Об оценках типа Ньюмана для $L_p[-1,1]$-норм наипростейших дробей с полюсами на единичной окружности*

Комаров Михаил Анатольевич**

*Доклад на конференции матцентров (Москва, 7-11 ноября 2022)

**Владимирский гос. ун-т; e-mail: kami9@yandex.ru

Наипростейшие дроби порядка $n = 1, 2, \ldots$ с полюсами на единичной окружности:

$$g_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - z_k}, \qquad |z_1| = \cdots = |z_n| = 1; \tag{1}$$

$$g_n(z) \equiv \frac{P'(z)}{P(z)}, \quad \text{где} \quad P(z) = (z - z_1) \cdots (z - z_n).$$

C.K. Chui (1973):
если $\alpha > 0$, то для любой функции $f \in \mathbf{A}^1_\alpha$ существуют дроби g_n, $n = 1, 2, \dots$, вида (1) такие, что

$$\|f - g_n\|_{1,\alpha} \to 0.$$

Здесь $\mathbf{A}^1_\alpha$ — пространство Бергмана аналитических в открытом единичном круге D функций f, для которых

$$\|f\|_{1,\alpha} := \iint\limits_{|z|<1} |f(z)|(1 - |z|^2)^\alpha \, dxdy < \infty \qquad (z = x + iy).$$

Условие на α в теореме Чуи ослабить нельзя (наипростейшие дроби (1) неплотны в $\mathbf{A}^1_0$).

C.K. Chui (гипотеза, 1971):

1) существует абсолютная константа $c > 0$ такая, что

$$\|g_n\|_{1,0} = \iint\limits_{|z|<1} \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - z_k} \right| dxdy > c \tag{2}$$

для любого $n = 1, 2, \ldots$ и любой дроби g_n вида (1);

2) более того, минимальное значение интеграла достигается в случае равноудалённых полюсов ($z_k = e^{2\pi ki/n}$).

[Интеграл в (2) интерпретируется как средняя напряжённость поля, создаваемого в круге единичными зарядами, помещёнными в точках $z_1, \ldots, z_n$.]

$$(2) \qquad \Longrightarrow \qquad \|f - g_n\|_{1,0} \nrightarrow 0 \quad \text{для} \quad f \equiv 0.$$

D.J. Newman (1972):
какими бы ни были точки $z_1, \ldots, z_n$ на единичной окружности,

$$\iint\limits_{|z|<1} \Big| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - z_k} \Big| \, dxdy > \frac{\pi n^2}{2(2n+1)^2} \geq \frac{\pi}{18}.$$

Ньюман использует соотношения

$$\Big| \sum_{k=1}^{n} \frac{2z}{z - z_k} \Big| = \Big| \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k + z}{z_k - z} - n \Big| \geq \sum_{k=1}^{n} P_k(z) - n$$

и

$$\iint\limits_{|z|<1} \Big| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - z_k} \Big| \, dxdy > \frac{1}{2} \iint\limits_{\Delta} \Big(\sum_{k=1}^{n} P_k(z) - n \Big) \, dxdy,$$

где P_k — ядра Пуассона

$$P_k(z) = \operatorname{Re} \frac{z_k + z}{z_k - z} = \frac{1 - |z|^2}{1 - 2\operatorname{Re}(z\,\overline{z}_k) + |z|^2} \geq 0,$$

а Δ — объединение кругов радиуса $1/(2n+1)$:

$$\Delta = \bigcup_k \Big\{ P_k \geq 2n \Big\} = \bigcup_k \Big\{ z : \Big| z - \tfrac{2n}{2n+1} z_k \Big| \leq \tfrac{1}{2n+1} \Big\}.$$

Случай отрезка

С.Р. Насыров (задача, 2014):
плотны ли дроби (1) в комплексном пространстве $L_2[-1,1]$?

Автор (2019):
вопрос Насырова имеет отрицательный ответ ввиду следующей оценки: для любых точек $z_1, \dots, z_n$ на единичной окружности,

$$\|g_n\|_{L_2} = \left(\int_{-1}^{1} \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x - z_k} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} > \frac{1}{8}. \qquad (3)$$

В этой же работе сформулирована гипотеза о точном порядке роста $L_2[-1,1]$-норм наипростейших дробей (1):

$$\|g_n\|_{L_2} > A\sqrt{n} \qquad (\exists A > 0) \ ? \qquad (4)$$

Оценка сверху:

$$\left(\int_{-1}^{1} \left| \frac{nx^{n-1}}{x^n + i} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(2n \int_0^1 \frac{t^{1-\frac{1}{n}} dt}{t^2 + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \sim \sqrt{n \ln 2}.$$

К доказательству оценки (3):

Если хотя бы для одного из полюсов (скажем, z_j) дроби g_n имеем

$$|\mathrm{Re}\, z_j| \ge \sqrt{1 - \frac{1}{18n^2}},$$

то $P_j(x) \ge 3n$ на подотрезке S длины $|S| > (6n)^{-1}$. Отсюда:

$$|g_n(x)| \ge \frac{1}{2}(P_j(x) - n) \ge n \quad (x \in S); \qquad \int_{-1}^{1} |g_n|^2 > \int_S |g_n|^2 > \frac{n}{6}.$$

В противном случае (когда все $|\mathrm{Re}\, z_k| < \sqrt{\ldots}$) на подмножестве S_1 длины $|S_1| \ge (54n^2)^{-1}$ имеем $P_k(x) < 1/3$, $k = 1, \ldots, n$. Отсюда:

$$|g_n(x)| \ge \frac{1}{2}\Big(n - \sum P_k(x)\Big) > \frac{1}{2}\Big(n - \frac{n}{3}\Big) = \frac{n}{3} \quad (x \in S_1);$$

$$\int_{-1}^{1} |g_n|^2 > \int_{S_1} |g_n|^2 > \frac{n^2}{9}\,|S_1| \ge \frac{1}{9 \cdot 54}.$$

П.А. Бородин (задачи):
1) отделены ли от нуля наилучшие приближения

$$\inf_{g_n} \|f - g_n\|_{L_2}$$

функций $f \in L_2[-1,1]$, не тождественных 0 ?

2) что можно сказать о плотности наипростейших дробей вида (1) в пространствах L_2 с весом $(1-x^2)^\alpha$, $\alpha > 0$?

$$\|f\|_{L_2;\alpha} = \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 (1-x^2)^\alpha \, dx \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

А. Ершов (2022):
дроби (1) плотны в пространствах $L_2\Big([-1,1], (1-x^2)^\alpha\Big)$, $\alpha > 1$.

З а м е ч а н и е: если гипотеза (4) верна, то для всех $f \in L_2[-1,1]$

$$\|f - g_n\|_{L_2} \geq \|g_n\|_{L_2} - \|f\|_{L_2} \longrightarrow +\infty \quad (n \to \infty).$$

Основные результаты

Теорема 1. *Для любой дроби g_n вида (1) и любого $p > 0$*

$$\int_{-1}^{1} |g_n(x)|^p \, dx > C_p \, n^{p-1}, \tag{5}$$

$C_p := \frac{3p^p(p+1)^{1-p}}{2^{p+5}(1+2p)^2}$. *Оценка точна по порядку n.*

Следствие 1. *Полагая $p = 2$ получаем, что гипотеза (4) верна:*

$$\|g_n\|_{L_2}^2 > \frac{n}{800}.$$

Следствие 2. *Полагая $p = 1$ получаем оценку*

$$\|g_n\|_{L_1} > \frac{1}{192}.$$

Таким образом, дроби (1) неплотны даже в $L_1[-1,1]$.

Во всех оценках можно заменить $g_n(x)$ на $xg_n(x)$ или $\mathrm{Re}(xg_n(x))$.

Доказательство сводится к решению З а д а ч и: *насколько малой для дробей g_n вида* (1) *может быть мера $\mu(E)$ множества*

$$E = E_\delta(g_n) = \Big\{x \in [-1,1] : \ \Big|\mathrm{Re}(x g_n(x))\Big| \geq \delta n\Big\}, \quad \delta > 0\,?$$

Теорема 2. *Для любой функции g_n вида* (1) *и $0 < \delta < 1/2$*

$$\mu(E) = \mu(E_\delta(g_n)) \geq \frac{K(\delta)}{n}, \qquad K(\delta) := \frac{3}{32}\frac{1-2\delta}{(1+2\delta)^2}. \tag{6}$$

З а м е ч а н и е: при $\delta \geq 1/2$ множество E может быть пустым.

Д о к а з а т е л ь с т в о Теоремы 1:
По определению множества $E = E_\delta$ с $\delta = \delta_1 := p/(2(p+1))$ имеем

$$\int_{-1}^{1} |g_n(x)|^p\,dx > \int_E \Big|\mathrm{Re}(x g_n(x))\Big|^p\,dx \geq (\delta_1 n)^p \mu(E) \geq$$

$$\geq \delta_1^p K(\delta_1) n^{p-1} = C_p\, n^{p-1}.$$

З а м е ч а н и е. Для построения обобщений неравенства П. Турана, обратного к неравенству А.А. Маркова

$$\|P_n'\|_{C[-1,1]} \leq n^2 \|P_n\|_{C[-1,1]},$$

применялись родственные метрические оценки логарифмических производных полиномов с ограниченными корнями:

а) если корни $z_1, \ldots, z_n$ полинома P лежат в верхнем единичном полукруге $U = \{z : |z| \leq 1, \operatorname{Im} z \geq 0\}$, то

$$\mu\Big\{x \in [-1,1] : \Big|\frac{P'(x)}{P(x)}\Big| \leq \delta n\Big\} < 70e\delta \quad (\delta > 0); \tag{7}$$

б) если все корни полинома лежат на отрезке $[-1,1]$, то

$$\mu\Big\{x \in [-1,1] : \Big|\frac{P'(x)}{P(x)}\Big| \leq \delta n\Big\} \leq \frac{\sqrt{1+4\delta^2}-1}{\delta}; \tag{8}$$

в) для тех же полиномов с корнями $z_k \in [-1,1]$ имеем

$$\mu\Big\{x \in [-1,1] : (1-x^2)\Big|\frac{P'(x)}{P(x)}\Big| \leq \delta n\Big\} \leq 2\delta. \tag{9}$$

Оценки (7), (8) — Н.В. Говоров и Ю.П. Лапенко (1978); оценка (9) — обобщение одного результата П. Борвейна.

Дополнение к Теореме 2:
Множество $E = E_\delta(g_n)$ *сосредоточено вблизи концов отрезка* $[-1,1]$ *в том смысле, что оценку* (6) *можно заменить на*

$$\mu(E\cap H) \geq \frac{K(\delta)}{n}, \qquad H = H_{n,\delta} = \left\{1 \geq |x| > 1 - \frac{3}{(2+4\delta)n}\right\}.$$

В частности, существует интервал (a,b) *такой, что*

$$|b-a| \geq \frac{K(\delta)}{2n}, \quad (a,b) \subset E\cap H.$$

Следствие 3. *Дроби* (1) *неплотны в* $L_2([-1,1],(1-x^2))$ $(\alpha = 1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $\delta = 1/4$, $c = K(1/4)/2 > 0$.

$$\int\limits_a^b |g_n(x)|^2(1-x^2)dx \geq \frac{n^2}{4^2}\int\limits_a^b (1-x^2)dx > \frac{n^2}{4^2}\int\limits_{1-\frac{c}{n}}^1 (1-x)dx = \frac{c^2}{32} > 0.$$

Аналогично: дроби (1) неплотны в $L_p([-1,1],(1-x^2)^{p-1})$, $p \geq 1$.

Плотность наипростейших дробей (1) в пространствах

$$L_p([-1,1],(1-x^2)^\alpha), \quad p \geq 1,$$

при

$$\alpha > p-1$$

вытекает из плотности полиномов и следующего предложения:

если $P(z)$ — комплексный полином степени m, то при каждом достаточно большом $n > n_0(m, \|P\|_{C(D)})$ существует наипростейшая дробь $g^*_{2n+1}(z)$ вида (1) такая, что

$$\left| g^*_{2n+1}(z) - P(z) \right| \leq A(P) \frac{n|z|^n}{1-|z|^{n+1}}, \quad |z| < 1.$$

Отсюда:

$$\int\limits_{-1}^{1} \left| g^*_{2n+1}(x) - P(x) \right|^p (1-x^2)^\alpha \, dx < A_{p,\alpha}(P) \frac{(\ln n)^{1+\alpha}}{n^{\alpha-p+1}}.$$

К доказательству Теоремы 2

Снова используем преобразование:

$$\Big|\mathrm{Re}(xg_n(x))\Big| = \frac{1}{2}\Big|\sum_{k=1}^{n} P_k(x) - n\Big|, \tag{10}$$

$$P_k(x) = \mathrm{Re}\,\frac{z_k + x}{z_k - x} = \frac{1 - x^2}{1 - 2x\,\mathrm{Re}\,z_k + x^2} \geq 0, \qquad -1 \leq x \leq 1.$$

Исследуем неравенства $P_k(x) \geq h$, $h > 0$ (пересечения кругов

$$|z - z_k h/(h+1)| \leq 1/(h+1)$$

с единичным отрезком).

Для фиксированного $\rho \in (0, 1/4]$ положим

$$T(h) = \sqrt{1 + \rho^2 - \frac{2\rho}{h}}, \qquad 1 \leq h \leq (2\rho)^{-1}.$$

Функция $T(h)$ строго возрастает.

Положим

$$S^* = \left[\tfrac{\sqrt{1-3\rho^2}-\rho}{1+2\rho},\ 1-\rho\right] \qquad \left(\mu(S^*) > \tfrac{5\rho}{4}\right).$$

Лемма 1. *Если при каком-либо* $h \in [1, (2\rho)^{-1}]$ *имеем*

$$\operatorname{Re} z_k \geq T(h),$$

то при всех $x \in S^*$ *выполняется неравенство*

$$P_k(x) \geq h.$$

Лемма 2. *Если при каком-либо* $h \in [1, (2\rho)^{-1}]$ *имеем*

$$|\operatorname{Re} z_k| < T(h),$$

то при любом $0 < s < 4h/(3\rho)$ *выполняется неравенство*

$$P_k(x) < s, \qquad x \in \left[-1, -1 + \tfrac{3s\rho}{4h}\right] \cup \left[1 - \tfrac{3s\rho}{4h}, 1\right].$$

Полагаем

$$\rho = \frac{1}{(4+8\delta)n}, \qquad h_j = (2+4\delta)n^{1-\varepsilon_0-\varepsilon_1-\ldots-\varepsilon_j} \qquad (j=0,\ldots,m),$$

где $m \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_0 = 0$, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m > 0$, $\sum \varepsilon_j < 1$. Множество полюсов разбиваем на группы:

$$\{z_1, \ldots, z_n\} = I_0 \cup I_1 \cup \cdots \cup I_{m+1},$$

$$T(h_0) \le |\mathrm{Re}\, z_k| \le 1 \quad \text{для} \quad z_k \in I_0;$$

$$T(h_j) \le |\mathrm{Re}\, z_k| < T(h_{j-1}) \quad \text{для} \quad z_k \in I_j \quad (j=1,\ldots,m);$$

$$|\mathrm{Re}\, z_k| < T(h_m) \quad \text{для} \quad z_k \in I_{m+1}$$

Числа ε_j удаётся подобрать таким образом, что неравенство

$$|\mathrm{Re}(xg_n(x))| \ge \delta n$$

выполняется или на отрезке S^*,

$$\mu(S^*) > \frac{5\rho}{4} = \frac{5}{16(1+2\delta)n} > \frac{K(\delta)}{n},$$

или на объединении S^{**} двух отрезков,

$$\mu(S^{**}) > \frac{K(\delta)}{n^{1+\frac{1}{m+1}}}.$$