

МЕТРИКИ И КВАЗИМЕТРИКИ, ПОРОЖДЕННЫЕ ФУНКЦИЕЙ ПАРЫ ТОЧЕК

Вторая конференция
Математических центров России
Москва, 2022

Д.Н. Даутова

Казанский (Приволжский) Федеральный Университет

9 ноября 2022 г.

Функция пары точек $p_G(x, y)$

$$G \subset \mathbb{R}^n, \quad d_G(x) := \inf_{z \in \partial G} |x - z|,$$

$$p_G(x, y) = \frac{|x - y|}{\sqrt{|x - y|^2 + 4d_G(x)d_G(y)}}, \quad x, y \in G, \quad (1)$$

$$p_G : G \times G \rightarrow [0, 1).$$

Функция $d : G \times G \rightarrow [0, \infty)$ называется квази-метрикой, если она удовлетворяет следующим условиям:

- 1 $d(x, y) \geq 0$, и $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$,
- 2 $d(x, y) = d(y, x)$,
- 3 $d(x, y) \leq c(d(x, z) + d(z, y))$ для всех $x, y, z \in G$ с какой-то константой $c \geq 1$ независимой от точек x, y, z .

История вопроса

- 1 J. CHEN, P. HARIRI, R. KLEN AND M. VUORINEN, Lipschitz conditions, triangular ratio metric, and quasiconformal maps. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* 40 (2015), 683-709.
- 2 P. HARIRI, R. KLEN, M. VUORINEN AND X. ZHANG, Some Remarks on the Cassinian Metric. *Publ. Math. Debrecen* 90, 3-4 (2017), 269-285.
- 3 P. HARIRI, R. KLEN AND M. VUORINEN, *Conformally Invariant Metrics and Quasiconformal Mappings*. Springer, 2020.
- 4 O. RAINIO, Intrinsic quasi-metrics. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* 44, 5 (2021), 2873-2891.
- 5 O. RAINIO AND M. VUORINEN, Introducing a new intrinsic metric. *Results Math.* 77, 71 (2022), doi: 10.1007/s00025-021-01592-2.
- 6 O. RAINIO AND M. VUORINEN, Triangular ratio metric in the unit disk. *Complex Var. Elliptic Equ.* 67, 6 (2022), 1299-1325, doi: 10.1080/17476933.2020.1870452.
- 7 O. RAINIO AND M. VUORINEN, Triangular ratio metric under quasiconformal mappings in sector domains. *Comput. Methods Func. Theory* (2022), doi: 10.1007/s40315-022-00447-3.

Постановка задачи

1 Для функции пары точек

$$p_G(x, y) = \frac{|x - y|}{\sqrt{|x - y|^2 + 4d_G(x)d_G(y)}}, \quad x, y \in G$$

* Найти наилучшую постоянную c , что выполняется

$$p_G(x, y) \leq c(p_G(x, z) + p_G(z, y)), \quad (2)$$

для всех областей $G \subset \mathbb{R}^n$,

* Привести примеры областей, для которых функция $p_G(x, y)$ является метрикой,

2 Для обобщенной функции пары точек

$$p_G^\alpha(x, y) = \frac{|x - y|}{\sqrt{|x - y|^2 + \alpha d_G(x)d_G(y)}} \quad (3)$$

Привести примеры областей, для которых функция $p_G^\alpha(x, y)$ является метрикой.

Одномерный случай

Лемма 1

Пусть функция $f : [-1, 0] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ определена равенством

$$f(x, y) = \frac{y - x}{\sqrt{(y - x)^2 + 4(1 + x)(1 - y)}} \quad \text{если } x \neq y, \quad f(x, y) = 0 \quad \text{при } x = y,$$

и функция $g : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ определена равенством

$$g(x, y) = \frac{y - x}{2 - x - y} \quad \text{если } x \neq y, \quad g(x, y) = 0 \quad \text{при } x = y.$$

Тогда для любых $-1 \leq x \leq 0 \leq z \leq y \leq 1$, выполняется неравенство

$$f(x, z) + g(z, y) \geq \frac{2}{\sqrt{5}} f(x, y) \quad (4)$$

Более того, равенство в (4) достигается тогда и только тогда, когда $x = -1/3$, $z = 0$ и $y = 1/3$.

Одномерный случай

Теорема 1

Функция пары точек p_G является квази-метрикой в области $G = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$ с точной постоянной $\sqrt{5}/2$.

Следствие 1

Если $G \subsetneq \mathbb{R}$ одномерная область, тогда функция пары точек p_G является метрикой, если граница G состоит из одной точки, и квази-метрикой, если граница G состоит из двух точек. Более того, во втором случае наилучшая возможная постоянная c в неравенстве $p_G(x, y) \leq c(p_G(x, z) + p_G(z, y))$, $x, y, z \in G$ равна $\sqrt{5}/2$.

Метрика треугольного отношения

$$s_G(x, y) = \frac{|x - y|}{\inf_{z \in \partial G} (|x - z| + |z - y|)}, \quad x, y \in G.$$

Случай $n \geq 1$

Теорема 2

Функция пары точек является метрикой в $G = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ при $n \geq 1$.

Теорема 3

В каждой области $G \subsetneq \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ функция пары точек p_G является квази-метрикой с постоянной меньшей или равной $\sqrt{5}/2$.

Лемма 2

Если область $G \subsetneq \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, содержит шар $B^n(z_0, r)$ и есть две точки $u, v \in \partial G$ такие, что отрезок $[u, v]$ — это диаметр $B^n(z_0, r)$, тогда $c = \sqrt{5}/2$ — наилучшая возможная постоянная, для которой выполняется неравенство

$$p_G(x, y) \leq c(p_G(x, z) + p_G(z, y)), \quad x, y, z \in G.$$

Обобщенная функция пары точек $p_G^\alpha(x, y)$

Теорема 4

Для постоянной $\alpha > 0$ функция

$$p_{\mathbb{R}^+}^\alpha(x, y) = \frac{|x - y|}{\sqrt{(x - y)^2 + \alpha xy}}, \quad x, y > 0,$$

является метрикой тогда и только тогда, когда $\alpha \leq 12$.

Теорема 5

Для постоянной $\alpha > 0$, функция

$$p_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}^\alpha(x, y) = \frac{|x - y|}{\sqrt{|x - y|^2 + \alpha |x| |y|}}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, n \geq 2,$$

является метрикой тогда и только тогда, когда $\alpha \leq 12$.

Обобщенная функция пары точек $p_G^\alpha(x, y)$

Теорема 6

Для постоянной $\alpha > 0$ функция

$$p_{\mathbb{H}^n}^\alpha(x, y) = \frac{|x - y|}{\sqrt{|x - y|^2 + \alpha x_n y_n}}, \quad x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{H}^n, n \geq 2, \quad (5)$$

является метрикой тогда и только тогда, когда $\alpha \leq 12$.

Теорема 7

Функция

$$p_{\mathbb{B}^n}^\alpha(x, y) = \frac{|x - y|}{\sqrt{|x - y|^2 + \alpha(1 - |x|)(1 - |y|)}}, \quad x, y \in \mathbb{B}^n, n \geq 1,$$

не является метрикой для любой постоянной $\alpha > 0$.

Открытые вопросы

Предположение 1

Для постоянной $\alpha > 0$, функция

$$\rho_{\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{B}^n}^\alpha(x, y) = \frac{|x - y|}{\sqrt{|x - y|^2 + \alpha(|x| - 1)(|y| - 1)}}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\mathbb{B}^n}, \quad n \geq 2, \quad (6)$$

является метрикой тогда и только тогда, когда $\alpha \leq 12$.

Предположение 2

Функция пары точек ρ_G является метрикой в области $G = \mathbb{R}^3 \setminus Z$, где Z — это ось Oz .

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!