О топологических моделях интуиционистской эпистемической логики

Оноприенко Анастасия Александровна

Вторая конференция Математических центров России
(7–11 ноября 2022 г., МГУ, МИАН, г. Москва)

Интуиционистская эпистемическая логика

С. Артёмов и Т. Протопопеску провели глубокий анализ интуиционистской логики с модальностью знания и построили три формальные системы $\mathsf{IEL}^{-} \subset \mathsf{IEL} \subset \mathsf{IEL}^{+}$. Все эти логики являются расширениями интуиционисткой логики высказываний модальностью **K** (∇).

$\nabla(\alpha \to \beta) \to (\nabla\alpha \to \nabla\beta)$;

$\alpha \to \nabla\alpha$;

$\nabla\bot \to \bot$;

$\nabla\nabla\alpha \to \nabla\alpha$.

Это аксиомы H4 (IEL^{+})!

$\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$;

$\Box p \to p$;

$\dfrac{p}{\Box p}$;

$\Box p \to \Box\Box p$.

Это аксиомы S4!

Интуиционистская эпистемическая логика

$$\nabla(\alpha \to \beta) \to (\nabla\alpha \to \nabla\beta);$$
$$\alpha \to \nabla\alpha;$$
$$\nabla\bot \to \bot;$$
$$\nabla\nabla\alpha \to \nabla\alpha.$$

Логика с аксиомами 1,2,4 изучалась в ряде работ:

Х. Б. Карри — теория формальной выводимости (1950)

М. Фэтлоу, М. Мендлер, М. Уолтон — lax logic (1997)

Р. Голдблатт — логика топологии Гротендика (1981)

С. А. Мелихов — логика с аксиомами 1-4 в контексте совместной логики задач и высказываний (2013-2017)

Топологические модели интуиционистской логики и логики S4

Имеется непустое топологическое пространство (X, τ).

Интуиционистская логика

Переменные — открытые подмножества.

$|\bot| = \varnothing$

$|\alpha \vee \beta| = |\alpha| \cup |\beta|$

$|\alpha \wedge \beta| = |\alpha| \cap |\beta|$

$|\alpha \to \beta| = \mathrm{Int}((X \setminus |\alpha|) \cup |\beta|)$

Логика S4

Переменные — любые подмножества.

$|0| = \varnothing$

$|p \vee q| = |p| \cup |q|$

$|p \wedge q| = |p| \cap |q|$

$|p \to q| = (X \setminus |p|) \cup |q|$

$|\Box p| = \mathrm{Int}|p|$

Топологические модели со всюду плотным подмножеством

Пусть (X, τ) – произвольное непустое топологическое пространство и A — его всюду плотное подмножество.

Переменные — произвольные открытые подмножества.

Интерпретация булевых связок — как в топологических моделях интуиционистской логики.

$|\nabla\varphi| = X \setminus \mathrm{Cl}(A \setminus |\varphi|)$.

Иными словами, $|\nabla\varphi|$ — это объединение всех открытых множеств U, таких, что $U \cap A \subseteq |\varphi|$.

Топологические модели со всюду плотным подмножеством

Теорема

1) Если формула выводима в логике $\mathrm{H4}$, *то она истинна в любой топологической модели со всюду плотным множеством логики* $\mathrm{H4}$.
2) Если формула φ *невыводима в логике* $\mathrm{H4}$, *то существует топологическая модель со всюду плотным множеством логики* $\mathrm{H4}$, *в которой формула* φ *не является истинной.*

Битопологические модели

Пусть X — непустое множество, на котором заданы 2 топологии τ_1 и τ_2, причём выполнены два свойства:

1) $\tau_1 \subseteq \tau_2$;

2) для любого множества $M \in \tau_1$, выполнено $\mathrm{Int}_2\mathrm{Cl}_2 M \in \tau_1$ (что равносильно $\mathrm{Int}_1\mathrm{Cl}_2 M = \mathrm{Int}_2\mathrm{Cl}_2 M$).

Здесь Int_i и Cl_i обозначают операторы взятия внутренности и замыкания в топологии τ_i.

Битопологические модели

Переменные — произвольные подмножества, открытые в топологии τ_1.

Интерпретация булевых связок — как в топологических моделях интуиционистской логики (относительно τ_1).

$|\nabla\varphi| = \mathrm{Int}_2\mathrm{Cl}_2|\varphi|$.

Теорема

1) Если формула выводима в логике $\mathrm{H4}$*, то она истинна в любой битопологической модели.*
2) Если формула φ *невыводима в логике* $\mathrm{H4}$*, то существует битопологическая модель, в которой формула* φ *не является истинной.*

Примеры

В логике H4 выводимы формулы $\alpha \to \nabla\alpha$, $\nabla\alpha \to \neg\neg\alpha$.

1) Пусть τ_2 — дискретная топология. В такой модели $\nabla\alpha \leftrightarrow \alpha$.

2) Пусть $\tau_2 = \tau_1$. В такой модели $\nabla\alpha \leftrightarrow \neg\neg\alpha$.

Спасибо за внимание!