

# Усреднение нелокального оператора сверточного типа при учете корректоров

В.А.Слоущ  
(по совместной работе с Е.А.Жижиной,  
А.Л.Пятницким и Т.А.Суслиной)

Санкт-Петербургский государственный университет

Конференция математических центров, ноябрь 2022

### Усреднение оператора свёрточного типа в периодической среде

$(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1} \sim ?$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ , где  $\mathbb{A}_\varepsilon$  — периодический самосопряженный нелокальный оператор сверточного типа с быстро осциллирующими коэффициентами (периодическими с решеткой периодов  $(\varepsilon\mathbb{Z})^d$ ).

# Введение. Основной объект исследования

Рассмотрим *нелокальный оператор сверточного типа* с быстро осциллирующими коэффициентами:

$$\mathbb{A}_\varepsilon u(x) = \varepsilon^{-d-2} \int_{\mathbb{R}^d} a((x-y)/\varepsilon) \mu(x/\varepsilon, y/\varepsilon) (u(x) - u(y)) dy,$$

где  $u \in L_2(\mathbb{R}^d)$ ,  $\varepsilon > 0$ . Предполагается, что коэффициенты  $a(x)$  и  $\mu(x, y)$  удовлетворяют условиям

$$0 \leq a(x) = a(-x), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad \|a\|_{L_1} = 1, \quad \int_{\mathbb{R}^d} |x|^4 a(x) dx < \infty; \quad (1)$$

$$0 < \mu_- \leq \mu(x+m, y+n) = \mu(x, y) \leq \mu_+ < \infty, \quad m, n \in \mathbb{Z}^d, \\ \mu(x, y) = \mu(y, x). \quad (2)$$

$0 \leq \mathbb{A}_\varepsilon = \mathbb{A}_\varepsilon^*$  — ограничен;  $\min \sigma(\mathbb{A}_\varepsilon) = 0$ ,  $\mathbb{A}_\varepsilon$  — периодический с решеткой периодов  $(\varepsilon\mathbb{Z})^d$ .

# Введение

## Известные результаты (аппроксимация резольвенты)

Оператор  $\mathbb{A}_\epsilon$  изучался в работах [Е.А.Жижина, А.Л.Пятницкий, 2017–2020]. В частности, был получен старший член аппроксимации резольвенты  $(\mathbb{A}_\epsilon + I)^{-1}$  в сильном смысле:

$$s\text{-}\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\mathbb{A}_\epsilon + I)^{-1} = (A^0 + I)^{-1},$$

где  $A^0 = -\operatorname{div} g^0 \nabla$  — подходящий *эффективный* эллиптический ДО с постоянными коэффициентами.

# Введение

## Известные результаты (вспомогательная задача)

Чтобы сформулировать результат, мы определим *эффективный оператор* с постоянными коэффициентами:

$$A^0 := -\operatorname{div} g^0 \nabla,$$

где  $g^0$  — постоянная *эффективная матрица* определяется в терминах решения следующей *вспомогательной задачи*.

Пусть  $\Omega := [0, 1)^d$  — ячейка решетки  $\mathbb{Z}^d$ . Пусть вектор-функция  $\mathbf{v}(x) = (v_1(x), \dots, v_d(x))$  —  $\mathbb{Z}^d$ -периодическое решение задачи

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}^d} a(x-y) \mu(x,y) (\mathbf{v}(x) - \mathbf{v}(y)) dy = \\ \quad = \int_{\mathbb{R}^d} a(x-y) \mu(x,y) (x-y) dy, & x \in \Omega, \\ \int_{\Omega} \mathbf{v}(y) dy = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Задача (3) имеет единственное  $\mathbb{Z}^d$ -периодическое решение.

# Введение

## Известные результаты (эффективная матрица)

Определим эффективную матрицу  $g^0 = \frac{1}{2}\{g_{ij}\}_{i,j=1,\dots,d}$  равенством

$$g_{ij} = \int_{\Omega} dx \int_{\mathbb{R}^d} dy \left( (x_i - y_i)(x_j - y_j) - v_j(x)(x_i - y_i) - v_i(x)(x_j - y_j) \right) \cdot a(x - y) \mu(x, y), \quad i, j = 1, \dots, d. \quad (4)$$

Здесь вектор  $\mathbf{v}(x) = (v_1(x), \dots, v_d(x))$  —  $\mathbb{Z}^d$ -периодическое решение задачи (3). Матрица  $g^0$  оказывается положительно определенной. Эффективный оператор  $A^0 = -\operatorname{div} g^0 \nabla$  определен на пространстве Соболева  $H^2(\mathbb{R}^d)$ .

# Введение

## Основной результат

### Теорема 1

Пусть выполнены условия (1), (2). Тогда справедлива оценка

$$\|(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (A^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C\varepsilon.$$

Здесь  $C = C(d, a, \mu_+, \mu_-)$ ;  $A^0 = -\operatorname{div} g^0 \nabla$  и матрица  $g^0$  определена равенством (4).

### Замечание

$\mathbb{A}_\varepsilon$  — ограниченный оператор в  $L_2(\mathbb{R}^d)$ ;  $A^0$  — эллиптический ДО; оценка точна по порядку  $\varepsilon$ ; константа  $C(d, a, \mu_+, \mu_-)$  контролируется.

# Введение

## Основной результат

### Теорема 2

Пусть выполнены условия (1), (2). Тогда справедлива оценка

$$\|(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (A^0 + I)^{-1} - \varepsilon(\mathbb{K}(\varepsilon) + \mathbb{K}^*(\varepsilon))\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq S\varepsilon^2, \quad \varepsilon > 0;$$

$$\mathbb{K}(\varepsilon) = - \sum_{j=1}^d v_j(x/\varepsilon) \partial_j (\mathbb{A}^0 + I)^{-1} \Pi_\varepsilon;$$

$$\Pi_\varepsilon u(x) = (2\pi)^{-d/2} \int_{[-\pi/\varepsilon, \pi/\varepsilon]^d} \hat{u}(\xi) e^{ix\xi} d\xi,$$

$$S = S(d, a, \mu_+, \mu_-);$$

$A^0 = -\operatorname{div} g^0 \nabla$  и матрица  $g^0$  определена равенством (4).

# Введение

## Теоретико-операторный подход

*Теоретико-операторный подход* был предложен в работах [М.Ш.Бирман и Т.А.Суслина, 2001 – 2006], где изучались самосопряженные эллиптические периодические ДО второго порядка:

- масштабное преобразование;
- разложение в прямой интеграл;
- вычисление аппроксимации  $(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ , в терминах пороговых характеристик спектра.

# Введение. Теоретико-операторный подход

## Масштабное преобразование

*Масштабное преобразование* — унитарное преобразование в  $L_2(\mathbb{R}^d)$  вида:

$$T_\varepsilon u(x) = \varepsilon^{d/2} u(\varepsilon x), \quad u \in L_2(\mathbb{R}^d).$$

$$\mathbb{A}_\varepsilon = T_\varepsilon^* \varepsilon^{-2} \mathbb{A} T_\varepsilon, \quad \mathbb{A} = \mathbb{A}_{\varepsilon_0}, \quad \varepsilon_0 = 1; \quad A^0 = T_\varepsilon^* \varepsilon^{-2} A^0 T_\varepsilon$$

$$\begin{aligned} \|(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (A^0 + I)^{-1}\|_{L_2 \rightarrow L_2} &= \\ &= \varepsilon^2 \|(\mathbb{A} + \varepsilon^2 I)^{-1} - (A^0 + \varepsilon^2 I)^{-1}\|_{L_2 \rightarrow L_2} \end{aligned}$$

# Введение. Теоретико-операторный подход

## Разложение в прямой интеграл

Оператор  $\mathbb{A}$  —  $\mathbb{Z}^d$ -периодический; следовательно:

$$\mathbb{A} = \int_{\tilde{\Omega}} \oplus \mathbb{A}(\xi) d\xi, \quad \tilde{\Omega} = [-\pi, \pi)^d, \quad \mathbb{A}(\xi) \text{ — оператор в } L_2(\Omega).$$

$$(\mathbb{A} + \varepsilon^2 I)^{-1} \sim?, \quad \varepsilon \rightarrow 0 \iff (\mathbb{A}(\xi) + \varepsilon^2 I)^{-1} \sim?, \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

# Введение. Теоретико-операторный подход

## Исследование пороговых характеристик спектра

Вычисление асимптотики  $(\mathbb{A}(\xi) + \varepsilon^2 I)^{-1} \sim ?$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ , через асимптотику  $\mathbb{A}(\xi)F(\xi)$ ,  $\xi \rightarrow 0$ , где  $F(\xi)$  — спектральный проектор оператора  $\mathbb{A}(\xi)$ , отвечающий некоторой окрестности нуля.

# Нелокальный оператор сверточного типа

*Нелокальный оператор сверточного типа* в  $L_2(\mathbb{R}^d)$ :

$$\mathbb{A}u(x) = \int_{\mathbb{R}^d} a(x-y)\mu(x,y)(u(x) - u(y)) dy, \quad u \in L_2(\mathbb{R}^d).$$

Условия на коэффициенты:

$$0 \leq a(x) = a(-x), \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} a(x) dx = 1, \quad \int_{\mathbb{R}^d} |x|^4 a(x) dx < \infty.$$

$$0 < \mu_- \leq \mu(x,y) \leq \mu_+ < \infty, \quad \mu(x,y) = \mu(y,x),$$

$$\mu(x+m, y+n) = \mu(x,y), \quad m, n \in \mathbb{Z}^d.$$

# Нелокальный оператор сверточного типа

## Самопряженность и ограниченность

$$\mathbb{A}u(x) = p(x)u(x) - \mathbb{B}u(x), \quad p(x) = \int_{\mathbb{R}^d} a(x-y)\mu(x,y) dy,$$

$$\mathbb{B}u(x) = \int_{\mathbb{R}^d} a(x-y)\mu(x,y)u(y) dy, \quad u \in L_2(\mathbb{R}^d).$$

$$\mu_- \leq p(x) \leq \mu_+, \quad \|\mathbb{B}\|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq \mu_+, \quad p(x) = \overline{p(x)}, \quad \mathbb{B} = \mathbb{B}^*.$$

Оператор  $\mathbb{A} = \mathbb{A}^*$  ограничен в  $L_2(\mathbb{R}^d)$ .

# Нелокальный оператор сверточного типа

## Квадратичная форма

$$(\mathbb{A}u, u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} dx \int_{\mathbb{R}^d} dy a(x-y) \mu(x, y) |u(x) - u(y)|^2, \quad u \in L_2(\mathbb{R}^d).$$

$$\mathbb{A}_0 u(x) = \int_{\mathbb{R}^d} a(x-y)(u(x) - u(y)) dy, \quad u \in L_2(\mathbb{R}^d) \quad (\mu \equiv 1);$$

$$0 \leq \mu_- \mathbb{A}_0 \leq \mathbb{A} \leq \mu_+ \mathbb{A}_0.$$

$$\mathbb{A}_0 = \Phi^*[1 - \hat{a}(\xi)]\Phi, \quad \hat{a}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \cos(\xi x) a(x) dx$$

$$\sigma(\mathbb{A}_0) \supset [0, 1] \implies \min \sigma(\mathbb{A}_0) = 0 \implies \min \sigma(\mathbb{A}) = 0.$$

# Нелокальный оператор сверточного типа

Разложение в прямой интеграл

$$\mathbb{A}S_n = S_n\mathbb{A}, \quad S_n u(x) = u(x+n), \quad n \in \mathbb{Z}^d;$$

$$\mathbb{A} = \int_{\tilde{\Omega}} \oplus \mathbb{A}(\xi) d\xi, \quad \mathbf{0} \leq \mathbb{A}(\xi) = \mathbb{A}^*(\xi) \text{ — ограниченный в } L_2(\Omega).$$

$$\mathbb{A}(\xi)u(x) = p(x)u(x) - \mathbb{B}(\xi)u(x), \quad p(x) = \int_{\mathbb{R}^d} a(x-y)\mu(x,y) dy,$$

$$\mathbb{B}(\xi)u(x) = \int_{\Omega} \tilde{a}(\xi, x-y)\mu(x,y)u(y) dy, \quad \tilde{a}(\xi, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} a(z+n)e^{-i(\xi, z+n)}$$

$$\mathbb{B} \in \mathfrak{S}_{\infty}, \quad 0 < \mu_- \leq p(x) \leq \mu_+.$$

$$\sigma(A(\xi)) \cap (-\infty, \mu_-) \subset \sigma_{discr}(A(\xi)), \quad \xi \in \tilde{\Omega}.$$

# Свойства оператора $\mathbb{A}(\xi)$

## Квадратичная форма

$$(\mathbb{A}(\xi)u, u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} dx \int_{\mathbb{R}^d} dy a(x-y) \mu(x, y) |e^{i\xi x} u(x) - e^{i\xi y} u(y)|^2,$$
$$u \in L_2(\Omega), \quad \xi \in \tilde{\Omega};$$

$$0 \leq \mu_- \mathbb{A}_0(\xi) \leq \mathbb{A}(\xi) \leq \mu_+ \mathbb{A}_0(\xi);$$

$$\mathbb{A}_0(\xi)u(x) = p(x)u(x) - \mathbb{B}_0(\xi)u(x), \quad \mathbb{B}_0(\xi)u(x) = \int_{\Omega} \tilde{a}(\xi, x-y)u(y) dy.$$

# Свойства оператора $\mathbb{A}(\xi)$

## Анализ оператора $\mathbb{A}_0(\xi)$

Оператор  $\mathbb{A}_0(\xi)$  диагонализуется дискретным преобразованием Фурье  $F : L_2(\Omega) \rightarrow \ell_2(\mathbb{Z}^d)$ :

$$Fu(n) = \int_{\Omega} u(x) e^{-2\pi i n x} dx, \quad n \in \mathbb{Z}^d, \quad u \in L_2(\Omega);$$

$$\mathbb{A}_0(\xi) = F^*[\hat{a}(0) - \hat{a}(2\pi n + \xi)]F.$$

Оператор  $\mathbb{A}_0(\xi)$  унитарно эквивалентен оператору умножения на символ  $\{A_n(\xi)\}_{n \in \mathbb{Z}^d}$  в  $\ell_2(\mathbb{Z}^d)$ ,

$$A_n(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} (1 - \cos(z(\xi + 2\pi n))) a(z) dz, \quad \xi \in \tilde{\Omega}, \quad n \in \mathbb{Z}^d.$$

# Свойства оператора $\mathbb{A}(\xi)$

## Анализ оператора $\mathbb{A}_0(\xi)$

Из соотношений

$$A_n(\xi) \geq C_1 |\xi|^2, \quad \xi \in \tilde{\Omega}, \quad n \in \mathbb{Z}^d;$$

$$A_n(\xi) \geq C_2, \quad \xi \in \tilde{\Omega}, \quad n \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\};$$

$$A_0(0) = 0,$$

вытекают свойства

$$\mathbb{A}_0(\xi) \geq C_1 |\xi|^2 I, \quad \xi \in \tilde{\Omega},$$

$$\text{Ker } \mathbb{A}_0(0) = \mathcal{L}\{\mathbf{1}_\Omega\},$$

$$(\mathbb{A}_0(\xi)u, u) \geq C_2 \|u\|^2, \quad u \in L_2(\Omega) \ominus \mathcal{L}\{\mathbf{1}_\Omega\}, \quad \xi \in \tilde{\Omega}.$$

# Свойства оператора $\mathbb{A}(\xi)$

В силу двусторонних оценок  $\mu_- \mathbb{A}_0(\xi) \leq \mathbb{A}(\xi) \leq \mu_+ \mathbb{A}_0(\xi)$ , справедливы свойства

$$\mathbb{A}(\xi) \geq \mu_- C_1 |\xi|^2 I, \quad \xi \in \tilde{\Omega},$$

$$\text{Ker } \mathbb{A}(0) = \mathcal{L}\{\mathbf{1}_\Omega\},$$

$$(\mathbb{A}(\xi)u, u) \geq \mu_- C_2 \|u\|^2, \quad u \in L_2(\Omega) \ominus \mathcal{L}\{\mathbf{1}_\Omega\}, \quad \xi \in \tilde{\Omega}.$$

Таким образом: 1) нижний край спектра оператора  $\mathbb{A}(0)$  — однократное собственное значение  $\lambda_0 = 0$ ; 2) расстояние  $d_0$  от точки  $\lambda_0$  до остального спектра оператора  $\mathbb{A}(0)$  не менее  $\mu_- C_2$ ; 3) при малых  $\xi$  спектр оператора  $\mathbb{A}(\xi)$  на отрезке  $[0, d_0/3]$  состоит из однократного собственного значения, а спектр оператора  $\mathbb{A}(\xi)$  на интервале  $(d_0/3, 2d_0/3)$  пуст.

# Асимптотика оператора $\mathbb{A}(\xi)F(\xi)$ , $\xi \rightarrow 0$

Положим  $F(\xi) = \mathbb{E}_{\mathbb{A}(\xi)}[0, d_0/3]$  при малых  $\xi$ .

Оператор-функция  $\mathbb{A}(\xi)$  гладкая класса  $C^4$ .

Оператор-функции  $\mathbb{A}(\xi)$  и  $\mathbb{A}(\xi)F(\xi)$  допускают представления

$$F(\xi) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (\mathbb{A}(\xi) - \zeta I)^{-1} d\zeta, \quad (5)$$

$$\mathbb{A}(\xi)F(\xi) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (\mathbb{A}(\xi) - \zeta I)^{-1} \zeta d\zeta. \quad (6)$$

Здесь контур  $\Gamma$  проходит через середину интервала  $(d_0/3, 2d_0/3)$  и эквидистантно охватывает отрезок  $[0, d_0/3]$ . В силу (5) и (6) оператор-функции  $F(\xi)$  и  $\mathbb{A}(\xi)F(\xi)$  — гладкие класса  $C^4$ .

# Асимптотика оператора $\mathbb{A}(\xi)F(\xi)$ , $\xi \rightarrow 0$

Таким образом, справедливо разложение

$$\begin{aligned}\mathbb{A}(\xi)F(\xi) = G_0 + \sum_{i=1}^d G_i \xi_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d G_{ij} \xi_i \xi_j + \\ + \frac{1}{6} \sum_{i,j,k=1}^d G_{ijk} \xi_i \xi_j \xi_k + O(|\xi|^4), \quad \xi \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Нам остается лишь найти коэффициенты этого разложения.  
Что известно:

$$G_0 = \mathbb{A}(0)F(0) = 0;$$

$$(\mathbb{A}(\xi)F(\xi)u, u) \geq 0 \implies G_i = 0, \quad i = 1, \dots, d.$$

Остается вычислить коэффициенты  $G_{ij}$ ,  $G_{ijk}$ ,  $i, j, k = 1, \dots, d$ .

# Асимптотика оператора $\mathbb{A}(\xi)F(\xi)$ , $\xi \rightarrow 0$

Итак, справедливо разложение

$$\mathbb{A}(\xi)F(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d G_{ij} \xi_i \xi_j + \frac{1}{6} \sum_{i,j,k=1}^d G_{ijk} \xi_i \xi_j \xi_k + O(|\xi|^4), \quad \xi \rightarrow 0.$$

Нам известно разложение

$$\begin{aligned} \mathbb{A}(\xi) &= \mathbb{A}(0) + \sum_{i=1}^d \partial_i \mathbb{A}(0) \xi_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \partial_i \partial_j \mathbb{A}(0) \xi_i \xi_j + \\ &\quad + \frac{1}{6} \sum_{i,j,k=1}^d \partial_i \partial_j \partial_k \mathbb{A}(0) \xi_i \xi_j \xi_k + O(|\xi|^4), \quad \xi \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Далее, обозначим  $P := F(0)$  — ортогональный проектор на  $\text{Ker } \mathbb{A}(0) = \mathcal{L}\{\mathbf{1}_\Omega\}$ ,  $P^\perp := I - P$ .

# Первый способ вычисления $G_{ij}$

При малых  $\xi$  определим  $\varphi(\xi) = F(\xi)\mathbf{1}_\Omega$  — ненулевой собственный вектор, отвечающий нижнему собственному значению  $\lambda(\xi)$  оператора  $\mathbb{A}(\xi)$ ;  $e(\xi) = \varphi(\xi)/\|\varphi(\xi)\|$  — нормированный собственный вектор, отвечающий нижнему собственному значению оператора  $\mathbb{A}(\xi)$ .

Очевидно равенство  $\lambda(\xi) = (\mathbb{A}(\xi)e(\xi), e(\xi))$ . Таким образом, вектор-функция  $e(\xi)$  и функция  $\lambda(\xi)$  — гладкие класса  $C^4$ :

$$e(\xi) = \mathbf{1}_\Omega + \sum_{i=1}^d e_i \xi_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d e_{ij} \xi_i \xi_j + O(|\xi|^3), \quad \xi \rightarrow 0; \quad (7)$$

$$\lambda(\xi) = 0 + \sum_{i=1}^d \lambda_i \xi_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \lambda_{ij} \xi_i \xi_j + O(|\xi|^3), \quad \xi \rightarrow 0. \quad (8)$$

$$\lambda(\xi) \geq 0 \implies \lambda_i = 0, \quad i = 1, \dots, d.$$

# Первый способ вычисления $G_{ij}$

Таким образом,

$$\mathbb{A}(\xi)F(\xi) = \lambda(\xi)(\cdot, e(\xi))e(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \lambda_{i,j}(\cdot, \mathbf{1}_\Omega) \mathbf{1}_\Omega + O(|\xi|^3), \quad \xi \rightarrow 0.$$

Следовательно, верны равенства  $G_{ij} = \frac{1}{2} \lambda_{ij}(\cdot, \mathbf{1}_\Omega) \mathbf{1}_\Omega$ ,  $i, j = 1, \dots, d$ . Коэффициенты  $\lambda_{ij}$  вычисляются подстановкой разложений (7) и (8) в уравнения

$$\mathbb{A}(\xi)e(\xi) = \lambda(\xi)e(\xi), \quad (e(\xi), e(\xi)) = 1.$$

Получается  $g_{ij} = \lambda_{ij}$ ,

$$\begin{aligned} G_{ij} = & P \partial_i \partial_j \mathbb{A}(0) P - P \partial_i \mathbb{A}(0) P^\perp \mathbb{A}(0)^{-1} P^\perp \partial_j \mathbb{A}(0) P - \\ & - P \partial_j \mathbb{A}(0) P^\perp \mathbb{A}(0)^{-1} P^\perp \partial_i \mathbb{A}(0) P. \end{aligned}$$

## Второй способ вычисления $G_{ij}$

$$(\mathbb{A}(\xi) - \zeta I)^{-1} =: R(\xi, \zeta), \quad R_0(\zeta) := R(0, \zeta);$$

$$\Delta \mathbb{A}(\xi) = \mathbb{A}(\xi) - \mathbb{A}(0) = \sum_{i=1}^d \partial_i \mathbb{A}(0) \xi_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \partial_i \partial_j \mathbb{A}(0) \xi_i \xi_j + O(|\xi|^3);$$

$$\begin{aligned} R(\xi, \zeta) &= R_0(\zeta) - R_0(\zeta) \Delta \mathbb{A} R_0(\zeta) + R_0(\zeta) \Delta \mathbb{A} R_0(\zeta) \Delta \mathbb{A} R_0(\zeta) - \\ &\quad - R(\xi, \zeta) \Delta \mathbb{A} R_0(\zeta) \Delta \mathbb{A} R_0(\zeta) \Delta \mathbb{A} R_0(\zeta); \end{aligned}$$

$$\mathbb{A}(\xi) F(\xi) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} R(\xi, \zeta) \zeta d\zeta.$$

## Второй способ вычисления $G_{ij}$

$$G_0 = \frac{-1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} R_0(\zeta) \zeta d\zeta;$$

$$G_i = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} R_0(\zeta) \partial_i \mathbb{A}(0, a, \mu) R_0(\zeta) \zeta d\zeta, \quad i = 1, \dots, d;$$

$$\begin{aligned} G_{ij} = & \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} R_0(\zeta) \partial_i \partial_j \mathbb{A}(0, a, \mu) R_0(\zeta) \zeta d\zeta - \\ & - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} R_0(\zeta) \left( \partial_i \mathbb{A}(0, a, \mu) R_0(\zeta) \partial_j \mathbb{A}(0, a, \mu) + \right. \\ & \left. + \partial_j \mathbb{A}(0, a, \mu) R_0(\zeta) \partial_i \mathbb{A}(0, a, \mu) \right) R_0(\zeta) \zeta d\zeta, \\ & i, j = 1, \dots, d. \end{aligned}$$

## Второй способ вычисления $G_{ij}$

$$R_0(\zeta) = R_0(\zeta)P + R_0(\zeta)P^\perp = -\frac{1}{\zeta}P + R_0(\zeta)P^\perp, \quad \zeta \in \Gamma.$$

$$\begin{aligned} G_i &= \frac{-1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \left( -\frac{1}{\zeta}P + R_0^\perp(\zeta) \right) \partial_i \mathbb{A}(0, a, \mu) \left( -\frac{1}{\zeta}P + R_0^\perp(\zeta) \right) \zeta d\zeta = \\ &= \frac{-1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \left( -\frac{1}{\zeta}P \right) \partial_i \mathbb{A}(0, a, \mu) \left( -\frac{1}{\zeta}P \right) \zeta d\zeta = -P \partial_i \mathbb{A}(0, a, \mu) P, \\ &\qquad\qquad\qquad i = 1, \dots, d. \end{aligned}$$