Некоторые свойства решений уравнений Власова–Пуассона с внешним магнитным полем

А.Л.Скубачевский

Математический институт
Российского Университета Дружбы Народов,
Московский центр фундаментальной и прикладной математики
(Москва, Россия)

Москва, 7 ноября 2022 г.

Уравнениям Власова посвящена обширная литература, см. [1–13,15–20] и имеющуюся там библиографию. Одним из наиболее важных приложений смешанных задач для уравнений Власова–Пуассона является термоядерный синтез. Как известно [13], в случае попадания значительного числа частиц на стенки реактора может произойти разрушение реактора. Для удержания заряженных частиц на некотором расстоянии от стенок реактора используется внешнее магнитное поле. С точки зрения дифференциальных уравнений это означает, что внешнее магнитное поле должно обеспечить существование решений системы Власова–Пуассона с носителями функций плотности распределения заряженных частиц, лежащих на некотором расстоянии от границы области. Существование таких решений рассматривалось в работах [4,5,18,19]. Наличие ограниченного внешнего магнитного поля в уравнениях Власова–Пуассона и его влияние на удержание двукомпонентной плазмы на определенном расстоянии от границы области является принципиальным отличием от других математических исследований.

В данной работе для указанных решений получена априорная оценка напряженности самосогласованного электрического поля через начальные функции плотности распределения заряженных частиц в случае бесконечного цилиндра, который соответствует реактору типа пробочной ловушки.

Fig.1. Tokamak.

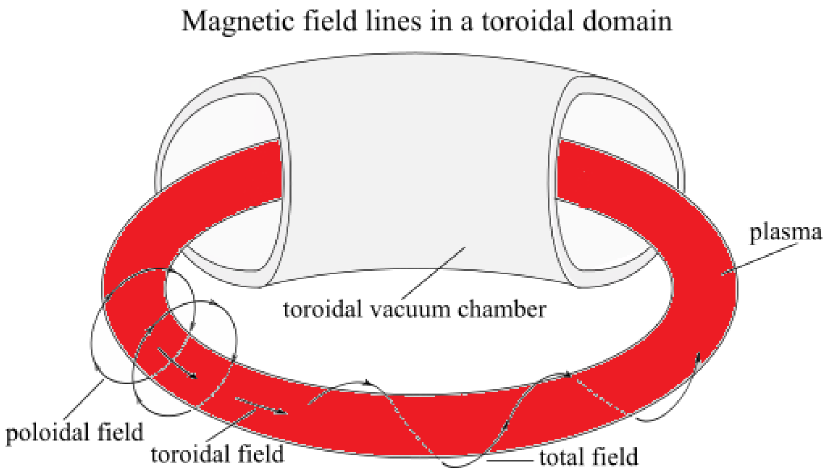
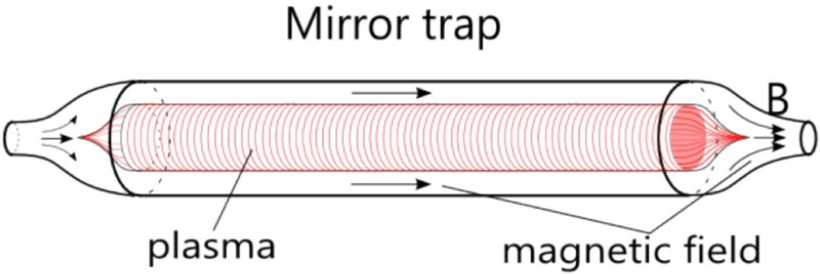
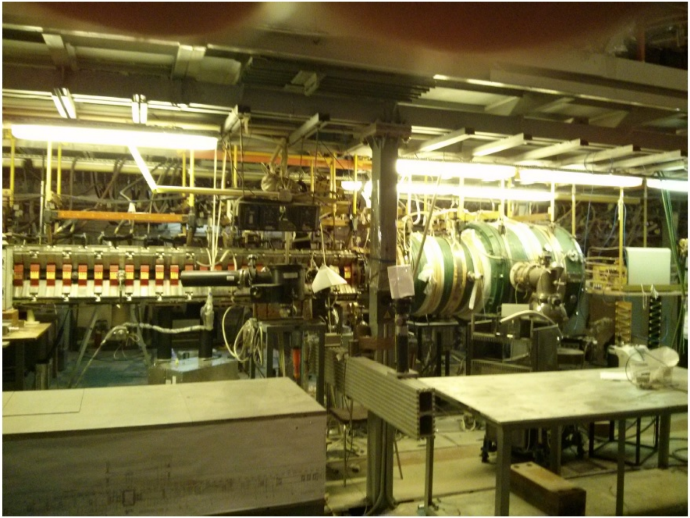


Fig.2. Termonuclear reactor.



Thermonuclear reactor



Рассмотрим систему уравнений Власова–Пуассона

$$-\Delta\varphi(x,t) = 4\pi e \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{\beta} \beta f^{\beta}(x,v,t)\,dv, \quad x \in Q,\ t \in (0,T), \tag{1}$$

$$\frac{\partial f^{\beta}}{\partial t} + \left(v, \nabla_x f^{\beta}\right) + \frac{\beta e}{m_{\beta}} \left(-\nabla_x \varphi + \frac{1}{c}[v,B], \nabla_v f^{\beta}\right) = 0,$$
$$x \in Q,\ v \in \mathbb{R}^3,\ t \in (0,T),\ \beta = \pm 1, \tag{2}$$

с начальными условиями

$$f^{\beta}(x,v,t)|_{t=0} = f_0^{\beta}(x,v), \quad x \in \overline{Q},\ v \in \mathbb{R}^3,\ \beta = \pm 1, \tag{3}$$

и краевым условием Дирихле

$$\varphi(x,t) = 0, \qquad x \in \partial Q,\ t \in (0,T). \tag{4}$$

Здесь $Q = G \times \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с границей $\partial G \subset C^\infty$, $\partial Q = \partial G \times \mathbb{R}$, $f^\beta = f^\beta(x, v, t)$ — функция плотности распределения положительно заряженных ионов, если $\beta = +1$, и электронов, если $\beta = -1$, в точке x, со скоростью v в момент времени t; $f_0^\beta(x, v) \geq 0$ — начальные функции плотности распределения; $\varphi = \varphi(x, t)$ — потенциал самосогласованого электрического поля; ∇_x и ∇_v — градиенты по x и v, соответственно; m_{+1} и m_{-1} — массы иона и электрона; e — заряд электрона; c — скорость света; B — индукция внешнего магнитного поля; $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$; $[\cdot, \cdot]$ — векторное произведение в $\mathbb{R}^3$.

Обозначим через $C^k(\mathbb{R}^n)$ ($C^k(\overline{Q})$), $k \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$, пространство функций непрерывных в $\mathbb{R}^n$ ($\overline{Q}$) и имеющих непрерывные производные в $\mathbb{R}^n$ ($\overline{Q}$) вплоть до k–го порядка с конечной нормой

$$\|u\|_k = \max_{|\alpha| \leq k} \sup_x |D^\alpha u(x)|, \qquad k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k.$$

Введем пространство $C^1\left(\overline{Q}\times\mathbb{R}^3\times[0,T]\right)$ непрерывных и ограниченных в $\overline{Q}\times\mathbb{R}^3\times[0,T]$ функций, имеющих в $\overline{Q}\times\mathbb{R}^3\times[0,T]$ все производные первого порядка, ограниченные и непрерывные в $\overline{Q}\times\mathbb{R}^3\times[0,T]$.
Пусть $\mathring{C}^k(\mathbb{R}^n)$, $k,n\in\mathbb{N}$, — пространство k раз непрерывно дифференцируемых функций в $\mathbb{R}^n$ с компактными носителями.
Обозначим через $C_0^k(\overline{Q})$, $k\geq 0$, $k\in\mathbb{Z}$, замыкание множества функций из $C^k(\overline{Q})$ с компактными в $\overline{Q}$ носителями.
Будем обозначать $\hat{C}^k(\mathbb{R}^3)$ пространство вектор–функций $Y=(Y_1,Y_2,Y_3):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ с координатами $Y_i\in C^k(\mathbb{R}^3)$, $k\in\mathbb{N}$.
Введем банахово пространство $C\left([0,T],C_0^k(\overline{Q})\right)$, $k\in\mathbb{Z}$, $k\geq 0$, непрерывных функций $[0,T]\ni t\mapsto\varphi(\cdot,t)\in C_0^k(\overline{Q})$ с нормой

$$\|\varphi\|_{k,T}=\sup_{0\leq t\leq T}\|\varphi(\cdot,t)\|_k.$$

Обозначим

$$M_{1,R} = \left\{\varphi \in C\left([0,\,T], C_0^1(\overline{Q})\right) : \varphi|_{\partial Q} = 0, \||\nabla\varphi|\|_{0,T} \le R\right\},$$

где $R > 0$. Очевидно, что $M_{1,R}$ — полное метрическое пространство с метрикой $\rho_{1,R}(\varphi,\psi) = \|\varphi - \psi\|_{1,T}$.
Будем обозначать $W_p^k(Q)$, $k \in \mathbb{N}$, $p \ge 2$, пространство Соболева функций $v \in L_p(Q)$, имеющих все обобщенные производные $D^\alpha v \in L_p(Q)$, $|\alpha| \le k$, с нормой

$$\|v\|_{W_p^k(Q)} = \left\{\sum_{|\alpha|\le k} \int\limits_Q |D^\alpha v(x)|^p dx\right\}^{1/p}.$$

Определение 1. Вектор–функцию $\{\varphi, f^\beta\}$,
$\varphi \in C\left([0,\,T], C_0^2(\overline{Q})\right)$, $f^\beta \in C^1\left(\overline{Q} \times \mathbb{R}^3 \times [0,\,T]\right)$, $\beta = \pm 1$, мы назовем классическим решением задачи (1)–(4), если $\{\varphi, f^\beta\}$ удовлетворяет уравнениям (1), (2) и условиям (3), (4).

Пусть $B_r(x^0) := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x - x^0| < r\}$, $B_r := B_r(0)$, $|B_r| := 4\pi r^3/3$ и $G_\delta := \{x' \in G : \mathrm{dist}(x', \partial G) > \delta\}$, $Q_\delta := \{x \in Q : \mathrm{dist}(x, \partial Q) > \delta\}$, где $\delta > 0$, $x' = (x_1, x_2)$.

Предположим, что выполнены следующие условия.
Условие 1. Пусть $f_0^\beta \in \mathring{C}^1(\mathbb{R}^6)$ и $\mathrm{supp} f_0^\beta \subset D_0 := (Q_{5\delta/4} \cap B_\varkappa) \times B_\rho$, где $\delta, \varkappa, \rho > 0$.

Замечание 1. Условие 1 означает, что в начальный момент времени заряженные частицы расположены в шаре $B_\varkappa$, находятся на расстоянии больше, чем $5\delta/4$ до границы цилиндра ∂Q и имеют скорости меньше, чем ρ.

Условие 2. Пусть $B \in \hat{C}^1(\overline{Q})$, и пусть $B(x) = (0, 0, h)$ для $x \in \overline{Q}_{\delta/4}$, где

$$\frac{16c}{e\delta}\left(\rho m_{+1} + \sqrt{2}eTR\right) < h, \quad R > 0. \tag{5}$$

Замечание 2. Условие 2 означает, что внешнее магнитное поле однородно во внутреннем цилиндре $Q_{\delta/4}$ и направлено по оси цилиндра. Это приводит к возникновению силы Лоренца, препятствующей попаданию частиц на границу. Выполнение неравенства (5) для индукции внешнего магнитного поля приводит к тому, что проекция на плоскость $x_3 = 0$ отклонения ларморовской траектории, возмущенной самосогласованным электрическим полем с потенциалом φ, от начальной точки $x \in Q_{5\delta/4}$ не превышает $\delta/8$, см. лемму 1.

Для заданной функции $\varphi \in C\left([0, T], C_0^2(\overline{Q})\right)$ уравнение (2) с начальными условиями (3) можно решить, используя метод характеристик. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dX_\varphi^\beta}{d\tau} = V_\varphi^\beta, \qquad 0 < \tau < t,\ \beta = \pm 1, \tag{6}$$

$$\frac{dV_\varphi^\beta}{d\tau} = -\frac{\beta e}{m_\beta}\nabla_x \varphi(X_\varphi^\beta, \tau) + \frac{\beta e}{m_\beta c}[V_\varphi^\beta, B(X_\varphi^\beta)], \quad 0 < \tau < t,\ \beta = \pm 1, \tag{7}$$

с начальными условиями

$$X_\varphi^\beta|_{\tau=t} = x, \quad V_\varphi^\beta|_{\tau=t} = v, \qquad \beta = \pm 1, \tag{8}$$

где $x \in Q$, $v \in \mathbb{R}^3$, $0 < t \le T$. Для любых $x \in Q$ и $v \in \mathbb{R}^3$ существует единственное непродолжаемое решение задачи (6)–(8) для $\tau \in \left(T_\varphi^\beta(x, v, t), t\right]$, $0 \le T_\varphi^\beta(x, v, t) < t$. Обозначим это решение через $\left(X_\varphi^\beta(x, v, t, \tau), V_\varphi^\beta(x, v, t, \tau)\right)$.

Лемма 1. Пусть выполнено условие 2. Тогда для любого $\varphi \in M_{1,R}$ решение задачи (6)–(8) обладает следующими свойствами: если $(x, v) \in D_1 := \left(Q_{9\delta/8} \cap B_{\varkappa_1}\right) \times B_{\rho_1}$, то $T_\varphi^\beta(x, v, t) = 0$ и $\left(X_\varphi^\beta(x, v, t, \tau), V_\varphi^\beta(x, v, t, \tau)\right) \in D_2 := (Q_\delta \cap B_{\varkappa_2}) \times B_{\rho_2}$, $\tau \in (0, t)$, где $\varkappa_j = \varkappa + T\rho_1 j$, $\rho_j = \rho + \dfrac{\sqrt{3}TR}{m_{-1}} j$, $j = 1, 2$.

Доказательство см. в [4], лемма 3.3.

Замечание 3. Лемма 1 означает, что траектории заряженных частиц, начинающиеся в области D_1, за время t, $t \leq T$, могут попасть лишь в несколько бо́льшую область D_2, причем их расстояние до границы ∂Q может уменьшится не более, чем на $\delta/8$.

Продолжая функции $X_\varphi^\beta(y, q, t, \tau)$, $V_\varphi^\beta(y, q, t, \tau)$ по непрерывности в $\tau = 0$, положим $\hat{X}_\varphi^\beta(y, q, t) = X_\varphi^\beta(y, q, t, 0)$, $\hat{V}_\varphi^\beta(y, q, t) = V_\varphi^\beta(y, q, t, 0)$.

Fig.4. $G_\delta = \{x' = (x_1, x_2) \in G : \mathrm{dist}(x', \partial G) > \delta, Q_\delta = G_\delta \times \mathbb{R}\}$.

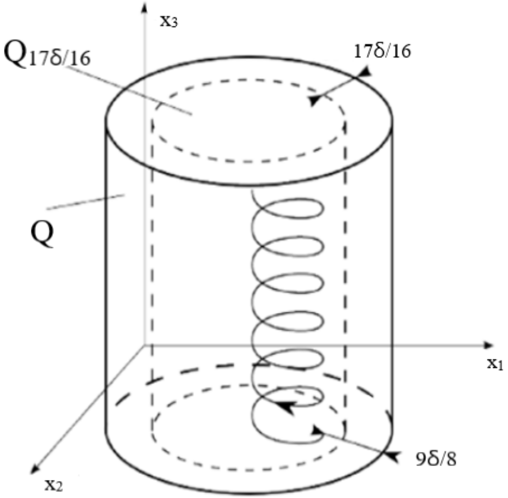
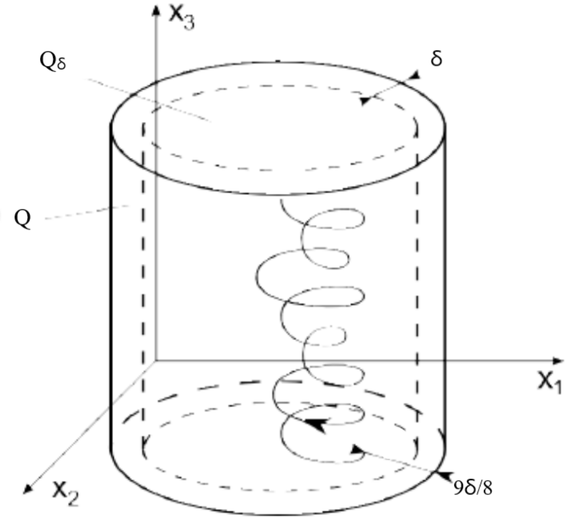


Fig.5. $G_\delta = \{x' = (x_1, x_2) \in G : \mathrm{dist}(x', \partial G) > \delta, Q_\delta = G_\delta \times \mathbb{R}\}$.



Для $0 < t \le T$ рассмотрим отображение $\hat{S}^{\beta}_{\varphi,t}(\cdot,\cdot) : D_1 \to D_2$ вида $\hat{S}^{\beta}_{\varphi,t}(x,v) = \left(\hat{X}^{\beta}_{\varphi}(x,v,t), \hat{V}^{\beta}_{\varphi}(x,v,t)\right)$. Положим $\hat{S}^{\beta}_{\varphi,0}(x,v) = (x,v)$.
Для $\varphi \in C\left([0,T], C^2_0(\overline{Q})\right) \cap M_{1,R}$ определим функцию $f^{\beta}_{\varphi}(x,v,t)$ по формуле

$$f^{\beta}_{\varphi}(x,v,t) = \begin{cases} f^{\beta}_0\left(\hat{S}^{\beta}_{\varphi,t}(x,v)\right), & (x,v) \in D_1, t \in [0,T], \\ 0, & (x,v) \in (Q \times \mathbb{R}^3) \setminus D_1, t \in [0,T]. \end{cases} \quad (9)$$

Лемма 2. Пусть выполнены условия 1, 2. Тогда для любого $\varphi \in M_{1,R}$ и $0 < t \le T$ мы имеем $\mathrm{supp} f^{\beta}_0\left(\hat{S}^{\beta}_{\varphi,t}(x,v)\right) \subset D_1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о основано на использовании леммы 1, см. в [4], лемма 4.2.

Функция $\hat{S}^{\beta}_{\varphi,t}(x, v)$ непрерывно дифференцируема по $(x, v) \in D_1$ и $t \in (0, T)$. Поэтому в силу леммы 2 $\mathrm{supp} f^{\beta}_{\varphi}(\cdot, \cdot, t) \subset D_1$ для $t \in [0, T]$ и $f^{\beta}_{\varphi} \in C^1\left(\overline{Q} \times \mathbb{R}^3 \times [0, T]\right)$, при этом для заданной функции φ функции $f^{\beta} = f^{\beta}_{\varphi}$ удовлетворяют уравнениям (2) с начальными условиями (3).

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1, 2. Предположим, что вектор–функция $\{\varphi, f^{\beta}\}$, $\varphi \in M_{1,R}$, $\beta = \pm 1$, является классическим решением задачи (1)–(4). Тогда $\mathrm{supp} f^{\beta}(\cdot, \cdot, t) \subset D_1$, $t \in [0, T]$, $\beta = \pm 1$, при этом

$$|||\nabla \varphi|||_{0,T} \leq c_1 \max_{\beta} \|f^{\beta}_0\|_0, \tag{10}$$

где $c_1 = c_1(Q, \rho, \varkappa) > 0$ — константа, не зависящая от f^{β}_0 и φ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть φ — первая компонента классического решения задачи (1)–(4) $\{\varphi, f^{+1}, f^{-1}\}$ и $\varphi \in M_{1,R}$. Определим функции f_φ^β по формуле (9). Из метода характеристик следует, что функции f_φ^{+1} и f_φ^{-1} являются соответственно второй и третьей компонентами классического решения, т.е. $f_\varphi^{+1} = f^{+1}$ и $f_\varphi^{-1} = f^{-1}$.

Рассмотрим краевую задачу (1), (4). В силу теоремы Соболева об ограниченности вложения $W_4^2(Q)$ в $C^1\overline{Q})$ и теоремы 6.4 из [9, гл.3, §6] об однозначной разрешимости задачи Дирихле для уравнения Пуассона в пространстве Соболева $W_4^2(Q)$ в случае бесконечного цилиндра, мы получим

$$\| |\nabla \varphi(\cdot, t)| \|_0 \leq k_1 \|\varphi(\cdot, t)\|_{W_4^2(Q)} \leq k_2 4\pi e \sum_{\beta} I_\beta, \qquad t \in (0, T), \tag{11}$$

где $k_1, k_2 > 0$ — константы, зависящие от области Q и не зависящие от f_φ^β и φ,

$$I_\beta = \left\{ \int\limits_Q \left(\int\limits_{\mathbb{R}^3} f^\beta(x, v, t) dv \right)^4 dx \right\}^{1/4}.$$

Полагая $f^\beta = f_\varphi^\beta$, в силу (9) получим оценку

$$\sup_{0\le t\le T} \sup_{x\in Q} \sup_{v\in\mathbb{R}^3} f^\beta(x, v, t) \le \sup_{(y,p)\in D_0} f_0^\beta(y, p) = \|f_0^\beta\|_0. \qquad (12)$$

Из (11), (12) следует, что

$$|||\nabla\varphi(\cdot, t)|||_0 \le k_2 8\pi e|B_\varkappa|^{1/4}|B_\rho| \max_\beta \|f_0^\beta\|_0. \qquad \square \qquad (13)$$

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (мегагрант соглашение № 075-15-2022-1115)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арсеньев А.А.О существовании обобщенных и стационарных статистических решений системы уравнений Власова в ограниченной области// Диффер. уравн. 1979. Т. 15. № 7. С. 1253–1266.
2. Bardos C., Degond P.Global existence for the Vlasov–Poisson equation in 3 space variables with small initial data// Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéare. 1985. V. 2. № 2. P. 101–118.
3. Batt J.Global symmetric solutions of the initial value problem of stellar dynamics// J. Differential Equations. 1977. V. 25. № 3. P. 342–364.
4. Беляева Ю.О., Скубачевский А.Л.Об однозначной разрешимости первой смешанной задачи для системы уравнений Власова–Пуассона в бесконечном цилиндре// Записки научных семинаров ПОМИ. 2018. Т. 477. С. 12–34.
5. Belyaeva Yu.O., Gebhard B., Skubachevskii A.L.A general way to confined stationary Vlasov-Poisson plasma configurations// Kinetic and Related Models. 2021. V. 14. № 2. P. 257–282.

6. Власов А.А.Теория многих частиц. М., ГИТТЛ, 1950.
7. Weckler J.On the initial–boundary–value problem for the Vlasov–Poisson system: existence of weak solutions and stability// Arch. Ration.Mech. Anal. 1995. V. 130. № 2. P. 145–161.
8. Guo Y.Regularity for the Vlasov equations on a half–space// Indiana Univ. Math. J. 1994. V. 43. № 1. P. 255–320.
9. DiPerna R.J., Lions P. L.Solutions globales d'équations du type Vlasov–Poisson// C. R. Acad. Sci., Paris, Sér.I Math. 1988. V. 307. № 12. P. 655–658.
10. Добрушин Р.Л.Уравнения Власова// Функц. анализ и его прил. 1979. Т. 13. № 2. С. 48–58.
11. Козлов В.В.Обобщенное кинетическое уравнение Власова// УМН. 2008. Т. 63. № 4. С. 93–130.
12. Маслов В.П.Уравнения самосогласованного поля// Итоги науки и техники. Сер. Соврем. пробл. матем. 1978. Т. 11. ВИНИТИ. М. С. 153–234.
13. Миямото К.Основы физики плазмы и управляемого синтеза. М., Физматлит, 2007.

14. Назаров С.А., Пламеневский Б.А.Эллиптические задачи в областях с кусочно–гладкой границей. М., Наука, 1991.
15. Mouhot C.,Villani C.On Landau damping// Acta Math. 2011. V. 207. № 1. P. 29–201.
16. Pfaffelmoser K.Global classical solutions of the Vlasov–Poisson system in three dimensions for general initial data// J. Differential Equations. 1992. V. 95. № 2. P. 281–303.
17. Schäffer J.Global existence of smooth solutions to the Vlasov–Poisson system in three dimensions// Comm. Partial Differential Equations. 1991. V. 16. № 8–9. 1313–1335.
18.Скубачевский А.Л.Об однозначной разрешимости смешанных задач для системы уравнений Власова–Пуассона в полупространстве// ДАН. 2012. Т. 443. № 4. С. 431–434.
19. Скубачевский А.Л.Уравнения Власова–Пуассона для двукомпонентной плазмы в однородном магнитном поле// УМН. 2014. Т. 69. № 2. С. 107–148.
20. Hwang H.J., Valázquez J.J.L.On global existence for the Vlasov–Poisson system in a half–space// J. Differential Equations. 2009. V. 247. № 6. P. 1915–1948.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ