

Необходимые и достаточные условия продолжимости функции до функции Неванлинны

В.И. Буслаев

Математический институт им. В.А.Стеклова РАН

Вторая конференция Математических центров России

7–11 ноября 2022 г., МГУ, МИАН, г. Москва

Проблема Неванлинны–Пика

Пусть Ω и Φ – две односвязные области, и пусть $\{e_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{L}}$ и $\{h_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{L}}$ – множества точек, лежащих в Ω и $\overline{\Phi}$ соответственно.

Требуется найти необходимые и достаточные условия существования функции f , голоморфной в Ω , принимающей значения в $\overline{\Phi}$ и такой, что

$$f(e_\alpha) = h_\alpha, \quad \alpha \in \mathcal{L}$$

.

При помощи теоремы Римана интерполяционную проблему можно свести к случаю, в котором области Ω и Υ совпадают с наперед заданными областями Ω^* и Υ^* .

$$\mathfrak{B}^{\Omega, \Phi} := \{F(z) \in H(\Omega) : F(\Omega) \subset \overline{\Phi}\}$$

В наиболее интересных случаях области Ω и Φ являются либо **кругами**, либо **полуплоскостями**

$$\mathbb{D} := \{z : |z| < 1\}, \quad \mathbb{K} := \{z : \operatorname{Re} z > 0\}, \quad \mathbb{H} := \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$$

$\mathfrak{B}^{\mathbb{C}} := \mathfrak{B}^{\mathbb{D}, \mathbb{K}}$ – множество функций Каратеодори

$\mathfrak{B}^{\mathbb{S}} := \mathfrak{B}^{\mathbb{D}, \mathbb{D}}$ – множество функций Шура

$\mathfrak{B}^{\mathbb{N}} := \mathfrak{B}^{\mathbb{H}, \mathbb{H}}$ – множество функций Неванлинны

Интегральное представление Рисса–Герглотца

$F(z) \in \mathfrak{B}^c \iff$ существует мера $d\sigma(\theta)$ с носителем на отрезке $[0, 2\pi]$ такая, что

$$F(z) = i \operatorname{Im} F(0) + \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\sigma(\theta)$$

$$\begin{aligned} F(z) \in \mathfrak{B}^c &\implies \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \frac{F(e_j) + \overline{F(e_k)}}{1 - e_j \bar{e}_k} \xi_j \bar{\xi}_k \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \frac{1}{1 - e_j \bar{e}_k} \int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{i\theta} + e_j}{e^{i\theta} - e_j} + \frac{e^{-i\theta} + \bar{e}_k}{e^{-i\theta} - \bar{e}_k} \right) d\sigma(\theta) \xi_j \bar{\xi}_k \\ &= \sum_{j,k=1}^n \int_0^{2\pi} \frac{1}{(e^{i\theta} - e_j)(e^{-i\theta} - \bar{e}_k)} d\sigma(\theta) \xi_j \bar{\xi}_k = \\ &= \int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^n \frac{\xi_j}{e^{i\theta} - e_j} \sum_{k=1}^n \frac{\bar{\xi}_k}{e^{-i\theta} - \bar{e}_k} \sigma(\theta) = \int_0^{2\pi} \left| \sum_{j=1}^n \frac{\xi_j}{e^{i\theta} - e_j} \right|^2 d\sigma(\theta) \geq 0 \end{aligned}$$

Интегральное представление Рисса–Герглотца

$F(z) \in \mathfrak{B}^n \implies$ существует мера $d\tau(u)$ с носителем на $(-\infty, \infty)$ такая, что

$$F(z) = \mu z + \nu + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + uz}{u - z} d\tau(u), \text{ где } \mu \geq 0, -\infty < \nu < \infty$$

$$\begin{aligned} F(z) \in \mathfrak{B}^n &\implies \sum_{j,k=1}^n \frac{F(e_j) - \overline{F(e_k)}}{e_j - \bar{e}_k} \xi_j \bar{\xi}_k \\ &= \mu \left| \sum_{j=1}^n \xi_j \right|^2 + \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^n \frac{\xi_j}{u - e_j} \right|^2 (1 + u^2) d\tau(u) \geq 0 \end{aligned}$$

Решение проблемы Неванлинны–Пика в терминах форм получено в работах Пика (1916, 1920) для конечного $\mathcal{L}$, и в работе Неванлинны (1922) для счетного $\mathcal{L}$

Теорема Крейна–Рехтман (1938)

Для существования функции Неванлинны $F(z)$, удовлетворяющей условиям $F(e_\alpha) = h_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{L}$, где $\{e_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{L}}$ и $\{h_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{L}}$ – заданные множества точек, лежащие в верхней полуплоскости $\mathbb{H}$, необходимо и достаточно, чтобы все формы $\sum_{j,k=0}^n \frac{h_{\alpha_j} - \bar{h}_{\alpha_k}}{e_{\alpha_j} - \bar{e}_{\alpha_k}} \xi_j \bar{\xi}_k$ были ненегативны. Если какая-либо из этих форм сингулярна, то функция $F(z)$ единственна и является действительной рациональной дробью.

Следствие теоремы Крейна–Рехтман

Для существования функции Каратеодори $F(z)$, удовлетворяющей условиям $F(e_\alpha) = h_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{L}$, где $\{e_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{L}} \subset \mathbb{D}$ и $\{h_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{L}} \subset \mathbb{K}$, необходимо и достаточно, чтобы все формы $\sum_{j,k=0}^n \frac{h_{\alpha_j} + \bar{h}_{\alpha_k}}{1 - e_{\alpha_j} \bar{e}_{\alpha_k}} \xi_j \bar{\xi}_k$ были ненегативны.

Если какая-либо из этих форм сингулярна, то функция $F(z)$ единственна и является рациональной дробью вида $F(z) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^N \lambda_k \frac{t_k - z}{t_k + z}$, $\operatorname{Re} \lambda_0 = 0$, $\lambda_k > 0$, $|t_k| = 1$, $k = 1, \dots, N$, $t_1, \dots, t_N$ попарно различны.

Для существования функции Шура $F(z)$, удовл. условиям $F(e_\alpha) = h_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{L}$, где $\{e_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{L}} \subset \mathbb{D}$ и $\{h_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{L}} \subset \mathbb{D}$, необходимо и достаточно, чтобы все формы $\sum_{j,k=0}^n \frac{1 - h_{\alpha_j} \bar{h}_{\alpha_k}}{1 - e_{\alpha_j} \bar{e}_{\alpha_k}} \xi_j \bar{\xi}_k$ были ненегативны.

Если к-либо из форм синг., то ф-я $F(z)$ единственна и явл. рац. ф-ей вида $F(z) = \gamma \prod_{k=1}^N \frac{z - e_k}{1 - \bar{e}_k z}$, $|\gamma| = 1$, $e_k \in \mathbb{D}$, $k = 1, \dots, N$.

Проблема Неванлинны–Пика при наличии кратных точек

Пусть Ω и Φ – две односвязные области, и пусть $e_1, e_2, \dots$ – последовательность точек в Ω , $h_1, h_2, \dots$ – последовательность комплексных чисел.

Требуется найти необходимые и достаточные условия существования функции f , голоморфной в Ω , принимающей значения в Φ и такой, что

$$f^{(\nu_n-1)}(e_n) = h_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $f^k(e)$ – k -я производная функции f в точке e , ν_n – кратность точки e_n в множестве $E_n := \{e_1, \dots, e_n\}$.

При сведении проблемы Неванлинны–Пика к наперед заданным областям Ω^* и Υ^* возникают определенные трудности, связанные с наличием производных в кратных точках.

Тригонометрическая проблема моментов

Для заданных $a_0 = 1$ и комплексных $a_1, a_2, \dots$ найти вероятностную меру $d\sigma(\theta)$ с носителем на отрезке $[0, 2\pi]$, отличным от конечного числа точек, и такую, что

$$\int_0^{2\pi} e^{-in\theta} d\sigma(\theta) = a_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\begin{aligned} a_n = \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} d\sigma(\theta) &\iff 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} z^n \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} d\sigma(\theta) \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\sigma(\theta) \in \mathfrak{B}_{\infty}^{\mathbb{C}} \iff f(z) = a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \in \mathfrak{B}_{\infty}^{\mathbb{C}} \end{aligned}$$

Триг. проблема моментов для посл-ти $a_0 = 1, a_1, a_2, \dots$ разрешима $\iff f(z) = a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \in \mathfrak{B}_{\infty}^{\mathbb{C}}$.

Уточнение обозначений

$\mathfrak{B}_0^c$ – подмножество множества функций Каратеодори, состоящее из чисто мнимых постоянных функций

$\mathfrak{B}_N^c$ – подмножество множества функций Каратеодори, состоящее из рациональных функций степени $N \in \mathbb{N}$

вида $F(z) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^N \lambda_k \frac{t_k - z}{t_k + z}$, $\operatorname{Re} \lambda_0 = 0$, $\lambda_k > 0$, $|t_k| = 1$, $k = 1, \dots, N$, $t_1, \dots, t_N$ попарно различны.

$$\mathfrak{B}_\infty^c := \mathfrak{B}^c \setminus \left(\bigcup_{N \in \mathbb{Z}_+} \mathfrak{B}_N^c \right)$$

$\mathfrak{B}_0^s$ – подмножество множества функций Шура, состоящее из постоянных функций, по модулю равных 1.

$\mathfrak{B}_N^s$ – подмножество множества функций Шура, состоящее из рациональных функций степени $N \in \mathbb{N}$

вида $F(z) = \gamma \prod_{k=1}^N \frac{z - e_k}{1 - \bar{z} \bar{e}_k}$, $|\gamma| = 1$, $e_k \in \mathbb{D}$, $k = 1, \dots, N$.

$$\mathfrak{B}_\infty^s := \mathfrak{B}^s \setminus \left(\bigcup_{N \in \mathbb{Z}_+} \mathfrak{B}_N^s \right)$$

$\mathfrak{B}_0^n$ – подмножество множества функций Неванлинны,

Критерий Каратеодори (1911)

Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ – формальный степенной ряд и

$$A_n^f := \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ 0 & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_n^f := \begin{pmatrix} \bar{a}_0 & 0 & \dots & 0 \\ \bar{a}_1 & \bar{a}_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{a}_{n-1} & \bar{a}_{n-2} & \dots & \bar{a}_0 \end{pmatrix},$$

$$M_n^{C,f} := \det(A_n^f + \tilde{A}_n^f), \quad n = 1, 2, \dots$$

Тогда

1°. $f(z)$ – ряд Тейлора функции класса $\mathfrak{B}_N^C$, $N \in \mathbb{Z}_+$ $\iff$

$$M_n^{C,f} > 0, \quad n = 1, \dots, N, \quad \text{и} \quad M_n^{C,f} = 0, \quad n = N+1, N+2, \dots$$

2°. $f(z)$ – ряд Тейлора функции класса $\mathfrak{B}_{\infty}^C$ $\iff$

$$M_n^{C,f} > 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

$T(z) := \frac{1-z}{1+z}$. Следовательно, $f \in \mathfrak{B}_N^S \iff T \circ f \in \mathfrak{B}_N^C$

Следствие критерия Каратеодори

Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ – формальный степенной ряд, $a_0 \neq -1$. Тогда

1°. $f(z)$ – ряд Тейлора функции класса $\mathfrak{B}_N^S$, $N \in \mathbb{Z}_+$ $\iff$

$M_n^{C, T \circ f} > 0$, $n = 1, \dots, N$, и $M_n^{C, T \circ f} = 0$, $n = N+1, N+2, \dots$

2°. $f(z)$ – ряд Тейлора функции класса $\mathfrak{B}_N^S$ $\iff$

$$M_n^{C, T \circ f} > 0, n = 1, 2, \dots$$

где $(T \circ f)(z) = \frac{1-f(z)}{1+f(z)} = \frac{1-a_0-a_1z-\dots}{1+a_0+a_1z+\dots} = b_0 + b_1z + \dots$

$$M_n^{C, T \circ f} = \det \begin{pmatrix} b_0 + \bar{b}_0 & b_1 & \dots & b_{n-1} \\ \bar{b}_1 & b_0 + \bar{b}_0 & \dots & b_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{b}_{n-1} & \bar{b}_{n-2} & \dots & b_0 + \bar{b}_0 \end{pmatrix}$$

Критерий Шура (1918)

Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ – формальный степенной ряд и

$$A_n^f := \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ 0 & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_n^f := \begin{pmatrix} \bar{a}_0 & 0 & \dots & 0 \\ \bar{a}_1 & \bar{a}_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{a}_{n-1} & \bar{a}_{n-2} & \dots & \bar{a}_0 \end{pmatrix},$$

$$M_n^{S,f} := \det(I_n - A_n^f \tilde{A}_n^f), \quad n = 1, 2, \dots, \quad I_n := (\delta_{j,k})_{j,k=1,\dots,n}.$$

Тогда

1°. $f(z)$ – ряд Тейлора функции класса $\mathfrak{B}_N^S$, $N \in \mathbb{Z}_+$ $\iff$

$$M_n^{S,f} > 0, \quad n = 1, \dots, N, \text{ и } M_n^{S,f} = 0, \quad n = N+1, N+2, \dots$$

2°. $f(z)$ – ряд Тейлора функции класса $\mathfrak{B}_N^S$ $\iff$

$$M_n^{S,f} > 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Эквивалентность критериев Каратеодори и Шура

Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ – формальный степенной ряд и

$$A_n^f := \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ 0 & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_n^f := \begin{pmatrix} \bar{a}_0 & 0 & \dots & 0 \\ \bar{a}_1 & \bar{a}_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{a}_{n-1} & \bar{a}_{n-2} & \dots & \bar{a}_0 \end{pmatrix},$$

$$M_n^{C,f} := \det(A_n^f + \tilde{A}_n^f), \quad M_n^{S,f} := \det(I_n - A_n^f \tilde{A}_n^f)$$

Тогда

$$\frac{2^n}{|1 + a_0|^{2n}} M_n^{S,f} = M_n^{C,T \circ f}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\text{где } (T \circ f)(z) = \frac{1-f(z)}{1+f(z)} = \frac{1-a_0-a_1z-\dots}{1+a_0+a_1z+\dots} = b_0 + b_1z + \dots$$

$$\text{При } n = 1 \quad \frac{2}{|1+a_0|^2} (1 - a_0 \bar{a}_0) = b_0 + \bar{b}_0 = \frac{1-a_0}{1+a_0} + \frac{1-\bar{a}_0}{1+\bar{a}_0}$$

Уточнение критерия Каратеодори–Шура

Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ – формальный степенной ряд,
 $N \in \mathbb{Z}_+$.

Тогда

1°. $f(z)$ – ряд Тейлора функции класса $\mathfrak{B}_N^{\zeta}$, $\zeta = c, s \iff$

$$M_n^{\zeta, f} > 0, n = 1, \dots, N, \text{ и } M_{N+1}^{\zeta, f} = M_{N+2}^{\zeta, f} = M_{N+4}^{\zeta, f} = M_{N+6}^{\zeta, f} = \dots = 0$$

При этом из первых $N + 1$ условий

$$M_n^{\zeta, f} > 0, n = 1, \dots, N, \text{ и } M_{N+1}^{\zeta, f} = 0$$

следует, что функция $f(z)$ единственна, а величина
 $M_{N+2p}^{\zeta, f}$ зависит только от $a_0, \dots, a_{N+p}$, $p = 1, 2, \dots$

Пусть $E_n = \{e_1, \dots, e_n\} \subset \mathbb{C}$, ν_k – кратность точки e_k в множестве $E_k = \{e_1, \dots, e_k\}$, $k = 1, \dots, n$, $f(z) \in H(E_n)$,

$$A_{E_n}^f := \begin{pmatrix} (z^0 f(z))^{(\nu_1-1)}|_{z=e_1} & \dots & (z^0 f(z))^{(\nu_n-1)}|_{z=e_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ (z^{n-1} f(z))^{(\nu_1-1)}|_{z=e_1} & \dots & (z^{n-1} f(z))^{(\nu_n-1)}|_{z=e_n} \end{pmatrix}.$$

$A_{E_n} := A_{E_n}^f$ при $f(z) \equiv 1$.

$\overline{A}_{E_n}^f$ и $\overline{A}_{E_n}$ – матрицы, получаемые из $A_{E_n}^f$ и A_{E_n} комплексным сопряжением элементов.

$\tilde{A}_{E_n}^f$ и $\tilde{A}_{E_n}$ – матрицы, получаемые из $\overline{A}_{E_n}^f$ и $\overline{A}_{E_n}$ заменой порядка строк и порядка столбцов на обратный.

$H_n = \{h_1, \dots, h_n\} \subset \mathbb{C}$, $\varphi_{E_n}^{H_n}$ – (любая) голоморфная на E_n функция такая, что $f^{(v_n-1)}(e_n) = h_n$, $n = 1, 2, \dots$,

$$M_{E_n}^{C;H_n} := \det \begin{pmatrix} A_{E_n} & -\tilde{A}_{E_n} \\ A_{E_n}^{H_n} & \tilde{A}_{E_n}^{H_n} \end{pmatrix}, \quad M_{E_n}^{S;H_n} := \det \begin{pmatrix} A_{E_n} & \tilde{A}_{E_n}^{H_n} \\ A_{E_n}^{H_n} & \tilde{A}_{E_n} \end{pmatrix}$$

$$M_{E_n}^{n;H_n} := \det \begin{pmatrix} A_{E_n} & i\overline{A}_{E_n} \\ A_{E_n}^{H_n} & i\overline{A}_{E_n}^{H_n} \end{pmatrix}, \quad \text{где } A_{E_n}^{H_n} := A_{E_n}^{\varphi_{E_n}^{H_n}}$$

$$M_{E_n}^{\zeta,H_n} = \overline{M_{E_n}^{\zeta,H_n}}, \quad \zeta = c, s, n$$

Пусть $\zeta = c, s, n$, $E_n = \{e_1, \dots, e_n\}$ – произвольный набор из n точек, лежащих в $\mathbb{D}$, если $\zeta = c, s$, и лежащих в $\mathbb{H}$, если $\zeta = n$. Пусть $f(z) \in \mathfrak{B}^\zeta$ и пусть $H_n := \{f^{(\nu_1-1)}(e_1), \dots, f^{(\nu_n-1)}(e_n)\}$, где ν_k – кратность точки e_k в множестве $\{e_1, \dots, e_k\}$. Тогда при $N = 0, 1, \dots, \infty$

$$f(z) \in \mathfrak{B}_N^\zeta \implies \begin{cases} M_{E_n}^{\zeta, H_n} > 0, & n \leq N, \\ M_{E_n}^{\zeta, H_n} = 0, & n > N. \end{cases}$$

Пусть $\zeta = c, s, n$, $e_1, e_2, \dots$ – заданная последовательность точек, лежащих в $\mathbb{D}$, если $\zeta = c, s$, и лежащих в $\mathbb{H}$, если $\zeta = n$, $h_1, h_2, \dots$ – заданная последовательность комплексных чисел, $E_n = \{e_1, \dots, e_n\}$, $H_n = \{h_1, \dots, h_n\}$. Тогда

1°. Существует $f(z) \in \mathfrak{B}_N^\zeta$, $N \in \mathbb{Z}_+$, такая, что

$$f^{(\nu_n-1)}(e_n) = h_n, \quad n = 1, 2, \dots, \iff$$

$$M_{E_n}^{\zeta, H_n} > 0, \quad n = 1, \dots, N, \quad \text{и} \quad M_{E_{n,N}}^{\zeta, H_{n,N}} = 0, \quad n = N+1, N+2, \dots$$

2°. Существует $f(z) \in \mathfrak{B}_\infty^\zeta$ такая, что

$$f^{(\nu_n-1)}(e_n) = h_n, \quad n = 1, 2, \dots, \iff$$

$$M_{E_n}^{\zeta, H_n} > 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Определение множеств $E_{n,N}$ и $H_{n,N}$

$$n \leq N + 2, \implies E_{n,N} := E_n, H_{n,N} := H_H$$

$$n \geq N + 3, \nu_n < N + 2 \implies E_{n,N} := \{e_{k_{n,1}}, \dots, e_{k_{n,N+2}}\}, \\ H_{n,N} := \{h_{k_{n,1}}, \dots, h_{k_{n,N+2}}\}$$

Возрастающие индексы $k_{n,1} < \dots < k_{n,N+2} = n$ таковы, что кратность точки $e_{k_{n,m}}$ в множестве $\{e_{k_{n,1}}, \dots, e_{k_{n,m}}\}$ равна $\nu_{k_{n,m}}$, $m = 1, \dots, N + 2$

$$n \geq N + 3, \nu_n > N + 2 \implies E_{n,N} := \underbrace{\{e_n, \dots, e_n\}}_{2\nu_n - N - 2},$$

$$H_{n,N} := \{h_{k_{n,1}}, \dots, h_{k_{n,\nu_n}}, h_{n,1}^*, \dots, h_{n,\nu_n - N - 2}^*\}$$

Лемма

Пусть $E_n = \{0, \dots, 0\}$, $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1}$,

$$A_n^f := \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ 0 & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_n^f := \begin{pmatrix} \bar{a}_0 & 0 & \dots & 0 \\ \bar{a}_1 & \bar{a}_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{a}_{n-1} & \bar{a}_{n-2} & \dots & \bar{a}_0 \end{pmatrix}.$$

$H_n = \{0!a_0, \dots, (n-1)!a_{n-1}\}$. Тогда

$$\frac{M_{E_n}^{C;H_n}}{(0!a_0, \dots, (n-1)!a_{n-1})^2} = \det(A_n^f + \tilde{A}_n^f) = M_n^{C;f}$$

$$\frac{M_{E_n}^{S;H_n}}{(0!a_0, \dots, (n-1)!a_{n-1})^2} = \det(I_n - A_n^f \tilde{A}_n^f) = M_n^{S;f}$$

Следствия теоремы

Теорема Крейна–Рехтман является частным случаем теоремы при попарно различных точках $e_1, e_2, \dots$

Лемма

Пусть $E_n = \{e_1, \dots, e_n\}$ – набор попарно различных точек в $\mathbb{H}$, $H_n = \{h_1, \dots, h_n\}$ – произвольный набор комплексных чисел, $C_{E_n} = i^{n^2} \prod_{j,k=1}^n (\bar{e}_k - e_j)$. Тогда

$$M_{E_n}^{n; H_n} = \det \begin{pmatrix} A_{E_n} & i \bar{A}_{E_n} \\ A_{E_n}^{H_n} & i \bar{A}_{E_n}^{H_n} \end{pmatrix} = C_{E_n} \det \left(\frac{h_j - \bar{h}_k}{e_j - \bar{e}_k} \right)_{j,k=1, \dots, n},$$

Основные моменты доказательства теоремы

- ① Теорему достаточно доказать только лишь при $\zeta = s$

Lemma

Пусть $g(z) = \frac{1-f(z)}{1+f(z)}$, $f(e_n) \neq -1$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда

$$M_{E_n}^{C;f} = \frac{2^n}{\prod_{k=1}^n |1+f(e_k)|^2} M_n^{S;g}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Lemma

Пусть $g(z) = i^{-1} f\left(i \frac{1+z}{1-z}\right)$, $D_n := \left\{ \frac{e_1-i}{e_1+i}, \dots, \frac{e_n-i}{e_n+i} \right\}$. Тогда

$$M_{E_n}^{n;f} = \frac{2^{n^2}}{\prod_{k=1}^n |e_k + i|^{2n}} M_{D_n}^{C;g}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Основные моменты доказательства теоремы

- ② $F(z) \in \mathfrak{B}^S$, $|\gamma_0| < 1$, где $\gamma_0 := F(e_1) \implies$

$$F(z) = \gamma_0 + \frac{(1 - |\gamma_0|^2)\tau_1(z)}{\bar{\gamma}_0\tau_1(z) + \frac{1}{F_1(z)}}$$

$$\gamma_0 := F(e_1), \tau_1(z) := \frac{z - e_1}{1 - \bar{z}e_1}, F_1(z) := \frac{F(z) - \gamma_0}{\tau_1(z)(1 - \bar{\gamma}_0 F(z))} \in \mathfrak{B}^S$$

- ③ $F(z) \in \mathfrak{B}_N^S \iff |\gamma_n| < 1, \dots, |\gamma_{N-1}| < 1, |\gamma_N| = 1 \iff$
дробь обрывается на N -м шаге.

- ④ $F(z) \in \mathfrak{B}_\infty^S \iff |\gamma_1| < 1, |\gamma_2| < 1, \dots \iff$ дробь
бесконечна.

5

Lemma

$$F(z) \in \mathfrak{B}^S \implies M_{E_n}^{S;F} = \prod_{p=0}^{n-1} \frac{(1-|\gamma_p|^2)^{n-p}}{|Q_{2p}(e_{p+1})|^2(1-|e_{p+1}|^2)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

где $Q_{2p}(z)$ – знаменатель $2p$ -й подходящей дроби непрерывной дроби Шура, $Q_{2p}(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{D}$.

6

$$|\gamma_0| = 1 \iff M_{E_1}^{S;F} = M_{E_2}^{S;F} = \dots = 0$$

$$|\gamma_n| < 1, \dots, |\gamma_{N-1}| < 1, |\gamma_N| = 1 \iff \\ M_{E_1}^{S;F} > 0, \dots, M_{E_N}^{S;F} > 0, M_{E_{N+1}}^{S;F} = M_{E_{N+2}}^{S;F} = \dots = 0$$

$$|\gamma_n| < 1, n = 0, 1, \dots \iff M_{E_n}^{S;F} > 0, n = 0, 1, \dots$$

Проблема моментов Гамбургера

Для заданных действительных $a_0 = 1, a_1, a_2, \dots$ найти вероятностную меру $d\sigma(t)$ с носителем на $(-\infty, \infty)$, отличным от конечного числа точек, такую, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^n d\sigma(t) = a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Теорема Гамбургера

Проблема Гамбургера разрешима $\iff$ существует ф-я Неванлинны, для кот. ряд $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ является ее асимптотическим рядом в точке $z = 0$

$$\iff \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & \dots & a_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_{n+1} & \dots & a_{2n-1} \end{pmatrix} > 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Lemma

Пусть $a_1, \dots, a_{2n-1}$ — действительные числа, $\{e_1, \dots, e_n\}$ — произвольный набор из n точек, лежащих в $\mathbb{H}$. Тогда

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & \dots & a_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_{n+1} & \dots & a_{2n-1} \end{pmatrix} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} M_{\{\varepsilon e_1, \dots, \varepsilon e_n\}}^{n; f_{2n-1}}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $f_{2n-1}(z) = \sum_{k=1}^{2n-1} a_k z^k$.

Спасибо за внимание