ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА И ТЕОРИЯ ОТОБРАЖЕНИЙ

С. К. ВОДОПЬЯНОВ

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
Математический центр в Академгородке

Вторая конференция Математических центров России
7-11 ноября 2022 г.

10 ноября 2022

Пусть $f:\Omega\to\mathbb{C}$ — дифференцируемое отображение, а $\Omega\subset\mathbb{C}$ — открытое множество.

- *Уравнение Коши — Римана:* $f_{\bar z}=0$, $z\in\Omega$, определяет аналитическую функцию.

Классические результаты

Пусть $f:\Omega\to\mathbb{C}$ — дифференцируемое отображение, а $\Omega\subset\mathbb{C}$ — открытое множество.

- *Уравнение Коши — Римана:* $f_{\bar z}=0$, $z\in\Omega$, определяет аналитическую функцию.

- *Уравнение Бельтрами:* $f_{\bar z}=\mu f_z$, $\sup|\mu|\leq 1$, $z\in\Omega$, определяет квазиконформное отображение на $\mathbb{R}^2$.

В эквивалентной форме: $f\in W^1_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$, $\frac{|Df(z)|^2}{|\det Df(z)|}\leq K$ a. e. in $z\in\Omega$.

Пусть $f:\Omega\to\mathbb{C}$ — дифференцируемое отображение, а $\Omega\subset\mathbb{C}$ — открытое множество.

- *Уравнение Коши — Римана:* $f_{\bar z}=0$, $z\in\Omega$, определяет аналитическую функцию.

- *Уравнение Бельтрами:* $f_{\bar z}=\mu f_z$, $\sup|\mu|\le 1$, $z\in\Omega$, определяет квазиконформное отображение на $\mathbb{R}^2$.

В эквивалентной форме: $f\in W^1_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$, $\frac{|Df(z)|^2}{|\det Df(z)|}\le K$ a. e. in $z\in\Omega$.

- *Вырождающееся уравнение Бельтрами:* $f_{\bar z}=\mu f_z$, $\sup|\mu|\le 1$, $z\in\Omega$, определяет квазиконформное отображение на $\mathbb{R}^2$.

В эквивалентной форме: $f\in W^1_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$, $\operatorname{ess\,sup}\limits_{z\in\Omega}\frac{|Df(z)|^2}{|\det Df(z)|}=\infty$.

Метрическое определение квазиконформности

Гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$, $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, называется *квазиконформным*, если:

$$\sup_{x \in D} \frac{\max\{|\varphi(y) - \varphi(x)| : y \in S(x,r)\}}{\min\{|\varphi(y) - \varphi(x)| : y \in S(x,r)\}} \leq K_1 < \infty;$$

Пространство Соболева $L_p^1(D)$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $p \in [1, \infty]$

состоит из локально интегрируемых функций $f : D \to \mathbb{R}$, имеющих первые обобщенные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$:

$$\int\limits_D \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\varphi(x)\,dx = -\int\limits_D f(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\,dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(D),$$

$i = 1, \dots, n$, и конечную полунорму

$$\|f \mid L_p^1(D)\| = \|\nabla f \mid L_p(D)\|, \quad \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

Пространство Соболева $L^1_p(D)$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $p \in [1, \infty]$

состоит из локально интегрируемых функций $f : D \to \mathbb{R}$, имеющих первые обобщенные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$:

$$\int\limits_D \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\varphi(x)\,dx = -\int\limits_D f(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\,dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(D),$$

$i = 1, \dots, n$, и конечную полунорму

$$\|f \mid L^1_p(D)\| = \|\nabla f \mid L_p(D)\|, \quad \nabla f = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big).$$

$$W^1_{p,\mathrm{loc}}(D) = L_p(U) \cap L^1_p(U).$$

Квазиконформный анализ с 70-х годов XX века

Гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$, $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, *квазиконформен*, если и только если верно одно из следующих утверждений:

1) $\varphi \in W^1_{n,\mathrm{loc}}(D)$ и верно $|D\varphi(x)|^n \leq K_1 |\det D\varphi(x)|$ п. вс. в D;

Квазиконформный анализ с 70-х годов XX века

Гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$, $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, *квазиконформен*, если и только если верно одно из следующих утверждений:

1) $\varphi \in W^1_{n,\mathrm{loc}}(D)$ и верно $|D\varphi(x)|^n \leq K_1 |\det D\varphi(x)|$ п. вс. в D;

2) оператор композиции $\varphi^* : L^1_n(D') \cap \mathrm{Lip}_l(D') \to L^1_n(D)$ ограничен; здесь $\varphi^*(u) = u \circ \varphi$, $u \in L^1_n(D') \cap \mathrm{Lip}_l(D')$.

Гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$, $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, *квазиконформен*, если и только если верно одно из следующих утверждений:

1) $\varphi \in W^1_{n,\mathrm{loc}}(D)$ и верно $|D\varphi(x)|^n \leq K_1 |\det D\varphi(x)|$ п. вс. в D;

2) оператор композиции $\varphi^* : L^1_n(D') \cap \mathrm{Lip}_l(D') \to L^1_n(D)$ ограничен; здесь $\varphi^*(u) = u \circ \varphi$, $u \in L^1_n(D') \cap \mathrm{Lip}_l(D')$.

3) для любого конденсатора $\mathcal{E} = (F, U)$ в D' верно:

$$\mathrm{cap}\,\big(\varphi^{-1}(\mathcal{E}); L^1_n(D)\big) \leq K_2\,\mathrm{cap}(\mathcal{E}; L^1_n(D'))$$

с $K_2 \in (0, \infty)$; здесь $\varphi^{-1}(\mathcal{E}) = (\varphi^{-1}(F), \varphi^{-1}(U))$ — прообраз $\mathcal{E}$;

Теорема о жесткости геометрии пространств Соболева.

Пусть $\varphi^* : L^1_p(D') \to L^1_p(D)$ — ограниченный изоморфизм в классов Соболева, индуцированный измеримым отображением $\varphi : D \to D'$, $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$: $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$ для $f \in L^1_p(D')$.

Тогда $\varphi : D \to D'$ можно переопределить на множестве меры нуль так, чтобы быть

1) квазиконформным отображением $\varphi : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ в случае $p = n \geq 2$;

2) квазиизометрическим отображением $\varphi : D \to \mathbb{R}^n$ в случае $p \neq n$, $1 \leq p \leq \infty$.

Более того, соболевские пространства L^1_p на открытых множествах D' и $\varphi(D)$ изоморфны.

Теорема о жесткости геометрии пространств Соболева.

Пусть $\varphi^* : L^1_p(D') \to L^1_p(D)$ *— ограниченный изоморфизм в классов Соболева, индуцированный измеримым отображением* $\varphi : D \to D'$, $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$*:* $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$ *для* $f \in L^1_p(D')$.

Тогда $\varphi : D \to D'$ *можно переопределить на множестве меры нуль так, чтобы быть*

1) *квазиконформным отображением* $\varphi : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ *в случае* $p = n \geq 2$*;*

2) *квазиизометрическим отображением* $\varphi : D \to \mathbb{R}^n$ *в случае* $p \neq n$, $1 \leq p \leq \infty$.

Более того, соболевские пространства L^1_p *на открытых множествах* D' *и* $\varphi(D)$ *изоморфны.*

$p \geq n$ — Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М., СМЖ, 1975, 1976)

$1 \leq p \neq n < \infty$, — Водопьянов С. К. (2005) — окончательный результат и новое доказательство.

Конденсаторы и емкость

Конденсатор $\mathcal{E} = (F_1, F_0)$ в D' — это пара континуумов $F_1, F_0 \subset D'$, $F_1 \cap F_0 = \emptyset$.

Конденсатор $\mathcal{E} = (F_1, F_0)$ в D' — это пара континуумов $F_1, F_0 \subset D'$, $F_1 \cap F_0 = \emptyset$.

Если $U \Subset D'$ — ограниченное область, континуум $F \subset U$, то конденсатор $\mathcal{E} = (F, \partial U)$ записывается в виде $\mathcal{E} = (F, U)$.

Конденсаторы и емкость

Конденсатор $\mathcal{E} = (F_1, F_0)$ в D' — это пара континуумов $F_1, F_0 \subset D'$, $F_1 \cap F_0 = \emptyset$.

Если $U \Subset D'$ — ограниченное область, континуум $F \subset U$, то конденсатор $\mathcal{E} = (F, \partial U)$ записывается в виде $\mathcal{E} = (F, U)$.

p-Емкостью конденсатора $\mathcal{E} = (F_1, F_0) \subset D'$ в пространстве $L^1_p(D')$, $p \in [1, \infty)$, называется величина

$$\operatorname{cap}\left(\mathcal{E}; L^1_p(D')\right) = \inf_{u \in \mathcal{A}(\mathcal{E})} \left\| u \mid L^1_p(D') \right\|^p, \quad \text{где}$$

Конденсаторы и емкость

Конденсатор $\mathcal{E} = (F_1, F_0)$ в D' — это пара континуумов $F_1, F_0 \subset D'$, $F_1 \cap F_0 = \emptyset$.

Если $U \Subset D'$ — ограниченное область, континуум $F \subset U$, то конденсатор $\mathcal{E} = (F, \partial U)$ записывается в виде $\mathcal{E} = (F, U)$.

p-Емкостью конденсатора $\mathcal{E} = (F_1, F_0) \subset D'$ в пространстве $L^1_p(D')$, $p \in [1, \infty)$, называется величина

$$\operatorname{cap}\left(\mathcal{E}; L^1_p(D')\right) = \inf_{u \in \mathcal{A}(\mathcal{E})} \left\| u \mid L^1_p(D') \right\|^p, \quad \text{где}$$

$\mathcal{A}(\mathcal{E}) = \left\{ u \in L^1_p(D') \cap C(D') : u|_{F_1} = 1, \ u|_{F_0} = 0 \right\}$
$\mathcal{A}(\mathcal{E}) = \left\{ u \in L^1_p(D') \cap \operatorname{Lip}_l(D') : u|_{F_1} = 1, \ u|_{F_0} = 0 \right\}$ — семейство допустимых функций.

Квазиконформный анализ с 2020-х гг.

Основная теорема [В. (2020)].*Для гомеоморфизма* $\varphi : D \to D'$, $n \geq 2$, $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, *и весовой функции* $\omega : D' \to (0, \infty)$, $\omega \in L_{1,\mathrm{loc}}$, *следующие утверждения эквивалентны:*

1) *оператор композиции* $\varphi^* : L^1_p(D'; \omega) \cap \mathrm{Lip}_l(D') \to L^1_q(D)$, $1 < q \leq p < \infty$, $(1 \leq q \leq p < \infty$ *в случае* $n = 2)$ *ограничен;*

Квазиконформный анализ с 2020-х гг.

Основная теорема [В. (2020)]. *Для гомеоморфизма $\varphi : D \to D'$, $n \geq 2$, $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, и весовой функции $\omega : D' \to (0, \infty)$, $\omega \in L_{1,\mathrm{loc}}$, следующие утверждения эквивалентны:*

1) *оператор композиции* $\varphi^* : L^1_p(D'; \omega) \cap \mathrm{Lip}_l(D') \to L^1_q(D)$, $1 < q \leq p < \infty$, ($1 \leq q \leq p < \infty$ *в случае* $n = 2$) *ограничен;*

2) *для любого кубического конденсатора* $\mathcal{E} = (\overline{Q(y,r)}, Q(y,R))$ *в* D', *верно*

$$\mathrm{cap}^{\frac{1}{q}}(\varphi^{-1}(\mathcal{E}); L^1_q(D)) \leq$$

$$\begin{cases} K_p \,\mathrm{cap}^{\frac{1}{p}}(\mathcal{E}; L^1_p(D'; \omega)), & 1 \leq q = p < \infty, \\ \Psi(Q(y,R) \setminus \overline{Q(y,r)})^{\frac{1}{\sigma}} \,\mathrm{cap}^{\frac{1}{p}}(\mathcal{E}; L^1_p(D'; \omega)), & 1 \leq q < p < \infty, \end{cases}$$

где Ψ *— ограниченная монотонная конечно-аддитивная функция;*

3) *гомеоморфизм* $\varphi : D \to D'$ *принадлежит классу Соболева* $W^1_{q,\mathrm{loc}}(D)$, φ *имеет конечное искажение*:
$D\varphi(x) = 0$ *п. вс. на* $Z = \{x \in D \mid \det D\varphi(x) = 0\}$,
и внешняя функция искажения

$$D \ni x \mapsto K^{1,\omega}_{q,p}(x,\varphi) = \begin{cases} \dfrac{|D\varphi(x)|}{|\det D\varphi(x)|^{\frac{1}{p}}\,\omega^{\frac{1}{p}}(\varphi(x))}, & \text{если } \det D\varphi(x) \neq 0, \\ 0, & \text{если } \det D\varphi(x) = 0, \end{cases}$$

принадлежит $L_\sigma(D)$, *где* $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, *если* $1 \leq q < p < \infty$, *и* $\sigma = \infty$, *если* $q = p$.

Импликации 1) $\to$ 2), 3) $\to$ 1) доказываются известными методами. Доказательство импликации 2) $\to$ 3) новое.

Частные случаи основной теоремы.

Основная теорема содержит и усиливает почти все подходы к теории квазиконформных отображений, известные в литературе:

1) $n = q = p$, $\omega \equiv 1$: Классические квазиконформные отображения;

Частные случаи основной теоремы.

Основная теорема содержит и усиливает почти все подходы к теории квазиконформных отображений, известные в литературе:

1) $n = q = p$, $\omega \equiv 1$: Классические квазиконформные отображения;

2) $1 \leq q = p < \infty$, $\omega \equiv 1$: p-квазиконформные отображения [В, 1988];

Частные случаи основной теоремы.

Основная теорема содержит и усиливает почти все подходы к теории квазиконформных отображений, известные в литературе:

1) $n = q = p$, $\omega \equiv 1$: Классические квазиконформные отображения;

2) $1 \leq q = p < \infty$, $\omega \equiv 1$: p-квазиконформные отображения [В, 1988];

3) $1 \leq q \leq p < \infty$, $\omega \equiv 1$: (q, p)-квазиконформные отображения [Ухлов, СМЖ, 1993]; [ВУ, СМЖ, 1998] и др.

Емкость или модуль? Что лучше? Расширение основной теоремы [В, СМЖ, 2021].

Утверждения 1)–3) основной теоремы эквивалентны свойству:

для любого кубического конденсатора $(\overline{Q(x,r)}, Q(x,R))$, $r \in (0,R)$, *в* D', *гомеоморфизм* $\varphi : D \to D'$ *удовлетворяет соотношению*

$$(\mathrm{mod}_q(\varphi^{-1}\Gamma))^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \begin{cases} K_{p,p}\big(\mathrm{mod}_p^{\omega}(\Gamma)\big)^{\frac{1}{p}}, & n-1<q=p<\infty, \\ \Psi_{q,p}(Q(x,R)\setminus\overline{Q(x,r)})^{\frac{1}{\sigma}}\big(\mathrm{mod}_p^{\omega}(\Gamma)\big)^{\frac{1}{p}}, & n-1<q<p<\infty, \end{cases}$$

с постоянной $K_{p,p}$ *при* $1<q=p<\infty$, *и ограниченной квазиаддитивной функцией множества* $\Psi_{q,p}$ *при* $1<q<p<\infty$, *для любого семейства* Γ *кривых* $\gamma : [a,b] \to D'$ *в конденсаторе* $\mathcal{E} = ((\overline{Q(x,r)}, Q(x,R))$ *таких, что* $\gamma(a) \in \overline{Q(x,r)}$, $\gamma(b) \in \partial Q(x,R)$.

Емкость или модуль? Что лучше?
Расширение основной теоремы [В, СМЖ, 2021].

Комментарий:

в случае произвольного веса может быть только одностороннее неравенство: для любого кубического конденсатора $(\overline{Q(x,r)}, Q(x,R))$, $r \in (0,R)$, в D', имеем

$$\operatorname{mod}_p^{\omega}(\Gamma) \leq \operatorname{cap}\left(\mathcal{E}; L_p^1(D';\omega)\right)$$

$1 < q < p < \infty$, для любого семейства Γ кривых $\gamma : [a,b] \to D'$ в конденсаторе $\mathcal{E} = ((\overline{Q(x,r)}, Q(x,R))$ таких, что $\gamma(a) \in \overline{Q(x,r)}$, $\gamma(b) \in \partial Q(x,R)$.

Емкость или модуль? Что лучше? Расширение основной теоремы [В, СМЖ, 2021].

Комментарий:

в случае произвольного веса может быть только одностороннее неравенство: для любого кубического конденсатора $(\overline{Q(x,r)}, Q(x,R))$, $r \in (0,R)$, в D', имеем

$$\operatorname{mod}_p^{\omega}(\Gamma) \leq \operatorname{cap}\big(\mathcal{E}; L_p^1(D';\omega)\big)$$

$1 < q < p < \infty$, для любого семейства Γ кривых $\gamma : [a,b] \to D'$ в конденсаторе $\mathcal{E} = ((\overline{Q(x,r)}, Q(x,R))$ таких, что $\gamma(a) \in \overline{Q(x,r)}$, $\gamma(b) \in \partial Q(x,R)$.

Поэтому определение с модулем создает иллюзию, что класс изучаемых отображений *шире* сравнительно с емкостным определением.

3 функции множеств [В, Мат. сб. 2022].

Ассоциируем с $(q;p,\omega)$-морфизмом $\varphi : D \to D'$ три функции множеств:

1) $D' \supset W \mapsto \Phi(W) = \|\varphi^*_W\|^\sigma$, где $\|\varphi^*_W\|$ — норма оператора
$\varphi^*_W : \overset{\circ}{L}{}^1_p(W;\omega) \cap \operatorname{Lip}_l(W) \to L^1_q(D), \quad \varphi^*_W(u) = \varphi \circ u;$
$\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, если $1 \leq q < p < \infty$, и $\sigma = \infty$, если $q = p$;

3 функции множеств [В, Мат. сб. 2022].

Ассоциируем с $(q;p,\omega)$-морфизмом $\varphi : D \to D'$ три функции множеств:

1) $D' \supset W \mapsto \Phi(W) = \|\varphi_W^*\|^\sigma$, где $\|\varphi_W^*\|$ — норма оператора $\varphi_W^* : \overset{\circ}{L}{}^1_p(W;\omega) \cap \operatorname{Lip}_l(W) \to L^1_q(D)$, $\quad \varphi_W^*(u) = \varphi \circ u$; $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, если $1 \leq q < p < \infty$, и $\sigma = \infty$, если $q = p$;

2) $D' \supset W \mapsto \|K^{1,\omega}_{q,p}(\cdot) \mid L_\sigma(\varphi^{-1}(W))\|^\sigma = \int\limits_{\varphi^{-1}(W)} K_{q,p}(x,\varphi)^\sigma \, dx$;

3 функции множеств [В, Мат. сб. 2022].

Ассоциируем с $(q;p,\omega)$-морфизмом $\varphi: D\to D'$ три функции множеств:

1) $D'\supset W\mapsto \Phi(W)=\|\varphi^*_W\|^\sigma$, где $\|\varphi^*_W\|$ — норма оператора
$\varphi^*_W: \overset{\circ}{L}{}^1_p(W;\omega)\cap \mathrm{Lip}_l(W)\to L^1_q(D), \quad \varphi^*_W(u)=\varphi\circ u;$
$\frac{1}{\sigma}=\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$, если $1\le q<p<\infty$, и $\sigma=\infty$, если $q=p$;

2) $D'\supset W\mapsto \|K^{1,\omega}_{q,p}(\cdot)\mid L_\sigma(\varphi^{-1}(W))\|^\sigma=\int\limits_{\varphi^{-1}(W)} K_{q,p}(x,\varphi)^\sigma\,dx;$

3) $D'\supset W\mapsto V(W)=\sup\limits_{m,\mathcal{E}_i}\sum\limits_{i=1}^m \dfrac{\mathrm{cap}^{\frac{\sigma}{q}}\left(\varphi^{-1}(\mathcal{E}_i);L^1_q(D)\right)}{\mathrm{cap}^{\frac{\sigma}{p}}\left(\mathcal{E}_i;L^1_p(D';\omega)\right)},$
где $\{U_i\subset W\}$ — дизъюнктная состема открытых множеств, а $\mathcal{E}_i=(F_i,U_i)$ — конденсаторы, $i=1,2,\ldots,m\in\mathbb{N}$.

Теорема о совпадении функций множеств [В, Мат. сб. 2022].

Для $(q; p, \omega)$-морфизма $f : D \to D'$ три функции множества совпадают:

$$\Phi(W) = \|\varphi_W^*\|^\sigma = \|K_{q,p}^{1,\omega}(\cdot) \mid L_\sigma(\varphi^{-1}(W))\|^\sigma = V(N_c, W)$$

для любого открытого множества $W \in \mathcal{O}(D')$.

Определение гомеоморфизмов класса $\mathcal{Q}_{p,q}(D',\omega;D)$.

Гомеоморфизм $f : D' \to D$, $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, принадлежит классу $\mathcal{Q}_{p,q}(D',\omega;D)$, где $1 < q \leq p < \infty$ при $n \geq 3$ или $1 \leq q \leq p < \infty$ при $n = 2$, а $\omega \in L_{1,\mathrm{loc}}(D')$ — весовая функция, если

$$\operatorname{cap}^{\frac{1}{p}}\left(f(\mathcal{E}); L^1_p(D)\right) \leqslant K_p \operatorname{cap}^{\frac{1}{p}}\left(\mathcal{E}; L^1_p(D';\omega)\right), \quad q = p,$$

$$\operatorname{cap}^{\frac{1}{q}}\left(f(\mathcal{E}); L^1_q(D)\right)$$

$$\leqslant \Psi_{q,p}((Q(y,R) \setminus \overline{Q(y,r)})^{\frac{1}{\sigma}} \operatorname{cap}^{\frac{1}{p}}\left(\mathcal{E}; L^1_p(D';\omega)\right), \ q<p,$$

для всякого кубического конденсатора $\mathcal{E} = (\overline{Q(y,r)}, Q(y,R))$, расположенного в D', и образа $f(\mathcal{E}) = (f(\overline{Q(y,r)}), Q(y,R))$

1) с постоянной K_p при $q = p$ или

2) и ограниченной квазиаддитивной функцией $\Psi_{q,p}$ при $q < p$.

Частные случаи классов $\mathcal{Q}_{p,q}(D', \omega; D)$:

1) $n-1 < q < p = n$, $\omega \equiv 1$: [Кругликов В. И., Матем. сб. 1986];

Частные случаи классов $\mathcal{Q}_{p,q}(D', \omega; D)$:

1) $n-1 < q < p = n$, $\omega \equiv 1$: [Кругликов В. И., Матем. сб. 1986];

2) $q = p = n$: O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov. Moduli in Modern Mapping Theory. NY. Springer-Verlag, 2008;

Частные случаи классов $\mathcal{Q}_{p,q}(D', \omega; D)$:

1) $n-1 < q < p = n$, $\omega \equiv 1$: [Кругликов В. И., Матем. сб. 1986];

2) $q = p = n$: O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov. Moduli in Modern Mapping Theory. NY. Springer-Verlag, 2008;

3) $n-1 < q = p < n$: A. Golberg (2005), R. Salimov (2008).

Связь классов $\mathcal{Q}_{p,q}(D', \omega; D)$ с $(q; p, \omega)$-гомеоморфизмами:

Предложение.

Гомеомоморфизм $f : D' \to D$ *принадлежит классу* $\mathcal{Q}_{p,q}(D', \omega; D)$ *тогда и только тогда, когда обратный гомеоморфизм* $\varphi = f^{-1} : D \to D'$ *является* $(q; p, \omega)$*-гомеоморфизмом.*

Связь классов $\mathcal{Q}_{p,q}(D',\omega;D)$ с $(q;p,\omega)$-гомеоморфизмами:

Предложение.

Гомеомоморфизм $f:D'\to D$ принадлежит классу $\mathcal{Q}_{p,q}(D',\omega;D)$ тогда и только тогда, когда обратный гомеоморфизм $\varphi=f^{-1}:D\to D'$ является $(q;p,\omega)$-гомеоморфизмом.

Следствие.

Если в определении класса $\mathcal{Q}_{p,q}(D',\omega;D)$ емкостное неравенство заменить на модульное, мы получим тот же класс отображений.

$(n-1,n)$-квазиконформные гомеоморфизмы $\varphi : D \to D'$, $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, класса $W^1_{n,\mathrm{loc}}$ нашли применение в нелинейной теории упругости:

минимизировать функционал полной энергии

$$I(\varphi) = \int\limits_{\Omega} W(x, D\varphi)\, dx \qquad (1)$$

в классе *допустимых деформаций.*

$(n-1; n)$-гомеоморфизмы и нелинейная теория упругости

$(n-1, n)$*-квазиконформные гомеоморфизмы* $\varphi : D \to D'$, $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, класса $W^1_{n,\mathrm{loc}}$ нашли применение в нелинейной теории упругости:

минимизировать функционал полной энергии

$$I(\varphi) = \int\limits_{\Omega} W(x, D\varphi)\, dx \tag{1}$$

в классе *допустимых деформаций.*

Molchanova A., Vodopyanov S. *Injectivity almost everywhere and mappings with finite distortion in nonlinear elasticity* // Calculus of Variations and PDE. 2020. **59**, 17. P. 1–25. DOI: 10.1007/s00526-019-1671-4

Поливыпуклость и коэрцитивность

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с липшицевой границей, $W : \Omega \times \mathbb{M}^n \to \mathbb{R}$ — функция запасённой энергии такая, что

Поливыпуклость:

для множества $\mathbb{M}^n$ $(n \times n)$-матриц, существует выпуклая функция $G(x, \cdot) : \mathbb{M}^n \times \mathbb{M}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ такая, что для всех $F \in \mathbb{M}^n$, $\det F > 0$, выполнено равенство

$$G(x, F, \operatorname{adj} F, \det F) = W(x, F) \quad \text{п. вс. в } \Omega.$$

Пример: $W(F) = \det F$.

Поливыпуклость и коэрцитивность

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с липшицевой границей, $W : \Omega \times \mathbb{M}^n \to \mathbb{R}$ — функция запасённой энергии такая, что

Поливыпуклость:

для множества $\mathbb{M}^n$ $(n \times n)$-матриц, существует выпуклая функция $G(x, \cdot) : \mathbb{M}^n \times \mathbb{M}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ такая, что для всех $F \in \mathbb{M}^n$, $\det F > 0$, выполнено равенство

$$G(x, F, \operatorname{adj} F, \det F) = W(x, F) \quad \text{п. вс. в } \Omega.$$

Пример: $W(F) = \det F$.

Коэрцитивность:

существуют постоянная $\alpha > 0$ и функция $g \in L_1(\Omega)$ такие, что

$$W(x, F) \geq \alpha(||F||^n + g(x))$$

для почти всех $x \in \Omega$ и всех $F \in \mathbb{M}^n$, $\det F \geq 0$.

Допустимые деформации

Пусть $\Gamma = \partial\Omega$, $\varphi_0 \in W^1_n(\Omega)$.

Допустимые деформации

Пусть $\Gamma = \partial\Omega$, $\varphi_0 \in W_n^1(\Omega)$.

Допустимые деформации — это гомеоморфизмы класса:

$$\mathcal{A} = \Big\{ \psi \in W_n^1(\Omega),\ I(\psi) < \infty,\ \int\limits_{\Omega} \left(\frac{|D\psi(x)|^n}{J(x,\psi)} \right)^{n-1} dx < \infty,$$

$$\int\limits_{\Omega} \left(\frac{|\operatorname{adj} D\psi(x)|^n}{J(x,\psi)^{n-1}} \right)^{s} dx \leq M;$$

$$s > 1,\ \psi|_\Gamma = \varphi_0|_\Gamma \text{ п. вс. на } \Gamma,\ J(x,\psi) \geq 0 \text{ п. вс. в } \Omega \Big\}$$

Допустимые деформации

Пусть $\Gamma = \partial\Omega$, $\varphi_0 \in W^1_n(\Omega)$.

Допустимые деформации — это гомеоморфизмы класса:

$$\mathcal{A} = \Big\{\psi \in W^1_n(\Omega),\ I(\psi) < \infty,\ \int\limits_{\Omega} \left(\frac{|D\psi(x)|^n}{J(x,\psi)}\right)^{n-1} dx < \infty,$$

$$\int\limits_{\Omega} \left(\frac{|\operatorname{adj} D\psi(x)|^n}{J(x,\psi)^{n-1}}\right)^{s} dx \le M;$$

$$s > 1,\ \psi|_\Gamma = \varphi_0|_\Gamma \text{ п. вс. на } \Gamma,\ J(x,\psi) \ge 0 \text{ п. вс. в } \Omega\Big\}$$

ψ — $(n-1; n)$-гомеоморфизм; ψ^{-1} — $(n; \frac{ns}{s-1})$-гомеоморфизм;
С. К. Водопьянов. О регулярности отображений, обратных к соболевским. Матем. сб. 2012. Т. 203, № 10. p. 1383–1410.

Теорема (2020). **Пусть:**

1) *выполнены условия поливыпуклости и коэрцитивности на функцию* $W(x, F)$,

Теорема (2020). **Пусть:**

1) *выполнены условия поливыпуклости и коэрцитивности на функцию* $W(x, F)$,

2) $\varphi_0 : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega'}$ — *гомеоморфизм*,

Теорема (2020). **Пусть:**

1) *выполнены условия поливыпуклости и коэрцитивности на функцию* $W(x, F)$,

2) $\varphi_0 : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega'}$ — *гомеоморфизм*,

3) *множество допустимых деформаций* $\mathcal{A} \neq \emptyset$: $\inf\limits_{\psi \in \mathcal{A}} I(\psi) < \infty$.

Теорема (2020). **Пусть:**

1) *выполнены условия поливыпуклости и коэрцитивности на функцию* $W(x, F)$,

2) $\varphi_0 : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega'}$ — *гомеоморфизм,*

3) *множество допустимых деформаций* $\mathcal{A} \neq \emptyset$: $\inf\limits_{\psi \in \mathcal{A}} I(\psi) < \infty$.

Тогда существует, по крайней мере, один гомеоморфизм $\varphi \in \mathcal{A}$ *такой, что*

$$I(\varphi) = \inf_{\psi \in \mathcal{A}} I(\psi).$$

Теорема (2020). **Пусть:**

1) *выполнены условия поливыпуклости и коэрцитивности на функцию* $W(x, F)$,

2) $\varphi_0 : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega'}$ — *гомеоморфизм*,

3) *множество допустимых деформаций* $\mathcal{A} \neq \emptyset$: $\inf\limits_{\psi \in \mathcal{A}} I(\psi) < \infty$.

Тогда существует, по крайней мере, один гомеоморфизм $\varphi \in \mathcal{A}$ *такой, что*

$$I(\varphi) = \inf_{\psi \in \mathcal{A}} I(\psi).$$

Пример функции $W(F) = \operatorname{tr}(F^T F)^{\frac{3}{2}}$: функционал $I(\varphi)$ нельзя минимизировать методом работы
J.M. Ball. *Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity.* Arch. Ration. Mech. Anal. 63 (4) (1977) 337–403.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!