель алгебры $P_{(\omega)}$ для любого канонического веса ω такого, что

$$l(x) = O(\omega(x)), \quad x \rightarrow \infty.$$

(Вес l называется **строгим**, если $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{l(Kt)}{l(t)} < K$ для некоторого $K > 1$.)

ЗАДАЧА 2: нулевые множества медленно убывающих функций в $P_{(\omega)}$

- Условиям теоремы 1 удовлетворяют, например, функции

$$l(t) = \ln^p(|t| + 1), \text{ при } p > 1,$$

$$l(t) = t^\rho, \rho \in (0; 1/2),$$

$$l(t) = t^\rho \ln^{-p}(|t| + 1), \rho \in (0; 1/2), p > 0.$$

- **Теорема 2.** (2022) *Предположим, что l — вогнутый канонический вес и выполнены условия:*

$$\int \frac{l^2(t)}{t^2} dt < \infty, \quad \lim_{M \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{l(Mt)}{l(t)} > 1.$$

Положим

$$\varphi(z) = \lim_{R \rightarrow \infty} \prod_{|\lambda_k| < R} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right), \quad (2)$$

где $\lambda_k = k + l(|k|)$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$

Включение $\varphi \in \mathcal{D}(P_{(\omega)})$ имеет место для любого канонического веса ω такого, что $l(x) = O(\omega(x))$, тогда и только тогда, когда вес l строгий.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!