

Теоремы типа Пэли–Винера–Шварца для ультрараспределений. Применения.

И.Х. Мусин

ИМВЦ УФИЦ РАН (Уфа)

Вторая конференция Математических центров России,

7–11 ноября 2022 г., Москва, МГУ, МИАН

Введение

Краткая история. При исследовании ряда проблем анализа (полнота (неполнота) систем экспонент, квазианалитичность, представление функций рядами экспонент, ряды Фурье, разрешимость уравнений свертки), теории дифференциальных уравнений (разрешимость, единственность решения задачи Коши) часто возникают пространства ультрадифференцируемых функций (у.д.ф.) на различных множествах – выпуклых областях, выпуклых компактах, неограниченных замкнутых выпуклых множествах с непустой внутренностью – из $\mathbb{R}^n$ (С. Мандельбройт, А. Бёрлинг, Л. Эренпрайс, Л. Хёрмандер, Румье, Б.А. Тейлор, К. Беренштейн, Х. Коматсу, А.Ф. Леонтьев, В.В. Напалков, П.Л. Ульянов, Е.М. Дынькин, Р.С. Юлмухаметов, А.М. Гайсин, М.Д. Бронштейн, de Roeвер, Р. Майзе, Браун, J. Bonet, Ю.Ф. Коробейник, А.В. Абанин и др.).

Интерес к таким пространствам проявился более ста лет назад. В какой-то степени это связано с исследованиями проблемы о квазианалитичности классов Карлемана на интервале числовой прямой, поставленной Ж. Адамаром в 1912 г., и исследованиями Жевре (в работе 1918 года) свойств фундаментального решения уравнения теплопроводности. Схема построения этих пространств такова. Пусть M – последовательность положительных чисел $M_0 = 1, M_1, M_2, \dots$, удовлетворяющая условиям:

1. $M_k^2 \leq M_{k-1} M_{k+1}, \forall k \in \mathbb{N}$ (логарифмическая выпуклость),
2. $\exists H_1 > 1, H_2 > 1 \quad M_{k+1} \leq H_1 H_2^k M_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+$,
либо

- 2'). $\exists H_1 > 1, H_2 > 1 \quad M_{k+m} \leq H_1 H_2^{k+m} M_k M_m \quad \forall k, m \in \mathbb{Z}_+,$

3. для любого $r > 1 \quad \frac{M_k}{r^k} \rightarrow \infty,$

(последовательность M может быть квазианалитической ($\sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k}{M_{k+1}} = \infty$) и неквазианалитической ($\sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k}{M_{k+1}} < \infty$)).

Примеры последовательностей M : $(k!^s)_{k=0}^\infty$, $(\Gamma(sk+1))_{k=0}^\infty$, $((k+1)^{sk})_{k=0}^\infty$, $((k+1)^{s(k+1)\operatorname{arctg}(k+1)})_{k=0}^\infty$, где $s > 0$.

Различают пространства у.д.ф. типа Берлинга и типа Румье. Например, пространство $\mathcal{E}_M(\Omega)$ у.д.ф. типа Берлинга на выпуклой области Ω в $\mathbb{R}^n$ состоит из бесконечно дифференцируемых в Ω функций f , для которых

$$p_m(f) = \sup_{x \in K_m, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{|(D^\alpha f)(x)|}{\varepsilon_m^{|\alpha|} M_{|\alpha|}} < \infty, \forall m \in \mathbb{N},$$

где K_m – выпуклые компактные подмножества Ω , исчерпывающие Ω изнутри, $(\varepsilon_m)_{m=1}^\infty$ – убывающая последовательность положительных чисел (в большинстве случаев стремящаяся к нулю). С счётной системой норм p_m $\mathcal{E}_M(\Omega)$ – пространство Фреше. Итак, пространство $\mathcal{E}_M(\Omega)$ состоит из бесконечно дифференцируемых в Ω функций f таких, что для любого компакта $K \subset \Omega$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная $c > 0$ такая, что для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$

$$|(D^\alpha f)(x)| \leq c \varepsilon^{|\alpha|} M_{|\alpha|}, \quad x \in K.$$

Отметим, что пространство Румье состоит из бесконечно дифференцируемых в Ω функций f таких, что для любого компакта $K \subset \Omega$ $\exists$ постоянные $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ такие, что

$$|(D^\alpha f)(x)| \leq c_1 c_2^{|\alpha|} M_{|\alpha|}, \quad x \in K, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Упомянем частный случай пространств Румье – классы Жевре. Они состоят из функций $f \in C^\infty(\Omega)$ таких, что при некотором $s > 1$ $\forall K \subset \Omega$ $\exists c_3 > 0$:

$$|(D^\alpha f)(x)| \leq c_3^{|\alpha|+1} (|\alpha|!)^s, \quad x \in K, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Отметим, что если $f \in C^\infty(\Omega)$, то f является вещественно-аналитической $\iff$ когда для любого компакта $K \subset \Omega$ $\exists c_1 > 0$ и $\exists c_2 > 0$ такие, что $\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$

$$|(D^\alpha f)(x)| \leq c_1 c_2^{|\alpha|} |\alpha|!, \quad x \in K.$$

Обратим внимание, что во всех оценках на частные производные справа присутствует зависимость от $|\alpha|$.

При решении проблем вещественного и комплексного анализа, теории дифференциальных уравнений, теории линейных операторов в пространствах у.д.ф. методами функционального анализа часто оказывается полезной теорема типа Пейли-Винера-Шварца, описывающая пространство преобразований Фурье-Лапласа линейных непрерывных функционалов над этими пространствами (называемых ультрараспределениями) как некоторый класс аналитических функций с определенными мажорантами роста. Она позволяет свести изучение первоначальных проблем к исследованию задач из теории аналитических функций.

Задачей описания сильного сопряжённого пространства для пространств типа $\mathcal{E}_M(\Omega)$ в терминах преобразования Фурье-Лапласа функционалов занимались такие математики, как Л. Эренпрайс, М. Неймарк, Б.А. Тейлор, Х. Коматсу, М. Лангенбрух, Р. Майзе, Браун, А.В. Абанин и др.).

Эффективные подходы для решения этой задачи для пространств Бёрлинга и Румье в областях были предложены М. Неймарком (M. Neymark, On the Laplace transform of functionals on classes of infinitely differentiable functions, Ark. math. 7 (6) (1969), 577-594) и Б.А. Тейлором (B.A. Taylor, Analytically uniform spaces of infinitely differentiable functions, Communications on pure and applied mathematics 24 (1) (1971), 39-51). Б.А. Тейлор рассматривал случай, когда $M_k = e^{g(k)}$, где $g(x)$ – выпуклая функция на неотрицательной полуоси такая, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty$ (B.A. Taylor, Analytically uniform spaces of infinitely differentiable functions, *Communications on pure and applied mathematics*, **24**:1 (1971), 39-51). У М. Неймарка вместо $M_{|\alpha|}$ стоит L_α , где $\ln L_\alpha$ – след на $\mathbb{Z}_+^n$ выпуклой в $\mathbb{R}^n$ функции (Neymark M. On the Laplace transform of functionals on classes of infinitely differentiable functions. Ark. math. 1969. V. 7, N 6. P. 577-594.). При этом предполагалось, что $L_{\alpha+\beta} \leq b^{|\alpha|} L_\alpha$, где $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ с $|\beta| = 1$, $b > 0$.

1. О первой задаче. Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная выпуклая область, $K = \bar{G}$, $C^\infty(K)$ – пространство функций f класса C^∞ на K с топологией, задаваемой семейством норм

$$\|f\|_{K,m} = \sup_{x \in G, |\alpha| \leq m} |(D^\alpha f)(x)| \quad (m = 0, 1, \dots).$$

Пусть $\mathcal{H} = \{h_m\}_{m=1}^\infty$ – семейство выпуклых функций $h_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ с $h_m(0) = 0$ таких, что для любого $m \in \mathbb{N}$:

$$i_1). \quad h_m(x) = h_m(|x_1|, \dots, |x_n|), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n;$$

$$i_2). \quad \exists a_m > 0: h_m(x) \geq \|x\| \ln(1 + \|x\|) - a_m \|x\| - a_m, \quad x \in \mathbb{R}^n;$$

$$i_3). \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (h_m(x) - h_{m+1}(x)) = +\infty;$$

$$i_4). \quad \sup_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} (h_{m+1}(\alpha + \beta) - h_m(\alpha)) < \infty \quad \forall \beta \in \mathbb{Z}_+^n \text{ с } |\beta| = 1;$$

$$i_5). \quad \forall k \in \mathbb{N} \exists l = l(m, k) \in \mathbb{N}: \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} e^{h_{m+l}(\alpha + k\gamma) - h_m(\alpha)} < \infty, \text{ где}$$

$$\gamma = (1, \dots, 1).$$

Замечание 1. В силу выпуклости и раздельной радиальности функции h_m неотрицательны, а их сужения $h_m|_{[0, \infty)^n}$ не убывают по каждой переменной.

Определим пространство $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}(K)$ следующим образом. Пусть $\mathcal{E}_m(K)$ – пространство, состоящее из функций f класса C^∞ на K , для которых

$$p_m(f) = \sup_{x \in G, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{|(D^\alpha f)(x)|}{e^{h_m(\alpha)}} < \infty, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Т.о., выражения вида $\varepsilon^{|\alpha|} M_{|\alpha|}$ и им подобные заменяем на $e^{h_m(\alpha)}$. При этом мы перестаём быть зависимыми от $|\alpha|$.

В силу условия i_3) пространство $\mathcal{E}_{m+1}(K)$ непрерывно вложено в $\mathcal{E}_m(K)$ для каждого $m \in \mathbb{N}$. Можно показать, что $\mathcal{E}_{m+1}(K)$ – собственное подпространство пространства $\mathcal{E}_m(K)$. Положим

$$\mathcal{E}_{\mathcal{H}}(K) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \mathcal{E}_m(K).$$

Наделим линейное пространство $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}(K)$ топологией проективного предела пространств $\mathcal{E}_m(K)$.

Очевидно, $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}(K)$ – пространство Фреше, непрерывно вложенное в $C^\infty(K)$. Ввиду условия i_4) пространство $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}(K)$ инвариантно относительно дифференцирования.

Напомним, что пространство, представимое в виде проективного предела последовательности нормированных пространств S_n ($n \in \mathbb{N}$) относительно линейных непрерывных отображений $g_{mn} : S_n \rightarrow S_m$ ($m < n$) таких, что $g_{n,n+1}$ вполне непрерывно для каждого n , называется пространством (M^*) . Пользуясь теоремой Арцела-Асколи и тем, что $h_m(x) - h_{m+1}(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow \infty$ (по условию i_3)), можно показать, что $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}(K)$ – пространство (M^*) . Таким образом, $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}(K)$ является пространством Фреше-Шварца.

Отметим, что $\forall z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ функция $f_z : \xi \in K \rightarrow e^{-i\langle \xi, z \rangle}$ принадлежит $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}(K)$, так как $\forall m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} p_m(f_z) &= \sup_{\xi \in G, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{|(iz)^\alpha e^{-i\langle \xi, z \rangle}|}{e^{h_m(\alpha)}} = \sup_{\xi \in G} e^{\langle \xi, \operatorname{Im} z \rangle} \sup_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{|z^\alpha|}{e^{h_m(\alpha)}} \leq \\ &\leq e^{\sup_{\xi \in G} \langle x, \xi \rangle + \sup_{t \in \mathbb{R}^n} (t_1 \ln^+ |z_1| + \dots + t_n \ln^+ |z_n| - h_m(t))}. \end{aligned}$$

Пусть $H_K(x) := \max_{\xi \in K} \langle x, \xi \rangle$ ($x \in \mathbb{R}^n$) – опорная функция

выпуклого компакта K , $\varphi_m(z) := h_m^*(\ln^+ |z_1|, \dots, \ln^+ |z_n|)$, где $h_m^*(x) = \sup_{t \in \mathbb{R}^n} (\langle t, x \rangle - h_m(t))$, $x \in \mathbb{R}^n$, и, как обычно, $\ln^+ t = \ln t$

для $t \geq 1$, $\ln^+ t = 0$ для $0 \leq t < 1$. В этих обозначениях предыдущее неравенство запишется так:

$$p_m(f_z) \leq e^{H_K(\operatorname{Im} z) + \varphi_m(z)}, \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

Итак, $\forall z \in \mathbb{C}^n$ функция $f_z : \xi \in K \rightarrow e^{-i\langle \xi, z \rangle}$ в $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}(K)$. Поэтому для любого линейного непрерывного функционала Φ на $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}(K)$ в $\mathbb{C}^n$ корректно определена функция $\hat{\Phi}$ – преобразование Фурье-Лапласа функционала Φ : $\hat{\Phi}(z) = \Phi(e^{-i\langle \xi, z \rangle})$, $z \in \mathbb{C}^n$. Отметим, что $\hat{S} \in H(\mathbb{C}^n)$. И так как найдутся числа $m \in \mathbb{N}$ и $c > 0$ такие, что $|S(f)| \leq c\rho_m(f)$ для любого $f \in \mathcal{E}_{\mathcal{H}}(K)$, то отсюда и из предыдущего неравенства получаем

$$|\hat{S}(z)| \leq ce^{H_K(\operatorname{Im} z) + \varphi_m(z)}.$$

Задача. Описать сильное сопряжённое пространство $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}^*(K)$ в терминах преобразования Фурье-Лапласа функционалов.

Эта задача рассматривалась М. Лангенбрухом (M. Langenbruch, Extension of ultradifferentiable functions, Manuscripta Math. 83 (1994), 123-143) в случае, когда семейство $\mathcal{H}$ состоит из

функций $h_m : x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \rightarrow h(\sum_{j=1}^n |x_j| - m)$, если

$\sum_{j=1}^n |x_j| > m$; $h_m(x) = 0$, если $\sum_{j=1}^n |x_j| \leq m$ ($m \in \mathbb{N}$), где

$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ – выпуклая функция с $h(0) = 0$ такая, что:

1). $h(t) = h(|t|)$; 2). $\exists a > 0 \quad \forall t \geq 0 \quad h(t) \geq t \ln(t+1) - at - a$. 

Выполнение условий $i_1) - i_4)$ в этой конкретной ситуации легко проверяется. Покажем, что условие $i_5)$ также выполнено.

Образуем логарифмически выпуклую последовательность $(M_s)_{s=0}^\infty$, полагая $M_s = e^{h(s)}$. Про неё известно, что для любых натуральных $p \geq n + 1$ ряд $\sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{M_{|\alpha|}}{M_{|\alpha|+p}}$ сходится. Отметим, что

в нашем случае для любых $k, m, l \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ с $|\alpha| \geq m + l$ и $\beta = (1, \dots, 1) \in \mathbb{Z}_+^n$

$$\begin{aligned} \exp(h_{m+l}(\alpha + k\beta) - h_m(\alpha)) &= \exp(h(|\alpha| + kn - m - l) - h(|\alpha| - m)) = \\ &= \frac{M_{|\alpha| + kn - m - l}}{M_{|\alpha| - m}}. \end{aligned}$$

Выберем теперь l так, что $l \geq kn + n + 1$. Тогда, с учётом вышесказанного, ряд

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \exp(h_{m+l}(\alpha + k\beta) - h_m(\alpha))$$

будет сходиться.

Ещё один пример пространства $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}(K)$ получим в случае, когда семейство $\mathcal{H}$ состоит из функций h_m вида:

$$h_m(x) = \ln(\sigma + \varepsilon_m) \sum_{j=1}^n |x_j| + h\left(\sum_{j=1}^n |x_j|\right), \text{ где } \sigma > 0, h - \text{из}$$

вышеприведённого примера с дополнительным условием:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x+1) - h(x)}{x} = 0, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon_m = 0. \text{ Если обозначить } e^{h(k)}$$

через M_k , то получим, что пространство $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}(K)$ состоит из функций $f \in C^\infty(K)$ таких, что для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная $c_\varepsilon > 0$ такая, что

$$|(D^\alpha f)(x)| \leq c_\varepsilon (\sigma + \varepsilon)^{|\alpha|} M_{|\alpha|}, \quad x \in K, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n.$$

При $n = 1$ и $M_k = k^{\rho k}$ с $\rho \geq 1$ для $k \in \mathbb{N}$, $M_0 = 1$ такое пространство рассматривалось В.В. Напалковым и И.А. Рудаковым. Условия $i_1) - i_5)$ в этом случае также выполнены. При этом при проверке условия $i_5)$ можно полагать $l = 1$.

Введем нормированные пространства

$$P_{K,m}(\mathbb{C}^n) = \{f \in H(\mathbb{C}^n) : \|f\|_m = \sup_{z \in \mathbb{C}^n} \frac{|f(z)|}{e^{H_K(lm z) + \varphi_m(z)}} < \infty\}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Так как, в частности, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h_m(x)}{\|x\|} = +\infty$, то h_m^* принимает конечные значения в $\mathbb{R}^n$. Кроме того, она является выпуклой в $\mathbb{R}^n$. Следовательно, функция h_m^* непрерывна в $\mathbb{R}^n$. Отсюда и по определению φ_m – непрерывная psh функция в $\mathbb{C}^n$. В силу i_2) $\exists A_m > 0$ и $B_m > 0$ такие, что $\varphi_m(z) \leq A_m \|z\| + B_m$, $z \in \mathbb{C}^n$.

Пользуясь i_3) и тем, что для любого $\nu \in \mathbb{N}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h_\nu(x)}{\|x\|} = +\infty$

можно показать, что $\lim_{x \rightarrow \infty} (h_{m+1}^*(x) - h_m^*(x)) = +\infty$. Значит,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\varphi_{m+1}(z) - \varphi_m(z)) = +\infty. \quad (1)$$

Отметим, что благодаря условию i_5) на $\mathcal{H}$) можно показать, что для любого $m \in \mathbb{N}$

$$\varphi_{m+n}(z) \geq \varphi_m(z) + \sum_{j=1}^n \ln(1 + |z_j|) - l_m, \quad z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n,$$

Благодаря (1) пространство $P_{K,m}(\mathbb{C}^n)$ непрерывно вложено в $P_{K,m+1}(\mathbb{C}^n)$. Пусть $P_{K,\mathcal{H}}(\mathbb{C}^n) = \bigcup_{m=0}^{\infty} P_{K,m}(\mathbb{C}^n)$. Наделим линейное пространство $P_{K,\mathcal{H}}(\mathbb{C}^n)$ топологией индуктивного предела пространств $P_{K,m}(\mathbb{C}^n)$. Стандартные рассуждения с применением теоремы Монтея убеждают, что для каждого $m \in \mathbb{N}$ вложения $j_m : P_{K,m}(\mathbb{C}^n) \rightarrow P_{K,m+1}(\mathbb{C}^n)$ вполне непрерывны. Это означает, что $P_{K,\mathcal{H}}(\mathbb{C}^n)$ – пространство (LN^*) или, придерживаясь более современной терминологии, – пространство DFS .

Первый основной результат – следующая теорема.

Теорема 1

Преобразование Фурье-Лапласа устанавливает изоморфизм пространств $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}^(K)$ и $P_{K,\mathcal{H}}(\mathbb{C}^n)$.*

При доказательстве Теоремы 1 по существу используются следующие три результата.

Первый результат – это теорема Пейли-Винера-Шварца для пространства $C^\infty(K)$. Она применяется в Теореме 1 при доказательстве биективности преобразования Фурье-Лапласа. Для каждого $N \in \mathbb{N}$ пусть

$$P_N(K) = \{F \in H(\mathbb{C}^n) : q_N(F) = \sup_{z \in \mathbb{C}^n} \frac{|f(z)|}{(1 + \|z\|)^N e^{H_K(\operatorname{Im} z)}} < \infty\}.$$

Образуем индуктивный предел P_K пространств $P_N(K)$.

Теорема А

Преобразование Фурье-Лапласа устанавливает изоморфизм между $(C^\infty(K))^$ и P_K .*

При доказательстве сюръективности преобразования Фурье-Лапласа в Теореме 1 применяется следующая теорема.

Теорема В

Пусть $\mathcal{O}$ – область голоморфности в $\mathbb{C}^n$. Пусть $h \in psh(\mathcal{O})$, $\varphi \in psh(\mathbb{C}^n)$, причём при некоторых $c_\varphi > 0$ и $\nu > 0$

$$|\varphi(z) - \varphi(t)| \leq c_\varphi \quad \text{если} \quad \|z - t\| \leq \frac{1}{(1 + \|t\|)^\nu}.$$

Пусть $f \in H(\mathcal{O})$ и $\int_{\mathcal{O}} |f(\zeta)|^2 e^{-2(\varphi(\zeta) + h(\zeta))} d\lambda_n(\zeta) < \infty$. Тогда $\exists F \in H(\mathbb{C}^n \times \mathcal{O})$ такая, что $F(\zeta, \zeta) = f(\zeta)$ for $\zeta \in \mathcal{O}$ и

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C}^n \times \mathcal{O}} \frac{|F(z, \zeta)|^2 e^{-2(\varphi(z) + h(\zeta))}}{(1 + \|(z, \zeta)\|)^{2n(\nu+3)}} d\lambda_{2n}(z, \zeta) \leq \\ \leq C \int_{\mathcal{O}} |f(\zeta)|^2 e^{-2(\varphi(\zeta) + h(\zeta))} d\lambda_n(\zeta), \end{aligned}$$

где положительная постоянная C зависит только от n, ν и φ .

При доказательстве инъективности преобразования Фурье-Лапласа используется следующий результат.

Теорема С

Пусть $\mathcal{O}$ – область голоморфности в $\mathbb{C}^n$. Пусть $h \in psh(\mathcal{O})$, $\varphi \in psh(\mathbb{C}^n)$, причём при некоторых $c_\varphi > 0$ и $\nu > 0$

$$|\varphi(z) - \varphi(t)| \leq c_\varphi \quad \text{если} \quad \|z - t\| \leq \frac{1}{(1 + \|t\|)^\nu}.$$

Пусть функция $S \in H(\mathbb{C}^n \times \mathcal{O})$ удовлетворяет неравенству $|S(z, \zeta)| \leq e^{\varphi(z) + h(\zeta)}$, $z \in \mathbb{C}^n, \zeta \in \mathcal{O}$, и $S(\zeta, \zeta) = 0$ для $\zeta \in \mathcal{O}$. Тогда существуют функции $S_1, \dots, S_n \in H(\mathbb{C}^n \times \mathcal{O})$ такие, что:

a)
$$S(z, \zeta) = \sum_{j=1}^n S_j(z, \zeta)(z_j - \zeta_j), \quad (z, \zeta) \in \mathbb{C}^n \times \mathcal{O};$$

b) при некотором $m \in \mathbb{N}$, не зависящем от S ,

$$\int_{\mathbb{C}^n \times \mathcal{O}} \frac{|S_j(z, \zeta)|^2}{e^{2(\varphi(z) + h(\zeta) + m \ln(1 + \|(z, \zeta)\|))}} d\lambda_{2n}(z, \zeta) < \infty, \quad j = 1, \dots, n.$$

2. О второй задаче.

В 70-х годах в связи с потребностями математической физики и продолжая исследования В.С. Владимирова по обобщённым функциям медленного роста с носителями в неограниченных замкнутых выпуклых множествах в $\mathbb{R}^n$, ограниченных со стороны выпуклого острого конуса, Роевер изучал весовые пространства быстро убывающих гладких функций на замкнутых выпуклых неограниченных множествах в $\mathbb{R}^n$ с непустой внутренностью с определёнными оценками на все частные производные на всём этом множестве. В силу определения топологии в этих пространствах носители линейных непрерывных функционалов над ними (также называемых ультрараспределениями) могут быть некомпактными. Для этих пространств им было получено описание преобразований Фурье-Лапласа функционалов над этими пространствами в виде (DFS)-пространств голоморфных функций в некоторой трубчатой области полиномиального роста вблизи границы области и с определёнными оценками роста на бесконечности.

Пусть C – открытый выпуклый острый конус в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в начале, b – выпуклая непрерывная положительно однородная степени 1 функция на $\overline{C}$. Пара (b, C) определяет замкнутое выпуклое неограниченное множество

$$U = \{\xi \in \mathbb{R}^n : -\langle \xi, y \rangle \leq b(y), \forall y \in C\},$$

не содержащее целую прямую. Внутренность U непуста и совпадает с множеством

$$V = \{\xi \in \mathbb{R}^n : -\langle \xi, y \rangle < b(y), \forall y \in \overline{C}\}$$

а замыкание V есть множество U .

Отметим, что если $a \geq 0$ и $b(y) = a\|y\|$ для $y \in \overline{C}$, то $U(b, C) = C^* + B_a$, где $C^* = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \langle \xi, y \rangle \geq 0, \forall y \in C\}$ – сопряжённый конус, B_a – шар радиуса a с центром в нуле.

Пусть $M = (M_k)_{k=0}^{\infty}$ – последовательность положительных чисел M_k такая, что $M_0 = 1$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln M_k}{k} = +\infty$.

Обозначая для краткости $U(b, C)$ через U , а $V(b, C)$ – через V , определим пространство $G_M(U)$ бесконечно дифференцируемых функций f на U следующим образом.

Для произвольных $m \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ пусть $G_{m,\varepsilon}(U)$ – пространство $C^\infty(U)$ -функций f с конечной нормой

$$p_{m,\varepsilon}(f) = \sup_{x \in V, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{|(D^\alpha f)(x)|(1 + \|x\|)^m}{\varepsilon^{|\alpha|} M_{|\alpha|}}. \quad (2)$$

Пусть $G_M(U) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcap_{\varepsilon>0} G_{m,\varepsilon}(U)$. Семейство норм $p_{m,\varepsilon}$

определяет локально выпуклую топологию в $G_M(U)$.

Так как для $y \in C$ и $m \in \mathbb{N}$ $\sup_{\xi \in U} (-\langle \xi, y \rangle + m \ln(1 + \|\xi\|)) < \infty$ и

$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln M_k}{k} = +\infty$, то для любого $z \in \mathbb{R}^n + iC$ функция

$f_z(\xi) = e^{i\langle \xi, z \rangle}$ принадлежит $G_M(U)$. Поэтому для любого линейного непрерывного функционала Φ на $G_M(U)$ функция

$$\hat{\Phi}(z) = (\Phi, e^{i\langle \xi, z \rangle})$$

корректно определена в $T_C = \mathbb{R}^n + iC$. Будем называть её преобразованием Фурье-Лапласа функционала Φ .

Роевер (De Roever J.W., Complex Fourier transformation and analytic functionals with unbounded carriers, 1977) описал образ $G_M^*(U)$ с помощью преобразования Фурье-Лапласа функционалов на $G_M(U)$ предполагая, что:

- 1). $M_k^2 \leq M_{k-1}M_{k+1}, \quad \forall k \in \mathbb{N};$
- 2). $\exists H_1 > 1 \exists H_2 > 1 \quad \forall k, m \in \mathbb{Z}_+ \quad M_{k+m} \leq H_1 H_2^{k+m} M_k M_m;$
- 3). $\exists A > 0 \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{M_{k-1}}{M_k} \leq A m \frac{M_m}{M_{m+1}}.$

как некоторое весовое пространство функций, голоморфных в $T_C = \mathbb{R}^n + iC$. Отметим, что в его случае последовательность M является неквазианалитической и из условий 1) и 3) следует, что $h_1, h_2 > 0$ такие, что $M_k \geq h_1 h_2^k k! \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+.$

В (И.Х. Мусин, П.В. Федотова, Матем. заметки, 85:6 (2009), 894–914) описание сопряжённого для $G_M(U)$ в терминах преобразования Фурье-Лапласа функционалов было получено при меньших ограничениях на M . А именно, условия 2) и 3) были заменены следующими:

- 2)'. $\exists H_1 > 1 \exists H_2 > 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+ \quad M_{k+1} \leq H_1 H_2^k M_k;$
- 3)'. $\exists Q_1 > 0 \exists Q_2 > 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+ \quad M_k \geq Q_1 Q_2^k k!.$

Пусть $\mathcal{H} = \{h_m\}_{m=1}^{\infty}$ – рассматривавшееся выше семейство выпуклых функций. $\forall m \in \mathbb{N}$ определим пространство $\mathcal{E}_m(U)$ $C^\infty(U)$ -функций f , для которых

$$p_m(f) = \sup_{x \in V, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{|(D^\alpha f)(x)|(1 + \|x\|)^m}{e^{h_m(\alpha)}} < \infty.$$

Пусть $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}(U) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \mathcal{E}_m(U)$. Наделим $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}(U)$ топологией проективного предела пространств $\mathcal{E}_m(U)$.

Пусть $A_{b,\mathcal{H}}(T_C)$ индуктивный предел пространств

$$A_{b,m}(T_C) = \left\{ f \in H(T_C) : \|f\|_m = \sup_{z \in T_C} \frac{|f(z)|}{e^{b(lm z) + \varphi_m(z)} \left(1 + \frac{1}{d(z)}\right)^m} < \infty \right\}$$

Здесь $H(T_C)$ – пространство голоморфных функций в трубчатой области $T_C = \mathbb{R}^n + iC$, $d(z)$ – расстояние от точки $z \in T_C$ до границы T_C .

Через $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}^*(U)$ обозначим сильное сопряженное для пространства $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}(U)$.

Теорема 2

Отображение $L : \Phi \in \mathcal{E}_{\mathcal{H}}^*(U) \rightarrow \hat{\Phi}$ устанавливает изоморфизм между $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}^*(U)$ и $A_{b,\mathcal{H}}(T_C)$.

При доказательстве Теоремы 2 важную роль играют Теорема В, Теорема С и следующие факты.

1. **Общий вид л.н.ф. на $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}(U)$.** Для каждого $m \in \mathbb{N}$ введём пространство

$$C_m(U) = \{f \in C(U) : \tilde{p}_m(f) = \sup_{x \in U} |f(x)|(1 + \|x\|)^m < \infty\}.$$

Пусть $C'_m(U)$ – пространство л.н.ф. над $C_m(U)$.

Предложение 1

Пусть $T \in \mathcal{E}'_{\mathcal{H}}(U)$ и числа $c > 0$, $m \in \mathbb{N}$ таковы, что

$$|T(f)| \leq c p_m(f), \quad f \in \mathcal{E}_{\mathcal{H}}(U).$$

Тогда $\exists$ функционалы $T_{\alpha} \in C'_m(U)$ ($\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$) такие, что

$$|T_{\alpha}(f)| \leq \frac{c \tilde{p}_m(f)}{e^{h_m(\alpha)}}, \quad f \in C_m(U), \quad (3)$$

$$\text{и } T(f) = \sum_{|\alpha| \geq 0} T_{\alpha}(D^{\alpha} f), \quad f \in \mathcal{E}_{\mathcal{H}}(U).$$

2. Теорема типа Пейли-Винера-Шварца для пространства Шварца $S(U)$ $C^\infty(U)$ -функций f таких, что $\forall p \in \mathbb{Z}_+$

$$\|f\|_{p,U} = \sup_{x \in V, |\alpha| \leq p} |(D^\alpha f)(x)|(1 + \|x\|)^p < \infty. \quad (4)$$

Для её формулировки определим пространство $V_b(T_C)$ как индуктивный предел пространств

$$V_{b,m}(T_C) = \left\{ f \in A(T_C) : N_m(f) = \sup_{z \in T_C} \frac{|f(z)|e^{-b(\operatorname{Im} z)}}{(1 + \|z\|)^m(1 + \frac{1}{\Delta(z)})^m} < \infty \right\}$$

Теорема 3

Отображение $\mathcal{F} : \Phi \in S^*(U) \rightarrow \hat{\Phi}$ устанавливает изоморфизм между пространствами $S^*(U)$ и $V_b(T_C)$.

Для $b(y) = a\|y\|$ ($a \geq 0$) Теорема 3 получена В.С. Владимировым.

При переходе от интегральных оценок к равномерным важно

Предложение 2

Пусть $z, \zeta \in \mathbb{C}^n$ таковы, что

$$\|\zeta - z\| \leq \frac{1}{(1 + \|z\|)^n}.$$

Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$

$$|\varphi_m(\zeta) - \varphi_m(z)| \leq 2ne^{2a_m+2n}.$$

О зазоре между весовыми функциями говорит

Предложение 3

Для любого $m \in \mathbb{N}$ найдётся постоянная $l_m > 0$ такая, что

$$\varphi_{m+n}(z) \geq \varphi_m(z) + \sum_{j=1}^n \ln^+ |z_j| - l_m, \quad z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Немного о доказательстве Теоремы 2. Прежде всего отметим, что если $z = x + iy \in T_C$ ($x \in \mathbb{R}^n, y \in C$), то функция $f_z(\xi) = e^{i\langle \xi, z \rangle} \in \mathcal{E}_{\mathcal{H}}(U)$. Действительно, $\forall m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} p_m(f_z) &= \sup_{\xi \in V, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{|(iz)^\alpha e^{i\langle \xi, z \rangle}| (1 + \|\xi\|)^m}{e^{h_m(\alpha)}} = \\ &= \sup_{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{|z_1|^{\alpha_1} \dots |z_n|^{\alpha_n}}{e^{h_m(\alpha)}} \sup_{\xi \in V} \exp(-\langle \xi, y \rangle + m \ln(1 + \|\xi\|)) \leq \\ &\leq e^{\sup_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} (\alpha_1 \ln^+ |z_1| + \dots + \alpha_n \ln^+ |z_n| - h_m(\alpha)) + \sup_{\xi \in V} (-\langle \xi, y \rangle + m \ln(1 + \|\xi\|))}. \end{aligned}$$

Известно (И.Х. Мусин, П.В. Федотова, Матем. заметки, 85:6 (2009)), что $\exists d > 0$, не зависящее от $y \in C$ такое, что

$$\sup_{\xi \in V} (-\langle \xi, y \rangle + m \ln(1 + \|\xi\|)) \leq b(y) + m(d + 3 \ln(1 + \frac{1}{\Delta_C(y)})) + 2 \ln(1 + \|y\|) \quad (5)$$

Отсюда и из Предложения 3 получим, что

$$p_m(f_z) \leq A e^{b(y) + \varphi_{m(2n+1)}(z)} \left(1 + \frac{1}{\Delta_C(y)}\right)^{3m}, \quad (6)$$

где постоянная $A > 0$ не зависит от $z \in T_C$.

Таким образом, $f_z \in \mathcal{E}_{\mathcal{H}}(U)$ и если $S \in \mathcal{E}'_{\mathcal{H}}(U)$, то функция $\hat{S}(z) = S(e^{i\langle \xi, z \rangle})$ корректно определена на T_C . Показывается, что $\hat{S} \in A(T_C)$. Из (7) легко следует, что линейное отображение $L : S \in \mathcal{E}^*_{\mathcal{H}}(U) \rightarrow \hat{S}$ действует из $\mathcal{E}^*_{\mathcal{H}}(U)$ в $A_{b,\mathcal{H}}(T_C)$. Оно будет непрерывным.

Покажем, что L сюръективно. Пусть $F \in A_{b,\mathcal{H}}(T_C)$. Тогда $F \in A_{b,m}(T_C)$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Таким образом,

$$\int_{T_C} \frac{|F(\zeta)|^2 e^{-2(b(\operatorname{Im} \zeta) + \varphi_m(\zeta) + m \ln(1 + \frac{1}{d(\zeta)}))}}{(1 + \|\zeta\|)^{2n+1}} d\lambda_n(\zeta) < \infty. \quad (7)$$

С учётом Предложения 3

$$\int_{T_C} |F(\zeta)|^2 e^{-2(b(\operatorname{Im} \zeta) + \varphi_{m+n(n+1)}(\zeta) + m \ln(1 + \frac{1}{d(\zeta)}))} d\lambda_n(\zeta) < \infty. \quad (8)$$

Плюрисубгармоническая в $\mathbb{C}^n$ функция $\varphi_{m+n(n+1)}$ удовлетворяет условиям Теоремы В с $\nu = n$. Кроме того, функция $b(\operatorname{Im} \zeta) + m \ln(1 + \frac{1}{d(\zeta)})$ плюрисубгармонична в T_C .

Тогда по Теореме В можно найти функцию $\Phi \in A(\mathbb{C}^n \times T_C)$ такую, что $\Phi(\zeta, \zeta) = F(\zeta)$ для $\zeta \in T_C$ и при некотором $c > 0$ (не зависящем от F)

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{C}^n \times T_C} \frac{|\Phi(z, \zeta)|^2 e^{-2(\varphi_{m+n(n+1)}(z) + b(\operatorname{Im} \zeta) + m \ln(1 + \frac{1}{d(\zeta)})}}{(1 + \|(z, \zeta)\|)^{2n(n+3)}} d\lambda_{2n}(z, \zeta) \leq \\ & \leq c \int_{T_C} |F(\zeta)|^2 e^{-2(b(\operatorname{Im} \zeta) + \varphi_{m+n(n+1)}(\zeta) + m \ln(1 + \frac{1}{d(\zeta)}))} d\lambda_n(\zeta). \quad (9) \end{aligned}$$

Отсюда, пользуясь Предложениями 2 и 3 и тем, что для любого открытого выпуклого конуса Γ в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в начале и произвольной непрерывной выпуклой положительно однородной степени 1 функции на $\bar{\Gamma}$ для любого $\varepsilon > 0$ можно найти постоянную $A_\varepsilon > 0$ такую, что для любых $y_1, y_2 \in \Gamma$: $\|y_2 - y_1\| \leq 1$ справедливо неравенство

$$|v(y_2) - v(y_1)| \leq \varepsilon \|y_1\| + \varepsilon \|y_2\| + A_\varepsilon,$$

получим, что при некотором $\nu > 0$ каково бы ни было $\varepsilon > 0$ найдётся число $c_1 > 0$, зависящее от ε , что

$$|\Phi(z, \zeta)| \leq c_1 e^{\varphi_{m+\nu}(z) + b_\varepsilon(\operatorname{Im} \zeta)} (1 + \|\zeta\|)^{n(n+3)} \left(1 + \frac{1}{d(\zeta)}\right)^{m+2n}, \quad (10)$$

где $b_\varepsilon(y) = b(y) + \varepsilon\|y\|$, $y \in C$.

Так как $\Phi(z, \zeta)$ – целая функция по z , то

$$\Phi(z, \zeta) = \sum_{|\alpha| \geq 0} C_\alpha(\zeta) z^\alpha, \quad \zeta \in T_C, \quad z \in \mathbb{C}^n, \quad \text{где } C_\alpha \in A(T_C).$$

Показывается, что для любых $\varepsilon > 0$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $\zeta \in T_C$

$$|C_\alpha(\zeta)| \leq \frac{c_1 e^{b_\varepsilon(\operatorname{Im} \zeta)} (1 + \|\zeta\|)^{n(n+3)} \left(1 + \frac{1}{d(\zeta)}\right)^{m+2n}}{e^{h_{m+\nu}(\alpha)}}. \quad (11)$$

Далее, для каждого $\varepsilon > 0$ определим пространство $V_{b_\varepsilon}(T_C)$ как индуктивный предел пространств

$$V_{b_\varepsilon, m}(T_C) = \left\{ f \in A(T_C) : N_{k, \varepsilon}(f) = \sup_{z \in T_C} \frac{|f(z)| e^{-b_\varepsilon(y)}}{(1 + \|z\|)^k (1 + \frac{1}{\Delta_C(y)})^k} < \infty \right.$$

где $k \in \mathbb{Z}_+$, $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in C$. Ввиду (12) для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ функция C_α принадлежит проективному пределу $A_b(T_C)$ пространств $V_{b_\varepsilon}(T_C)$. По тому же неравенству множество $\{e^{h_{m+\nu}(\alpha)} C_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n}$ ограничено в каждом $V_{b_\varepsilon}(T_C)$.

Следовательно, оно ограничено в $A_b(T_C)$. Но пространство $A_b(T_C)$ совпадает с пространством $V_b(T_C)$ (Theorem D в Musin, Il'dar Kh., Yakovleva, Polina V., Central European Journal of Mathematics. 10(2), (2012)). Значит, множество $\{e^{h_{m+\nu}(\alpha)} C_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n}$ ограничено в $V_b(T_C)$. По Теореме 2 пространства $S^*(U)$ и $V_b(T_C)$ изоморфны.

Поэтому найдутся функционалы $S_\alpha \in S^*(U)$: $\hat{S}_\alpha = C_\alpha$. В силу изоморфизма множество $\mathcal{A} = \{e^{h_{m+\nu}(\alpha)} S_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n}$ ограничено в $S^*(U)$. По теореме Шварца (В.С. Владимиров. Обобщённые функции в математической физике) найдутся числа $c_3 > 0$ и $p \in \mathbb{N}$ такие, что

$$|F(f)| \leq c_3 \|f\|_{p,U}, \quad F \in \mathcal{A}, \quad f \in S(U).$$

Таким образом,

$$|S_\alpha(f)| \leq \frac{c_3}{e^{h_{m+\nu}(\alpha)}} \|f\|_{p,U}, \quad f \in S(U), \alpha \in \mathbb{Z}_+^n. \quad (12)$$

Определим функционал T на $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}(U)$ по правилу:

$$T(f) = \sum_{|\alpha| \geq 0} S_\alpha((-i)^{|\alpha|} D^\alpha f), \quad f \in \mathcal{E}_{\mathcal{H}}(U). \quad (13)$$

Показывается, что $T \in \mathcal{E}'_{\mathcal{H}}(U)$ и $\hat{T} = F$. Таким образом, L сюръективно.

Простейшие примеры семейства $\mathcal{H}$.

(a). Пусть $p, q > 1$. Пусть $(a_{j,m})_{m=1}^{\infty}$ – строго убывающая последовательность положительных чисел для каждого $j \in \{1, \dots, n\}$, $(a_{0,m})_{m=1}^{\infty}$ – строго убывающая последовательность положительных чисел или нулевая последовательность. Тогда семейство функций

$$h_m : x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \rightarrow a_{0,m} \left(\sum_{j=1}^n |x_j| \right)^p + \sum_{j=1}^n a_{j,m} |x_j|^q \quad (14)$$

удовлетворяет условиям $i_1) - i_5)$.

(b). также удовлетворяет условиям $i_1) - i_5)$ семейство функций

$$h_m : x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \rightarrow \left(\sum_{j=1}^n |x_j| \right)^{1+\frac{1}{m}} + \sum_{j=1}^n |x_j|^{1+\frac{1}{m}}.$$