

ОПТИМИЗАЦИОННАЯ ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ МАТРИЧНОГО ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Валеев¹Н.Ф. и Султанаев²Я.Т.

¹Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН (Уфа),

²Московский центр фундаментальной и прикладной математики

7 ноября 2022 г.

Оптимизационная обратная спектральная задача для матричного оператора Штурма-Лиувилля.

В пространстве $L_n^2(0, 1)$ рассматривается краевая задача Штурма – Лиувилля

$$l(\vec{y}) \equiv -\frac{d^2}{dx^2}\vec{y}(x) + Q(x)\vec{y}(x) = \lambda\vec{y}(x), \quad 0 < x < 1 \quad (1)$$

с самосопряженными граничными условиями

$$\vec{y}(0) - h\vec{y}'(0) = 0, \quad \vec{y}(1) + H\vec{y}'(1) = 0, \quad (2)$$

где $\vec{y}(x) \in E_n$, $Q(x) \in \mathcal{M}_n^2(0, 1)$ – эрмитова матрица, $h = h^*$, $H = H^*$ - $n \times n$ матрицы и λ - спектральный параметр.

Оптимизационная обратная спектральная задача для матричного оператора Штурма-Лиувилля.

$H = L_n^2(0, 1)$ – гильбертово пространство комплекснозначных вектор-функций со скалярным произведением:

$$(\vec{y}, \vec{v}) = \int_0^1 \sum_{k=1}^n y_k(x) \bar{v}_k(x) dx,$$

$\mathcal{M}_n^2(0, 1)$ – гильбертово пространство всех $n \times n$ матриц с элементами-функциями из $L^2(0, 1)$ с нормой

$$\|Q\|_{\mathcal{M}_n^2}^2 = \int_0^1 \text{tr}(Q^*(x)Q(x)) dx.$$

Оптимизационная обратная спектральная задача для матричного оператора Штурма-Лиувилля.

Дифференциальное выражение

$$l(\vec{y}) \equiv -\frac{d^2}{dx^2}\vec{y}(x) + Q(x)\vec{y}(x) = \lambda\vec{y}(x), \quad 0 < x < 1$$

и самосопряженные граничные условия

$$\vec{y}(0) - h\vec{y}'(0) = 0, \quad \vec{y}(1) + H\vec{y}'(1) = 0,$$

определяют самосопряженный дифференциальный оператор $\mathcal{L}[Q]$ с областью определения $D(\mathcal{L}[Q])$.

Спектр оператора $\mathcal{L}[Q]$ дискретный и состоит из последовательности собственных значений $\sigma(\mathcal{L}[Q]) := \{\lambda_i(Q)\}_{i=1}^{\infty}$, а поскольку при этом $Q(x)$, h , H -эрмитовы матрицы:

$$\lambda_1(Q) \leq \lambda_2(Q) \leq \dots \lambda_p(Q) \leq \dots \lambda_n(Q) \leq \dots$$

Собственные значения, в общем случае, могут иметь кратность p , $1 \leq p \leq n$

Оптимизационная обратная спектральная задача для матричного оператора Штурма-Лиувилля.

В качестве спектральных данных рассматривается первое собственное значение оператора $\mathcal{L}[Q]$, которое можно определить следующим образом:

$$\lambda_1(Q) := \inf_{\vec{v} \in D(\mathcal{L}[Q]), \|\vec{v}\|=1} \left\{ (\vec{v}', \vec{v}') + (Q\vec{v}, \vec{v}) \right\} \quad (3)$$

Оптимизационная обратная спектральная задача :

$(\mathcal{P}^0)$: Для заданного вещественного числа λ_1^* и матричного эрмитового потенциала $Q_0(x) \in \mathcal{M}_n^2(0, 1)$, требуется найти потенциал $\hat{Q}(x) \in \mathcal{M}_n^2(0, 1)$ такой, что

$$\|Q_0 - \hat{Q}\|_{\mathcal{M}_n^2(0,1)}^2 = \inf_{Q \in \mathcal{M}_n^2(0,1)} \left\{ \|Q_0 - Q\|_{\mathcal{M}_n^2(0,1)}^2 : \lambda_1(Q) = \lambda_1^* \right\}.$$

Оптимизационная обратная спектральная задача для матричного оператора Штурма-Лиувилля.

ООСЗ ($\mathcal{P}^0$):

- 1) существование и единственность решения;
- 2) уравнение для оптимального потенциала $\hat{Q}$ с учетом кратности собственного значения $\lambda_1(\hat{Q})$.
- 3) постановка ООСЗ с простым собственным значением $\lambda_1(\hat{Q})$;
- 4) ООСЗ с простым собственным значением и система НУШ;
- 5) связь ($\mathcal{P}^0$) с ООСЗ для скалярного оператора Штурма-Лиувилля.

Оптимизационная обратная спектральная задача

Функционал $\lambda_1(Q)$ в общем случае не дифференцируемый, но выпуклый.

Задача $(\mathcal{P}^0) \Leftrightarrow$ задача минимизации функционала расстояния $\|Q_0 - \hat{Q}\|_{\mathcal{M}_n^2(0,1)}^2$ на выпуклом множестве

$$M(\lambda) := \{Q \in \mathcal{M}_n^2(0,1) : \lambda \leq \lambda_1(Q)\} \quad (4)$$

Существование и единственность:

Теорема 1. Пусть $\lambda_1(Q_0) \leq \lambda_1^*$. Тогда оптимизационная обратная спектральная задача $(\mathcal{P}^0)$ имеет единственное решение.

З а м е ч а н и е. Условие $\lambda_1(Q_0) \leq \lambda_1^*$ является существенным: при существовании решения нет единственности.

Оптимизационная обратная спектральная задача для матричного оператора Штурма-Лиувилля.

Пусть $\hat{Q} \in \partial M(\lambda_1^*)$ - решение задачи $(\mathcal{P}^0)$, тогда $\lambda_1(\hat{Q}) = \lambda_1^*$ - первое собственное значение оператора $\mathcal{L}[\hat{Q}]$, то есть

$$-\frac{d^2}{dx^2} \vec{u}(x) + \hat{Q}(x) \vec{u}(x) = \lambda_1^* \vec{u}(x),$$

$$\vec{u}(0) - h\vec{u}'(0) = 0, \quad \vec{u}(1) + H\vec{u}'(1) = 0.$$

Заметим, что в общем случае первое собственное значение $\lambda_1(\hat{Q})$ может оказаться кратным.

Как устроен оптимальный потенциал $\hat{Q} \in \partial M(\lambda_1^*)$?

Решение задачи $(\mathcal{P}^0)$ для скалярного оператора Штурма-Лиувилля представим в виде

$$\hat{q}(x) = q_0(x) + \alpha \hat{u}^2(x)^1$$

¹Y.Sh. Ilyasov, N.F. Valeev, *On nonlinear boundary value problem corresponding to N - dimensional inverse spectral problem*, J. Diff. Eq., 266 (2019), No. 8

Оптимизационная обратная спектральная задача для векторного оператора Штурма-Лиувилля.

Теорема 2. Пусть $\lambda_1(Q_0) \leq \lambda_1^*$ и $\hat{Q} \in \partial M(\lambda_1^*)$ - решение задачи $(\mathcal{P}^0)$. Если $\lambda_1(\hat{Q})$ собственное значение кратности p , тогда справедливо представление

$$\hat{Q}(x) = Q_0(x) + \sum_{k,j=1}^p \alpha_{k,j} \vec{u}_k(x) \otimes \vec{u}_j(x), \quad (5)$$

где $\{\vec{u}_k(x)\}_{k=1}^p$ - ортонормированная система собственных функций оператора $\mathcal{L}[\hat{Q}]$, соответствующая первому собственному значению равному λ_1^* , $\mathcal{A} = (\alpha_{k,j})_{k,j=1}^p$ - невырожденная эрмитова матрица.

Здесь символ $\otimes$ - обозначает тензорное произведение в n -мерном векторном пространстве E_n .

Оптимизационная обратная спектральная задача ...

Таким образом, ортонормированная система собственных функций $\{\vec{u}_k(x)\}_{k=1}^p$ оператора $\mathcal{L}[\hat{Q}]$, соответствующая первому собственному значению равному λ_1^* , удовлетворяет системе уравнений

$$-\frac{d^2}{dx^2} \vec{u}_m(x) + \left[Q_0(x) + \sum_{k,j=1}^p \alpha_{k,j} \vec{u}_k(x) \otimes \vec{u}_j(x) \right] \vec{u}_m(x) = \lambda_1^* \vec{u}_m(x),$$

$$\vec{u}_m(0) - h\vec{u}_m'(0) = 0, \quad \vec{u}_m(1) + H\vec{u}_m'(1) = 0, \quad m = 1, \dots, p \leq n \quad (6)$$

Чему равна кратность p собственного значения $\lambda_1(\hat{Q}) = \lambda_1^*$? Зависимость кратности p от λ_1^* и $Q_0(x)$

Оптимизационная обратная спектральная задача ...

Теорема 2.1 Пусть $\lambda_1(Q_0) \leq \lambda_1^*$ и $\hat{Q} \in \partial M(\lambda_1^*)$ - решение задачи $(\mathcal{P}^0)$. Если $\lambda_1(\hat{Q})$ собственное значение кратности p , тогда справедливо представление

$$\hat{Q}(x) = Q_0(x) + U(x)\mathcal{A}U^*(x), \quad (7)$$

где $\mathcal{A} = (\alpha_{k,j})_{k,j=1}^p$ - невырожденная эрмитова матрица, $U(x)$ - матричная функция ранга p такая, что

$$\begin{aligned} -\frac{d^2}{dx^2} U(x) + [Q_0(x) + U(x)\mathcal{A}U^*(x)] U(x) &= \lambda_1^* U(x), \\ U(0) - hU'(0) &= 0, \quad U(1) + HU'(1) = 0 \end{aligned}$$

Оптимизационная обратная спектральная задача ...

Определим новое пространство $D_0 = D(\mathcal{L}[Q])/V$ на котором функционал

$$\lambda_1(Q) := \inf_{\vec{v} \in D_0, \|\vec{v}\|=1} \left\{ (\vec{v}', \vec{v}') + (Q\vec{v}, \vec{v}) \right\} \quad (8)$$

является простым собственным значением соответствующего оператора.

$(\mathcal{P}_V)$: Для заданного вещественного числа λ_1^* и матричного эрмитового потенциала $Q_0(x) \in \mathcal{M}_n^2(0, 1)$, требуется найти потенциал $\hat{Q}(x) \in \mathcal{M}_n^2(0, 1)$ такой, что

$$\|Q_0 - \hat{Q}\|_{L^2}^2 = \inf_{Q \in \mathcal{M}_n^2(0, 1)} \left\{ \|Q_0 - Q\|_{\mathcal{M}_n^2(0, 1)}^2 : \lambda_1(\hat{Q}) = \lambda_1^* \right\}.$$

З а м е ч а н и е. Подпространство D_0 , пример: пусть $\vec{e}_j$ - ортонормированный базис E^n , дополнительно к гр. условиям оператора $\mathcal{L}[Q]$ положим

$$(\vec{u}'(0), \vec{e}_j)_{E^n} = 0, j = 1, 2, \dots, n-1$$

Оптимизационная обратная спектральная задача ...

Функционал $\lambda_1(Q) := \inf_{\vec{v} \in D_0, \|\vec{v}\|=1} \{(\vec{v}', \vec{v}') + (Q\vec{v}, \vec{v})\}$ - выпуклый. Для задачи (P_V) справедлива теорема существования и единственности.

Теорема 3. Пусть $\lambda_1(Q_0) \leq \lambda_1^*$. Тогда оптимизационная обратная спектральная задача (P_V) имеет единственное решение.

Вследствие дополнительного условия на область определения оператора $\mathcal{L}[Q]$ решение задачи (P_V) имеет более простую структуру.

Теорема 4. Пусть $\lambda_1(Q_0) \leq \lambda_1^*$ и $\hat{Q} \in \partial M(\lambda_1^*)$ - решение задачи (P_V) . Тогда $\lambda_1(\hat{Q})$ простое собственное значение оператора $\mathcal{L}[\hat{Q}]$ и справедливо представление

$$\hat{Q}(x) = Q_0(x) + \alpha \vec{u}(x) \otimes \vec{u}(x), \quad (9)$$

где $\vec{u}(x)$ - собственная функция оператора $\mathcal{L}[\hat{Q}]$, соответствующая первому собственному значению равному λ_1^* .

Оптимизационная обратная спектральная задача ...

Собственное значение $\lambda_1(\hat{Q})$ может оказаться простым и без сужения области определения оператора $\mathcal{L}[Q]$. И в этом случае формула для оптимального потенциала будет иметь вид

$$\hat{Q}(x) = Q_0(x) + \alpha \vec{u}(x) \otimes \vec{u}(x), \quad (10)$$

где $\vec{u}(x)$ соответствующая собственная функция.

В обоих случаях справедливо обратное к Теореме 4 утверждение.

Теорема 5. Пусть краевая задача

$$-\frac{d^2}{dx^2} \vec{v} + (Q_0(x) + \beta \vec{v} \otimes \vec{v}) \vec{v} = \lambda_1^* \vec{v}, \quad \vec{v}(0) = \vec{v}(1) = 0, \quad (11)$$

имеет решение $\vec{v}(x)$ такое, что λ_1^* является первым простым собственным значением оператора $\mathcal{L}[Q_0(x) + \beta \vec{v} \otimes \vec{v}]$. Тогда матричный потенциал $\hat{Q}(x) = Q_0(x) + \beta \vec{v} \otimes \vec{v}$ является решением задачи (P_V)

Оптимизационная обратная спектральная задача... .

Система НУШ. Оптимизационная обратная спектральная задача $(\mathcal{P}_V)$ тесно связана с системой нелинейных уравнений Шредингера. В качестве примера рассмотрим задачу $(\mathcal{P}_V)$ в пространстве $H = L^2_2(0, 1)$ для матричного потенциала

$$Q_0(x) = \begin{bmatrix} q_{11}(x) & q_{12}(x) \\ q_{12}(x) & q_{22}(x) \end{bmatrix}.$$

Согласно теореме 1 задача $(\mathcal{P}_V)$ имеет единственное решение $\hat{Q}$. При этом, поскольку первое собственное значение оператора $\mathcal{L}[\hat{Q}]$ простое, то $\hat{Q}(x) = Q_0(x) + \alpha \vec{u} \otimes \vec{u}, \|\vec{u}\| = 1$ и

$$\mathcal{L}[\hat{Q}]\vec{u} = -\vec{u}'' + (Q_0(x) + \alpha \vec{u} \otimes \vec{u})\vec{u} = \lambda_1^* \vec{u}, \vec{u}(0) = \vec{u}(1) = 0, \quad (12)$$

где λ_1^* -первое собственное значение оператора $\mathcal{L}[\hat{Q}]$.

Оптимизационная обратная спектральная задача ...

Краевую задачу (12) можно преобразовать к известной в математической физике системе нелинейных уравнений Шредингера вида* :

$$\begin{cases} -u_1''(x) + [q_{11}(x) + \alpha(u_1^2(x) + u_2^2(x))] u_1(x) + q_{12}(x)u_2(x) = \lambda_1^* u_1(x) \\ -u_2''(x) + [q_{22}(x) + \alpha(u_1^2(x) + u_2^2(x))] u_2(x) + q_{12}(x)u_1(x) = \lambda_1^* u_2(x), \end{cases}$$

$$\vec{u}_m(0) - h\vec{u}_m'(0) = 0, \quad \vec{u}_m(1) + H\vec{u}_m'(1) = 0, \quad m = 1, 2.$$

Здесь $\alpha > 0$, $\|u_k\|_{L^2} > 0$ и $\int_0^1 (u_1^2(x) + u_2^2(x)) dx = 1$.

Таким образом, система нелинейных уравнений Шредингера и задача оптимизации $(\mathcal{P}_V)$ эквивалентны.

=====

Модель из оптики *Y. S. Kivshar, G. P. Agrawal, Optical solitons: from fibers to photonic crystals. Academic press, 2003.

Оптимизационная обратная спектральная задача... .

Рассматривается краевая задача (оператор Штурма-Лиувилля)

$$L(q)u = -u'' + q(x)u, \quad 0 < x < 1$$

с краевыми условиями Дирихле $y(0) = y(1) = 0$,

($\mathcal{P}^1$) Пусть заданы $\lambda_1^* < \lambda_2^* < \dots < \lambda_m^* \in \mathbb{R}$ - спектральные данные задачи, вещественная функция $q_0 \in L^2(0, 1)$. Требуется найти вещественный потенциал $\hat{q} \in L^2(0, 1)$ такой, что:

$$\lambda_k(\hat{q}) = \lambda_k^*, \quad k = 1, 2, \dots, m; \quad (13)$$

$$\text{и } \|q_0 - \hat{q}\|_{L^2} =$$

$$= \min\{\|q_0 - q\|_{L^2} : \lambda_k^* = \lambda_k(q), \quad k = 1, 2, \dots, m; \quad q \in L^2(0, 1)\}. \quad (14)$$

Yavdat Ilyasov and Nur Valeev, *Recovery of the nearest potential field from the m observed eigenvalues*, Physica D: Nonlinear Phenomena, Volume 426, 2021

Оптимизационная обратная спектральная задача ...

Рассматриваемая ООСЗ ($\mathcal{P}^1$) связана с нахождением решения следующей системы нелинейных уравнений (СНУШ)

$$\left\{ \begin{array}{l} -u_1'' + (q_0 + \sum_{k=1}^m \sigma_k u_k^2) u_1 = \lambda_1^* u_1, \\ \vdots \\ -u_m'' + (q_0 + \sum_{k=1}^m \sigma_k u_k^2) u_m = \lambda_m^* u_m, \end{array} \right. \quad (15)$$

с граничными условиями

$$u_i(0) = u_i(l) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (16)$$

Здесь $\sigma_i \in \{0, +1, -1\}$, $i = 1, \dots, m$.

=====

Модель из оптики *Y. S. Kivshar, G. P. Agrawal, Optical solitons: from fibers to photonic crystals. Academic press, 2003.

Оптимизационная обратная спектральная задача ...

Теорема. (Валеев и Ильясов) Пусть задана функция потенциала $q_0 \in L^2(0, 1)$ и произвольный упорядоченный набор чисел $\lambda_1^* < \lambda_2^* < \dots < \lambda_m^* \in \mathbb{R}$ - спектральные данные задачи. Тогда существует решение $\hat{q} \in L^2$ ООСЗ ($\mathcal{P}^1$) и однозначно определенные константы $\sigma_1, \dots, \sigma_m \in \{0, +1, -1\}$ такое, что система (15) - (16) имеет ненулевое слабое решение $(\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_m) \in (C^{3/2}[-l, l])^m$, которые удовлетворяют

$$\hat{q}(x) = q_0(x) - \sum_{k=1}^m \sigma_k \hat{u}_k^2(x). \quad (17)$$

Если при этой $\lambda_k^* \neq \lambda_k(q_0)$ для некоторого $k \in \{1, \dots, m\}$, тогда $\sum_{k=1}^m |\sigma_k| \neq 0$.

=====
Чему равны константы $\sigma_1, \dots, \sigma_m \in \{0, +1, -1\}$?

Yavdat Ilyasov and Nur Valeev, *Recovery of the nearest potential field from the m observed eigenvalues*, Physica D: Nonlinear Phenomena, Volume 426, 2021

Оптимизационная обратная спектральная задача ...

ООСЗ для скалярного Ш.-Л.

Пусть заданы числа $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_m$ и диагональный матричный потенциал

$$Q_0(x) = \begin{bmatrix} q_0(x) - \mu_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & q_0(x) - \mu_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & q_0(x) - \mu_m \end{bmatrix}.$$

Первое собственное значение оператора $\mathcal{L}[Q_0]$ обозначим $\lambda_1(Q_0)$. Для оператора $\mathcal{L}[Q]$, $Q \in \mathcal{M}_n(0, 1)$, рассмотрим задачу $(\mathcal{P}_V)$:

$$\hat{Q} = \arg \min_{\lambda_1(Q) = \lambda_1^*} \|Q - Q_0\|_{\mathcal{M}_n(0,1)}^2, \quad \lambda_1(Q_0) + \mu_m - \mu_1 < \lambda_1^*.$$

Согласно теоремам 3 и 4 задача $(\mathcal{P}_V)$ имеет единственное решение $\hat{Q}$ такое, что $\hat{Q}(x) = Q_0(x) + \alpha \vec{u} \otimes \vec{u}, \|\vec{u}\| = 1$ и

$$\mathcal{L}[\hat{Q}]\vec{u} = -\frac{d^2}{dx^2}\vec{u} + (Q_0(x) + \alpha \vec{u} \otimes \vec{u})\vec{u} = \lambda_1^*\vec{u}, \quad \vec{u}(0) = \vec{u}(1) = 0, \quad (18)$$

Оптимизационная обратная спектральная задача ...

Теперь легко проверить, что (18) можно преобразовать к системе уравнений вида :

$$-\frac{d^2}{dx^2}u_k(x) + \left(q_0(x) + \alpha \sum_{j=1}^m u_j^2(x) \right) u_k(x) = (\lambda_1^* + \mu_k)u_k(x),$$

(19)

$$u_k(0) = u_k(1) = 0, \quad k = 1, \dots, m.$$

($\mathcal{P}^1$) Пусть заданы $\lambda_1^* < \lambda_2^* < \dots < \lambda_m^* \in \mathbb{R}$ - спектральные данные задачи, вещественная функция $q_0 \in L^2(0, 1)$. Требуется найти вещественный потенциал $\hat{q} \in L^2(0, 1)$ такой, что:

$$\lambda_k(\hat{q}) = \lambda_k^*, \quad k = 1, 2, \dots, m; \quad (20)$$

$$\text{и } \|q_0 - \hat{q}\|_{L^2} =$$

$$= \min\{\|q_0 - q\|_{L^2} : \lambda_k^* = \lambda_k(q), \quad k = 1, 2, \dots, m; \quad q \in L^2(0, 1)\}.$$

(21)

Оптимизационная обратная спектральная задача

1. *Yurko V. A.* Inverse Spectral Problems and their Applications, Saratov, PI Press, 2001
2. *Chu, M. and Golub, G.H.* Inverse eigenvalue problems: theory, algorithms, and applications (Vol. 13). Oxford University Press, 2005
3. Y. Sh. Ilyasov, N. F. Valeev On nonlinear boundary value problem corresponding to N - dimensional inverse spectral problem, J. Diff. Eq., 266 (2019), No. 8
4. Yavdat Ilyasov, Nur Valeev Recovery of the nearest potential field from the m observed eigenvalues, Physica D: Nonlinear Phenomena, 426 (2021)
5. В. А. Садовничий, Я. Т. Султанаев, Н. Ф. Валеев Многопараметрические обратные спектральные задачи и их приложения // Доклады академии наук, 426:4 (2009)
6. Y. V. Egorov and V. A. Kondrat'ev Estimates for the first eigenvalue in some Sturm-Liouville problems, Russian Math. Surv. 51(1996), No. 3, 439.
7. Q. Wei, G. Meng, M. Zhang Extremal values of eigenvalues of Sturm-Liouville operators with potentials in L^1 balls, J. Diff. Eq. 247(2009), No. 2, 364–400.
8. Y. S. Kivshar, G. P. Agrawal Optical solitons: from fibers to photonic crystals. Academic press, 2003

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!