

# Logic v. Topology on $\omega$ -words

Vladislav Orekhovskii  
Saint-Petersburg State University

Victor Selivanov  
A.P. Ershov Institute of  
Informatics Systems

November 7, 2022

# Introduction

The theory of regular languages of finite and infinite words is an important field in Computer Science. It has connections with both theory (system verifications) and applications (computer architecture, compilers).

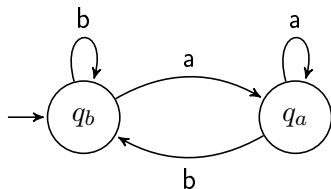
# Regular $\omega$ -languages

Consider a deterministic Muller automaton (DM)

$\mathcal{M} = (Q, A, \delta, q_0, F)$ , where  $F \subseteq P(Q)$ .

For each  $x \in A^\omega$  denote the corresponding sequence of states by  $y \in Q^\omega$ . Let  $Inf(y) = \{q \in Q \mid q \text{ is infinitely often in } y\}$

We say that an  $\omega$ -word  $x$  is recognizable by  $\mathcal{M} \iff Inf(y) \in F$



Example:

Take  $F = \{\{q_a\}\}$ .

This automaton recognizes the language  $(a \cup b)^* a^\omega$ .

## Definition

$\mathcal{R}$  is the class of DM-recognizable languages, called the  $\omega$ -regular languages.

# The Wagner hierarchy

Wagner hierarchy is the most fundamental topological classification of regular  $\omega$ -languages. It's levels are defined in terms of  $\omega$ -automata.

# The Wagner hierarchy

Wagner hierarchy is the most fundamental topological classification of regular  $\omega$ -languages. It's levels are defined in terms of  $\omega$ -automata. The set  $A^\omega$  carries the Cantor topology with the open sets of the form  $XA^\omega$ , where  $X \subseteq A^*$ .

## Definition

*A language  $L_1 \subseteq A^\omega$  is Wadge-reducible to  $L_2 \subseteq A^\omega$  ( $L_1 \leq_W L_2$ ), if there exists a continuous function  $f$  such that*

$$x \in L_1 \iff f(x) \in L_2.$$

The Wagner hierarchy coincides with the structure of Wadge degrees of regular  $\omega$ -languages  $(\mathcal{R}, \leq_W)$ .

## Logic on words

Consider a signature  $\sigma = \{\leq, Q_a | a \in A\}$ . An  $\omega$ -word  $x$  can be viewed as a structure of the signature  $\sigma$   $\mathbf{x} = \{\omega, \leq, Q_a, \dots\}$ , where  $\leq$  is the order in the usual sense,  $Q_a(i) \iff x(i) = a$ .

We also consider some expansions of  $\sigma$ :  $\tau = \sigma \cup \{s\}$  and

$\sigma_{mod} = \cup_{d < \omega} \{P_d^r\}_{r < d} \cup \sigma$ , where  
 $s(n) = n + 1, P_d^r(i) \iff i \bmod d \equiv r$ .

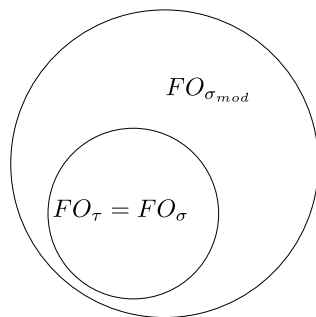
### Definition

For a sentence  $\phi$  let

$$L_\phi = \{x \in A^\omega \mid x \models \phi\}$$

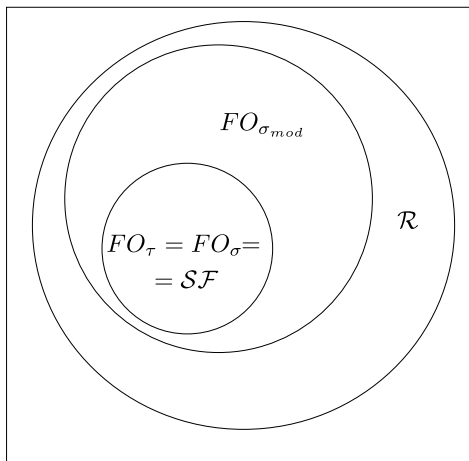
# Relations between classes

□



# Relations between classes

□



$\mathcal{SF}$ - аperiодические (беззвёздные) языки

# The quantifier-alternation hierarchy

Consider the hierarchy  $\{\Sigma_n^\sigma\}_{n \in \omega}$ , induced by the quantifier-alternation hierarchy of sentences of signature  $\sigma$ .

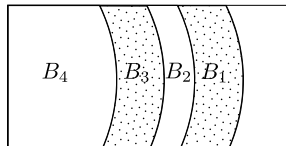
# The difference hierarchy

The quantifier-alternation hierarchy  $\{\Sigma_n^\sigma\}_{n \in \omega}$  can be refined by the difference hierarchy  $\{\Sigma_n^\sigma(k)\}_{n \in \omega, k \in \omega}$ .

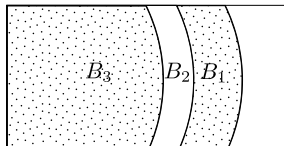
The class  $\Sigma_n^\sigma(k)$  consists of languages of the form

$\bigcup_{n \in \omega} (B_i \setminus B_{i+1})$ , where  $B_i \in \Sigma_n^\sigma$ ,  $B_{i+1} \subseteq B_i$  and  $B_k = \emptyset$ .

The language on the left is in  $\Sigma_n^\sigma(4)$ ; the language on the right is in  $\Sigma_n^\sigma(3)$ .

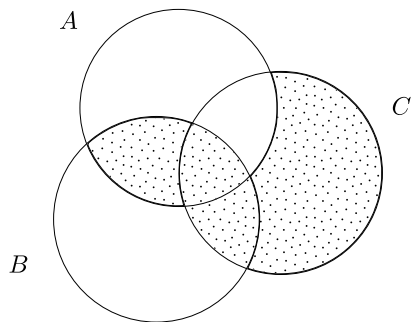


$$C = (B_1 \setminus B_2) \cup (B_3 \setminus B_4)$$



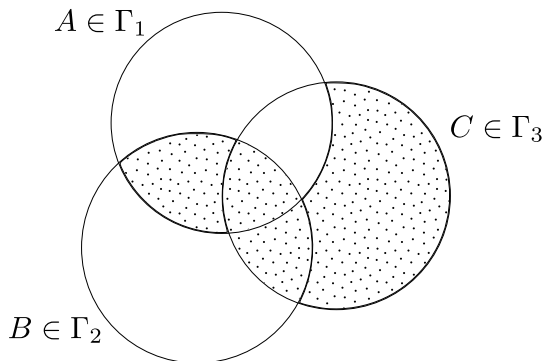
$$C = (B_1 \setminus B_2) \cup B_3$$

## Separated union



$$Sep(A, B, C) = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap C)$$

## Separated union



$$Sep(A, B, C) = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap C)$$

$$Sep(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3) = \{Sep(A, B, C) \mid A \in \Gamma_1, B \in \Gamma_2, C \in \Gamma_3\}$$

# A motivating example

Consider

$$\Sigma_1^\sigma + \Sigma_2^\sigma = \{X \Delta Y \mid X \in \Sigma_1^\sigma, Y \in \Sigma_2^\sigma\}.$$

# A motivating example

Consider

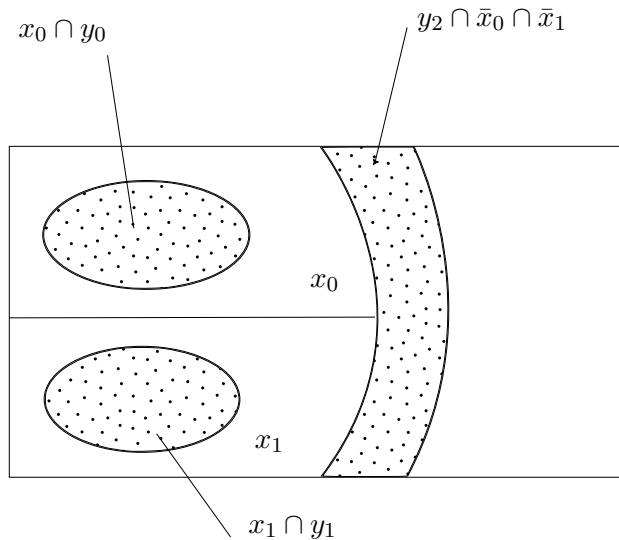
$$\Sigma_1^\sigma + \Sigma_2^\sigma = \{X \triangle Y \mid X \in \Sigma_1^\sigma, Y \in \Sigma_2^\sigma\}.$$

$$\Sigma_1^\sigma + \Sigma_2^\sigma = Sep(\Sigma_1^\sigma, \Pi_2^\sigma, \Sigma_2^\sigma) = \mathcal{S}_{\omega+\omega}$$

The hierarchy  $\{\Sigma_n^\sigma\}_{n \in \omega}$  can be refined by the fine hierarchy  $\{\mathcal{S}_\alpha\}_{\alpha < \varepsilon_0}$ , where

$$\varepsilon_0 = \sup\{\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \dots\}.$$

## Biseparated union



$$\text{Bisep}(X, Y_1, Y_2, Y_3) = \{x_0 y_0 \cup x_1 y_1 \cup \bar{x}_0 \bar{x}_1 y_2 \mid x_0 x_1 y_0 = x_0 x_1 y_1\}.$$

# The fine hierarchy

Let  $B = (B, \cup, \cap, \neg, 0, 1)$  be a Boolean algebra. By an  $\omega$ -base in  $B$  we mean any sequence  $L = \{L_n\}_{n < \omega}$  of sublattices of  $B$  such that  $L_n \cup \check{L}_n \subseteq L_{n+1}$ , where  $\check{L}_n = \{\bar{a} \mid a \in L_n\}$ .

The fine hierarchy over  $L$  is the sequence  $\{S_\alpha\}_{\alpha < \epsilon_0}$ , where  $S_\alpha = S_\alpha^0$  and the classes  $S_\alpha^n (n < \omega)$  are defined by induction on  $\alpha$ :

1.  $S_0^n = \{0\}$ ;
2.  $S_\gamma^n = S_\gamma^{n+1}$  for  $\gamma > 0$ ;
3.  $S_{\beta+1}^n = \text{Bisep}(L_n, S_\beta^n, \check{S}_\beta^n, S_0^n)$  for each  $\beta < \epsilon_0$ ;
4.  $S_{\beta+\gamma}^n = \text{Bisep}(L_n, S_\beta^n, \check{S}_\beta^n, S_\gamma^n)$  for  $\gamma > 0$  and  $\beta$  of the form  $\beta = \gamma \cdot \beta_1 > 0$ .

The sequence  $\{S_\alpha\}_{\alpha < \epsilon_0}$  is called the fine hierarchy over  $L$ .

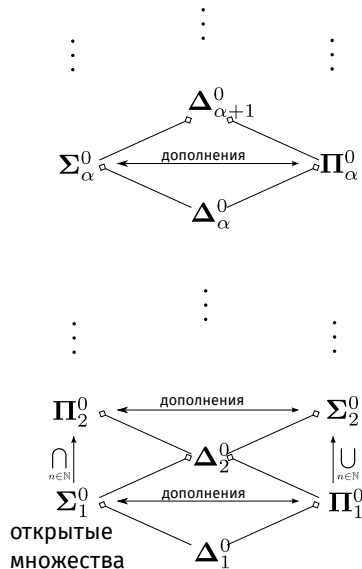
# Topology on words

The set  $A^\omega$  carries the Cantor topology with the open sets of the form  $XA^\omega$ , where  $X \subseteq A^*$ .

Borel sets of  $A^\omega$  can be arranged in an hierarchy of length  $\omega_1$ , called the Borel hierarchy  $\{\Sigma_\alpha^0\}_{\alpha < \omega_1}$ .

# The Borel hierarchy

□



The Borel hierarchy  $\{\Sigma_\alpha^0\}_{\alpha < \omega_1}$  can be refined by the difference hierarchy  $\{\Sigma_n^0(k)\}_{n < \omega, k < \omega}$  of length  $\omega^2$  and the fine hierarchy  $\{\Sigma_\alpha\}_{\alpha < \varepsilon_0}$ . This FH coincides with an important fragment of the Wadge hierarchy.

The Borel hierarchy  $\{\Sigma_\alpha^0\}_{\alpha < \omega_1}$  can be refined by the difference hierarchy  $\{\Sigma_n^0(k)\}_{n < \omega, k < \omega}$  of length  $\omega^2$  and the fine hierarchy  $\{\Sigma_\alpha\}_{\alpha < \varepsilon_0}$ . This FH coincides with an important fragment of the Wadge hierarchy.

In the case of the  $\omega$ -regular languages the fragment  $\{\Sigma_\alpha\}_{\alpha < \omega^\omega}$  coincides with the Wagner hierarchy ([3]).

# Problem

Are there any relations between logical and topological classifications of the regular  $\omega$ -languages?

## Previously known results

$$\Sigma_n^\sigma \subseteq \Sigma_n^0$$

L. Landweber [2]  $\mathcal{R} \subseteq BC(\Sigma_2^0)$

V. Selivanov [1]  $\bigcup_{\alpha < \omega^\omega} \Sigma_\alpha = BC(\Sigma_2^0)$ .

V. Selivanov [1]  $\mathcal{S}_\alpha \subseteq \Sigma_\alpha$  for each  $\alpha < \varepsilon_0$ .

## Previously known results

$$\Sigma_n^\sigma \subseteq \Sigma_n^0$$

L. Landweber [2]  $\mathcal{R} \subseteq BC(\Sigma_2^0)$

V. Selivanov [1]  $\bigcup_{\alpha < \omega^\omega} \Sigma_\alpha = BC(\Sigma_2^0)$ .

V. Selivanov [1]  $\mathcal{S}_\alpha \subseteq \Sigma_\alpha$  for each  $\alpha < \varepsilon_0$ .

It follows that with the restriction to  $\omega$ -regular languages it makes sense to work only with the levels below  $\omega^\omega$ .

# Results

## Theorem

1. For each  $\alpha < \omega^\omega$  there exists a language  $N_\alpha \subseteq A_\alpha^\omega$  such that  $N_\alpha \in \mathcal{S}_\alpha^\sigma$ , but  $N_\alpha \notin \mathbf{\Pi}_\alpha$ .
2. For each  $\alpha < \omega^\omega$  there exists a language  $N_\alpha^{mod} \subseteq \{0,1\}^\omega$  such that  $N_\alpha^{mod} \in \mathcal{S}_\alpha^{mod}$ , but  $N_\alpha^{mod} \notin \mathbf{\Pi}_\alpha$ .
3. For each  $\alpha < \omega^\omega$  there exists a language  $N_\alpha^\tau \subseteq \{0,1\}^\omega$ , such that  $N_\alpha^\tau \in \mathcal{S}_\alpha^\tau$ , but  $N_\alpha^\tau \notin \mathbf{\Pi}_\alpha$ .

## Corollary

The logical fine hierarchy  $\{\mathcal{S}_\alpha^\sigma\}_{\alpha < \omega^\omega}$  does not collapse.

Thank you for your attention!

# Список литературы

-  Селиванов В.Л. Тонкие иерархии арифметических множеств и определимые индексные множества. // Тр. Ин-та математики. 1989. Т. 12. С. 165-185.
-  Landweber L.H. Decision problems for  $\omega$ -automata. // Math. Systems Theory. 1969. Vol. 3. P. 376-384.
-  Selivanov V.L. Fine hierarchy of regular  $\omega$ -languages. // Theoret. Comput. Sci. 1998. Vol. 191, №1-2. P. 37-59.
-  Wagner K. On  $\omega$ -regular sets. // Inform. And Control. 1973. Vol. 43, №2. P. 123-177.
-  Wadge W.W. Reducibility and determinateness on the Baire space: Ph.D. thesis. / University of California, Berkeley. 1983.

# О логических и топологических классификациях регулярных омега-языков

В. Н. Ореховский  
СПбГУ

В. Л. Селиванов  
ИСИ СО РАН

7 ноября 2022

# Введение

Теория регулярных языков конечных и бесконечных слов - центральный раздел информатики. Он связан и с теоретическими вопросами (например, спецификация и верификация систем), и с приложениями (архитектура компьютера, построение компиляторов).

## Регулярные $\omega$ -языки

Рассмотрим детерминированный автомат Мюллера (ДМ)

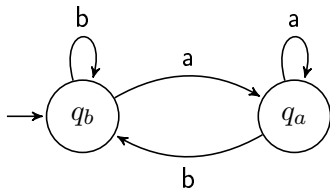
$\mathcal{M} = (Q, A, \delta, q_0, F)$ , где  $F \subseteq P(Q)$ .

Сопоставим  $x \in A^\omega \mapsto y \in Q^\omega$  и обозначим

$Inf(y) = \{q \in Q \mid q \text{ встречается бесконечно часто в слове } y\}$

block=fill Определим, что  $\omega$ -слово  $x$  распознается

$\mathcal{M} \iff Inf(y) \in F$



Пример:

Пусть  $F = \{\{q_a\}\}$ .

Распознаваемый язык:

$(a \cup b)^* a^\omega$ .

### Определение

$\mathcal{R}$  - класс языков, распознаваемых ДМ -  $\omega$ -регулярные языки.

# Иерархия Вагнера

Важным объектом исследования теории автоматов на  $\omega$ -словах является иерархия Вагнера ([4]). Она имеет сложное техническое определение в терминах автоматов.

# Иерархия Вагнера

Важным объектом исследования теории автоматов на  $\omega$ -словах является иерархия Вагнера ([4]). Она имеет сложное техническое определение в терминах автоматов.

Введем на  $A^\omega$  канторовскую топологию с открытыми множествами вида  $XA^\omega$ , где  $X \subseteq A^*$ .

## Определение

Язык  $L_1 \subseteq A^\omega$  сводится к языку  $L_2 \subseteq A^\omega$  по Вэджу ( $L_1 \leq_W L_2$ ), если существует непрерывная функция  $f$  такая, что

$$x \in L_1 \iff f(x) \in L_2.$$

Иерархия Вагнера совпадает со структурой степеней Вэджа регулярных  $\omega$ -языков  $(\mathcal{R}, \leq_W)$ .

## Логический подход

Рассмотрим сигнатуру  $\sigma = \{\leq, Q_a | a \in A\}$ .  $\omega$ -слово  $x$  можно рассматривать как структуру сигнатуры  $\sigma$   $\mathbf{x} = \{\omega, \leq, Q_a, \dots\}$ , где  $\leq$  - порядок в обычном смысле,  $Q_a(i) \iff x(i) = a$ .

Также можно рассматривать сигнатуры  $\tau = \sigma \cup \{s\}$  и

$\sigma_{mod} = \cup_{d < \omega} \{P_d^r\}_{r < d} \cup \sigma$ , где  
 $s(n) = n + 1, P_d^r(i) \iff i \bmod d \equiv r$ .

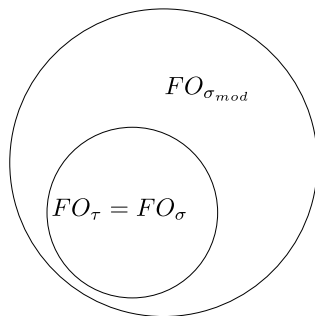
### Определение

*Язык, аксиоматизируемый предложением  $\phi$  -*

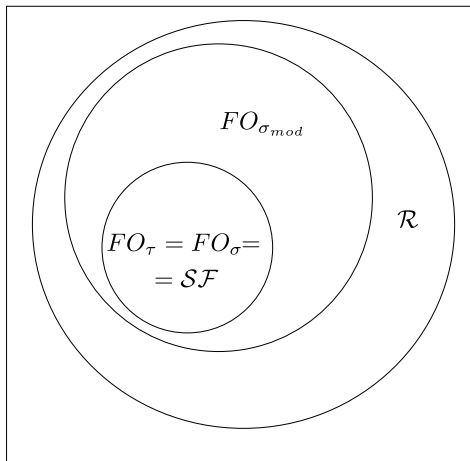
$$L_\phi = \{x \in A^\omega \mid x \models \phi\}$$

# Соотношения между классами

□



# Соотношения между классами



$\mathcal{SF}$ - апериодические (беззвёздные) языки

# Кванторная иерархия

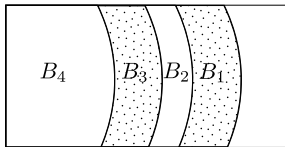
Рассмотрим иерархию  $\{\Sigma_n^\sigma\}_{n \in \omega}$ , индуцируемую иерархией предложений сигнатуры  $\sigma$  по числу перемен кванторов в предваренной нормальной форме.

## Разностная иерархия

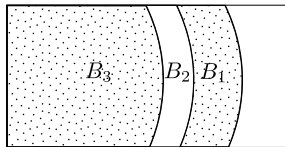
Кванторной иерархии  $\{\Sigma_n^\sigma\}_{n \in \omega}$  можно сопоставить разностную иерархию  $\{\Sigma_n^\sigma(k)\}_{n \in \omega, k \in \omega}$ .

Класс  $\Sigma_n^\sigma(k)$  состоит из языков вида  $\cup_{i \in \omega} (B_i \setminus B_{i+1})$ , где  $B_i \in \Sigma_n^\sigma$ ,  $B_{i+1} \subseteq B_i$  и  $B_k = \emptyset$ .

Слева - пример языка из класса  $\Sigma_n^\sigma(4)$ , справа - из  $\Sigma_n^\sigma(3)$ .

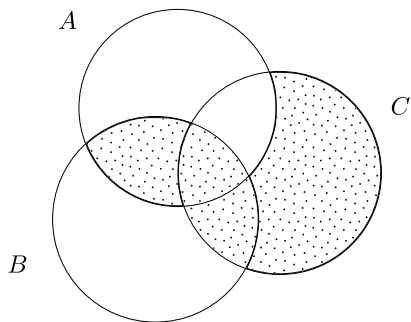


$$C = (B_1 \setminus B_2) \cup (B_3 \setminus B_4)$$



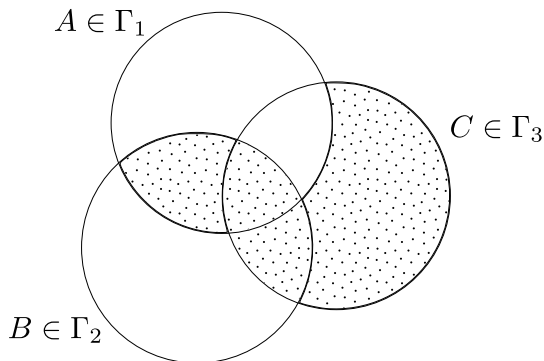
$$C = (B_1 \setminus B_2) \cup B_3$$

## Операция Sep



$$Sep(A, B, C) = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap C)$$

## Операция Sep



$$Sep(A, B, C) = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap C)$$

$$Sep(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3) = \{Sep(A, B, C) \mid A \in \Gamma_1, B \in \Gamma_2, C \in \Gamma_3\}$$

# Мотивирующий пример

Рассмотрим

$$\Sigma_1^\sigma + \Sigma_2^\sigma = \{X \Delta Y \mid X \in \Sigma_1^\sigma, Y \in \Sigma_2^\sigma\}.$$

# Мотивирующий пример

Рассмотрим

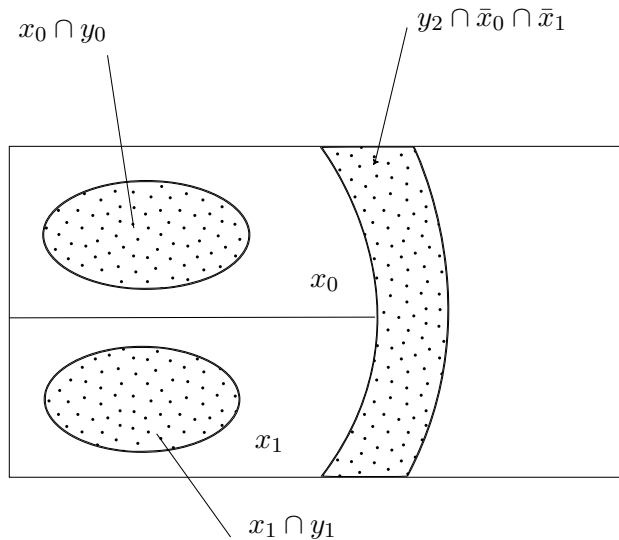
$$\Sigma_1^\sigma + \Sigma_2^\sigma = \{X \Delta Y \mid X \in \Sigma_1^\sigma, Y \in \Sigma_2^\sigma\}.$$

$$\Sigma_1^\sigma + \Sigma_2^\sigma = \text{Sep}(\Sigma_1^\sigma, \Pi_2^\sigma, \Sigma_2^\sigma) = \mathcal{S}_{\omega+\omega}$$

Иерархии  $\{\Sigma_n^\sigma\}_{n \in \omega}$  сопоставим тонкую иерархию  $\{\mathcal{S}_\alpha\}_{\alpha < \varepsilon_0}$ , где

$$\varepsilon_0 = \sup\{\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \dots\}.$$

# Операция Bisep



$$\text{Bisep}(X, Y_1, Y_2, Y_3) = \{x_0 y_0 \cup x_1 y_1 \cup \bar{x}_0 \bar{x}_1 y_2 \mid x_0 x_1 y_0 = x_0 x_1 y_1\}.$$

# Тонкая иерархия

Рассмотрим булеву алгебру  $B = (B, \cup, \cap, \neg, 0, 1)$ .  $\omega$ -базой в  $B$  будем называть любую последовательность  $L = \{L_n\}_{n < \omega}$  подрешёток  $B$  таких, что  $L_n \cup \check{L}_n \subseteq L_{n+1}$ , где  $\check{L}_n = \{\bar{a} \mid a \in L_n\}$ .

Определим последовательность  $\{S_\alpha\}_{\alpha < \epsilon_0}$ , где  $S_\alpha = S_\alpha^0$ , а классы  $S_\alpha^n$  ( $n < \omega$ ) определяются индукцией по  $\alpha$ :

1.  $S_0^n = \{0\}$ ;
2.  $S_\gamma^n = S_\gamma^{n+1}$  для  $\gamma > 0$ ;
3.  $S_{\beta+1}^n = \text{Bisep}(L_n, S_\beta^n, \check{S}_\beta^n, S_0^n)$  для всех  $\beta < \epsilon_0$ ;
4.  $S_{\beta+\gamma}^n = \text{Bisep}(L_n, S_\beta^n, \check{S}_\beta^n, S_\gamma^n)$  для  $\gamma > 0$  и  $\beta$  вида  $\beta = \gamma \cdot \beta_1 > 0$

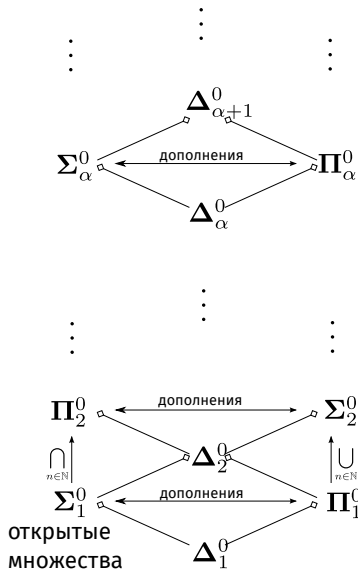
Последовательность  $\{S_\alpha\}_{\alpha < \epsilon_0}$  называется тонкой иерархией над  $L$ .

# Топологический подход

Введем на  $A^\omega$  канторовскую топологию с открытыми множествами вида  $XA^\omega$ , где  $X \subseteq A^*$ .

Рассмотрим борелевскую иерархию  $\{\Sigma_\alpha^0\}_{\alpha < \omega_1}$  типа  $\omega_1$ .

# Борелевская иерархия



Борелевской иерархии  $\{\Sigma_\alpha^0\}_{\alpha < \omega_1}$  можно сопоставить разностную иерархию  $\{\Sigma_n^0(k)\}_{n < \omega, k < \omega}$  типа  $\omega^2$  и тонкую иерархию  $\{\Sigma_\alpha\}_{\alpha < \varepsilon_0}$ , совпадающую с важным фрагментом иерархии Вэджа.

Борелевской иерархии  $\{\Sigma_\alpha^0\}_{\alpha < \omega_1}$  можно сопоставить разностную иерархию  $\{\Sigma_n^0(k)\}_{n < \omega, k < \omega}$  типа  $\omega^2$  и тонкую иерархию  $\{\Sigma_\alpha\}_{\alpha < \varepsilon_0}$ , совпадающую с важным фрагментом иерархии Вэджа.

В случае  $\omega$ -регулярных языков начальный фрагмент тонкой иерархии  $\{\Sigma_\alpha\}_{\alpha < \omega^\omega}$  совпадает с иерархией Вагнера ([3]).

# Задача

Существуют ли какие-то соотношения между логической и топологической классификацией регулярных  $\omega$ -языков, и, если существуют, то какие?

# Известные ранее результаты

$$\Sigma_n^\sigma \subseteq \Sigma_n^0$$

Л.Х. Ландвебер [2]  $\mathcal{R} \subseteq BC(\Sigma_2^0)$

В.Л. Селиванов [1]  $\bigcup_{\alpha < \omega^\omega} \Sigma_\alpha = BC(\Sigma_2^0)$ .

В.Л. Селиванов [1]  $\mathcal{S}_\alpha \subseteq \Sigma_\alpha$  для всех  $\alpha < \varepsilon_0$ .

# Известные ранее результаты

$$\Sigma_n^\sigma \subseteq \Sigma_n^0$$

Л.Х. Ландвебер [2]  $\mathcal{R} \subseteq BC(\Sigma_2^0)$

В.Л. Селиванов [1]  $\bigcup_{\alpha < \omega^\omega} \Sigma_\alpha = BC(\Sigma_2^0)$ .

В.Л. Селиванов [1]  $\mathcal{S}_\alpha \subseteq \Sigma_\alpha$  для всех  $\alpha < \varepsilon_0$ .

Следовательно, в случае  $\omega$ -регулярных языков для обеих тонких иерархий имеет смысл рассматривать только уровни, меньшие  $\omega^\omega$ .

# Результаты

## Теорема

1. Для любого  $\alpha < \omega^\omega$  верно, что существует язык  $N_\alpha \subseteq A_\alpha^\omega$ , принадлежащий классу  $\mathcal{S}_\alpha^\sigma$ , но не принадлежащий классу  $\Pi_\alpha$ .
2. Для любого  $\alpha < \omega^\omega$  верно, что существует язык  $N_\alpha^{mod} \subseteq \{0, 1\}^\omega$ , принадлежащий классу  $\mathcal{S}_\alpha^{mod}$ , но не принадлежащий классу  $\Pi_\alpha$ .
3. Для любого  $\alpha < \omega^\omega$  верно, что существует язык  $N_\alpha^\tau \subseteq \{0, 1\}^\omega$ , принадлежащий классу  $\mathcal{S}_\alpha^\tau$ , но не принадлежащий классу  $\Pi_\alpha$ .

## Следствие

Логическая тонкая иерархия  $\{\mathcal{S}_\alpha^\sigma\}_{\alpha < \omega^\omega}$  не схлопывается.

Спасибо за внимание!

# Список литературы

-  Селиванов В.Л. Тонкие иерархии арифметических множеств и определимые индексные множества. // Тр. Ин-та математики. 1989. Т. 12. С. 165-185.
-  Landweber L.H. Decision problems for  $\omega$ -automata. // Math. Systems Theory. 1969. Vol. 3. P. 376-384.
-  Selivanov V.L. Fine hierarchy of regular  $\omega$ -languages. // Theoret. Comput. Sci. 1998. Vol. 191, №1-2. P. 37-59.
-  Wagner K. On  $\omega$ -regular sets. // Inform. And Control. 1973. Vol. 43, №2. P. 123-177.
-  Wadge W.W. Reducibility and determinateness on the Baire space: Ph.D. thesis. / University of California, Berkeley. 1983.