

Новый метод построения асимптотики решений
уравнения Штурма-Лиувилля с
осциллирующим потенциалом.

Н.Ф.Валеев, Я.Т.Султанаев, Э.А.Назирова

7 ноября 2022 г.

$$ly = \lambda y$$

$$Y' = A(x, \lambda)Y$$

$$Y = T_1 U, \quad U = T_2 Z, \dots$$

$$Y' = (\Lambda + D)Y$$

$$iy''' + q(x)y = i\lambda y, \quad (1)$$

$$q(x) = q_3'''(x), \quad q_1(x) = q_3''(x), \quad q_2(x) = q_3'(x), \quad q_3(x) \in L_{loc}^1[x_0; +\infty).$$

$$z_1 = y, \quad z_2 = y', \quad z_3 = y'' - iq_1(x)y$$

$$\frac{d}{dx}\vec{z}(x, \lambda) = A_0(x, \lambda)\vec{z}(x, \lambda), \quad A_0 = L_0 + iq_1(x) \cdot D, \quad (2)$$

$$L_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \lambda & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{z}(x, \lambda) = e^{iq_2(x)D} \vec{u}(x, \lambda)$$

$$\vec{u}'(x, \lambda) = e^{-iq_2(x)D} L_0 e^{iq_2(x)D} \vec{u}(x, \lambda), \quad (3)$$

$$e^{-q_2(x)D} L_0 e^{q_2(x)D} = L_0 - iq_2(x)[L_0, D] + \\ + \frac{1}{2!} q_2^2(x)[[L_0, D], D] - \frac{1}{3!} iq_2^3(x)[[[L_0, D], D], D] + \dots$$

$$\vec{u}(x, \lambda) = e^{iq_3(x)L_{01}} \vec{v}(x, \lambda).$$

$$\vec{v}'(x, \lambda) = \left[e^{-iq_3 L_{01}} \left(L_0 - \frac{1}{2!} q_2^2 L_{02} + \frac{1}{3!} i q_2^3 L_{03} \right) e^{iq_3 D} \right] \vec{v}, \quad (4)$$

$$\frac{d}{dx} \vec{v}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 1.5q_2^2 a^{-1} & 0 & a^{-1} \\ \lambda - iq_2^3 & 1.5q_2^2 a & 0 \end{pmatrix} \vec{v}(x, \lambda), \quad a(x) = e^{3iq_3(x)} \quad (5)$$

$$l(y) = \frac{i}{2} \left\{ (p(x)y''')'' + (p(x)y'')''' \right\} + q(x)y = i\lambda y, \quad (6)$$

$$p(x) \in AC_{loc}[x_0; +\infty), \quad q(x) = q_3'''(x), \quad q_3(x) \in L_{loc}^1[x_0; +\infty)$$

$$q(x) = q_3'''(x), \quad q_1(x) = q_3''(x), \quad q_2(x) = q_3'(x)$$

*см. Н. Ф. Валеев, Э. А. Назирова, Я. Т. Султанаев "Об одном методе исследования асимптотики решений дифференциальных уравнений нечетного порядка с осциллирующими коэффициентами", Матем. заметки, т. 109, №6, с. 938–943

$$y'' + (1 + q(x))y = 0, x_0 < x < \infty \quad (7)$$

$$q(x) = x^\alpha e^{irx^\beta} + x^\alpha e^{-ix^\beta}, \quad \alpha < 0, \quad 1 < \beta$$

$$q(x) = 2ax^\alpha \cos(x^\beta), \quad \alpha < 0, \quad 1 < \beta.$$

$$\beta > \alpha/2 + 1$$

$$\sigma^*(x) = \sum_{k=1}^n g_k(x) e^{ip_k(x)},$$

$$g_k(x) = \sum_{j=0}^{m_k} g_{k,j} x^{\alpha_{k,j}}, g_{k,j} \in \mathbb{C}, \alpha_{k,j} \in \mathbb{R},$$

$$0 > \alpha_{k,0} > \alpha_{k,1} > \dots > \alpha_{k,m_k-1} > \alpha_{k,m_k} \geq -1;$$

$$p_k(x) = \sum_{j=0}^{n_k} p_{k,j} x^{\beta_{k,j}}, p_{k,j}, \beta_{k,j} \in \mathbb{R},$$

$$\beta_{k,0} > \beta_{k,1} > \dots > \beta_{k,m_k-1} > \beta_{k,n_k}, \quad 1 < \beta_{k,0},$$

$\sigma^*(x) \in \mathbb{W}^0$ пространство быстро осциллирующих квазиполиномов.

$$\deg(\sigma^*(x)) = \max_k \{\alpha_{k,0}\}.$$

$$\sigma(x) = \sigma^*(x) + f(x), \quad \sigma^*(x) \in \mathbb{W}^0, \quad f(x) \in L(x_0; +\infty),$$

$$\sigma(x) \in \mathbb{W}$$

Обозначим $\mathbb{V}^0$ множество полиномов

$$\mathbb{V}^0 : g^*(x) = \sum_{j=0}^m g_j x^{\alpha_j}, g_j \in \mathbb{C}, \alpha_j \in \mathbb{R}, 0 > \alpha_0 > \alpha_1 > \dots > \alpha_m \geq -1.$$

$$\mathbb{V} : g(x) = g^*(x) + f(x), g^*(x) \in \mathbb{V}^0, f(x) \in L(x_0; +\infty),$$

$$\deg(g) = \deg(g^*) = \alpha_0$$

1. $\mathbb{W} \cup \mathbb{V}$ - алгебра.
2. Если $\sigma(x) \in \mathbb{W}^0$, то $\int_x^\infty \sigma(s) ds \in \mathbb{W}$

Теорема. Пусть $q(x) \in \mathbb{W}^0$ для любого набора чисел $\{c_1, \dots, c_n\}$, где $c_j \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ выполнено условие:

$$\sum_{k=1}^n c_k p_{k,0} \neq 0. \quad (8)$$

Тогда для решений уравнения (7) при $x \rightarrow +\infty$ справедливы асимптотические соотношения:

$$y(x) = e^{\pm ix}(1 + o(1)).$$

Заметим, что функция $q(x) = x^\alpha e^{irx^\beta} + x^\alpha e^{-ix^\beta}$, $\alpha < 0$, $1 < \beta$ удовлетворяет условию теоремы при иррациональных r , а при рациональных r не удовлетворяет.

Схема доказательства.

$$\vec{z}(x, \lambda) = (z_1, z_2) : z_1 = y, z_2 = y'$$

$$\frac{d}{dx} \vec{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 - q(x) & 0 \end{pmatrix} \vec{z}, \quad (9)$$

$$\vec{z}(x) = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{u}(x)$$

$$\frac{d}{dx} \vec{u} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \vec{u} + \frac{iq}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{u}. \quad (10)$$

$$L_0 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{tr}(L_k) = 0, \quad \frac{1}{2}[L_0, L_1] = -L_2, \quad \frac{1}{2}[L_0, L_2] = L_1, \quad \frac{1}{2}[L_1, L_2] = L_0,$$

$$[A, B] = AB - BA$$

$$\rho_1(x) = q(x)/2, \quad \sigma_1(x) = iq(x)/2, \quad \vec{u}_1 = \vec{u}$$

$$\frac{d}{dx}\vec{u}_1 = (1 + \rho_1(x))L_0\vec{u}_1 + \sigma_1(x)L_1\vec{u}_1. \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
1 + \rho_{k+1}(x) &= (1 + \rho_k^*(x)) \cos \left(2 \int_x^{+\infty} \sigma_k^*(\xi) d\xi \right), \\
\sigma_{k+1}(x) &= (1 + \rho_k^*(x)) \sin \left(2 \int_x^{+\infty} \sigma_k^*(\xi) d\xi \right). \quad (12)
\end{aligned}$$

Заметим, что если $\sigma_k^*(x) \in \mathbb{W}^0$, то

$$\int_x^{+\infty} \sigma_k^*(\xi) d\xi \in \mathbb{W}, \quad \deg(\sigma_k^*) > \deg \left(\int_x^{+\infty} \sigma_k^*(\xi) d\xi \right).$$

Из условия (8) теоремы 1 вытекает, что $\rho_{k+1}(x), \sigma_{k+1}(x) \in \mathbb{W}$.

$$\rho_{k+1}(x) = \rho_{k+1}^*(x) + f_{k+1}(x), \quad \sigma_{k+1}(x) = \sigma_{k+1}^*(x) + h_{k+1}(x),$$

где $\rho_{k+1}^*(x), \sigma_{k+1}^*(x) \in \mathbb{W}^0$, $f_{k+1}(x), h_{k+1}(x) \in L(x_0; +\infty)$.

$$T_{k+1}(x) = \exp \left(\int_x^{+\infty} \sigma_k^*(\xi) d\xi L_k \right), \quad \vec{u}_{k+1} = T_k \vec{u}_k, \quad (13)$$

где $L_k = L_1$ при нечетных k и $L_k = L_2$ - при четных k . Отметим, что из $\sigma_k^* \in \mathbb{W}^0$ следует ограниченность матрицы $T_k(x)$.

$$\frac{d}{dx} \vec{u}_{k+1} = (1 + \rho_{k+1}^*) L_0 \vec{u}_{k+1} + \sigma_{k+1}^* L_{k+1} \vec{u}_{k+1} + D_{k+1} \vec{u}_{k+1}, \quad (14)$$

$$D_{k+1} = T_{k+1}^{-1} D_k T_{k+1} + (\rho_{k+1} - \rho_{k+1}^*) L_0 + (\sigma_{k+1} - \sigma_{k+1}^*) L_k.$$

$$D_k(x) \in L(x_0; +\infty).$$

С помощью итераций (13) систему уравнений (11) можно свести к эквивалентной L-диагональной системе.

Для $\sigma(x) \in \mathbb{W}^0$, обозначим

$$\gamma(\sigma) = \min_k \deg \left(\frac{d}{dx} p_k(x) \right) - 1.$$

Из определения пространств $\mathbb{W}^0$ и $\mathbb{W}$ следует, что $\gamma > 0$.

$$\begin{aligned} \deg(\sigma_{k+1}(x)) &= \deg \left(\int_x^{+\infty} \sigma_k^*(\xi) d\xi \right) \leq \deg(\sigma_k^*) - \gamma(\sigma_1) \leq \dots \\ &\dots \leq \deg(\sigma_1^*) - k\gamma(\sigma_1). \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е. Из доказанной теоремы следует, что возмущение $q(x)$ из рассматриваемого пространства быстро осциллирующих квазиполиномов $\mathbb{W}$, при выполнении условия (8) не влияет на главную часть асимптотики решений уравнения (7).

Условие (8) теоремы накладывает ограничения на алгебраическую структуру возмущения $q(x)$.

$$q(x) = x^\alpha e^{irx^\beta} + x^\alpha e^{-ix^\beta} \quad \alpha < 0, \quad 1 < \beta$$

удовлетворяет условию теоремы при иррациональных r , а при рациональных r не удовлетворяет.

Контрпример

$$q(x) = 2ax^\alpha \cos(x^\beta), \quad \alpha < 0, \beta > 1,$$

$$q(x) = 2ag_1(x)e^{ip_1(x)} + ag_2(x)e^{-ip_2(x)},$$

$$g_1(x) = g_2(x) = x^\alpha, \quad p_1(x) = -p_2(x) = x^\beta.$$

Для потенциала $q(x)$ условие теоремы не выполняется.

В самом деле, при $c_1 = c_2 = 1$, получим $c_1 p_1(x) + c_2 p_2(x) \equiv 0$.

$$y_{1,2}(x) = e^{\pm ix \pm \frac{a^2}{\beta^2(2(\alpha-\beta+1)+1)} x^{2(\alpha-\beta+1)+1} + r_{1,2}(x)} (1 + o(1)),$$

где $r_{1,2}(x)$ полиномы такие, что $r_{1,2}(x) = o(x^{2(\alpha-\beta+1)+1})$.

1. Н. Ф. Валеев, Э. А. Назирова, Я. Т. Султанаев "Об одном методе исследования асимптотики решений дифференциальных уравнений нечетного порядка с осциллирующими коэффициентами Матем. заметки, 109:6 (2021), 938–943
2. Н. Ф. Валеев, О. В. Мякинова, Я. Т. Султанаев, "Об асимптотике решений сингулярного дифференциального уравнения n -го порядка с нерегулярными коэффициентами", Матем. заметки, 104:4 (2018), 626–631
3. Л. Н. Валеева, Э. А. Назирова, Я. Т. Султанаев "Об одном методе исследования асимптотики решений дифференциальных уравнений Штурма–Лиувилля с быстро осциллирующими коэффициентами Мат. заметки, 112:6 (2022), 935-940.

Спасибо за внимание !