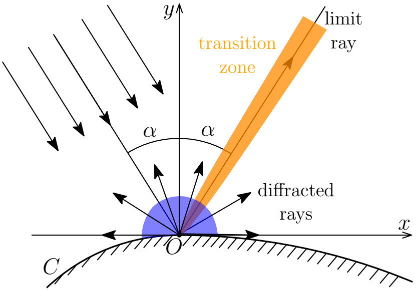
Коротковолновая дифракция на контурах с негладкой кривизной

Е. А. Злобина, А. П. Киселев

Работа поддержана грантом РНФ №22-21-00557

Москва, 7 ноября 2022

Дифракция на негладкости кривизны. Некасательное падение

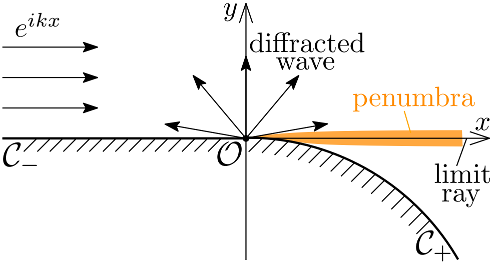


Скачок кривизны:
V. H. Weston (1962, 65);
T. B. A. Senior (1972);
L. Kaminetzky & J. B. Keller (1972);
Z. M. Rogoff & A. P. Kiselev (2001),
и др.

Скачок или степенная особенность кривизны или ее производной:
Е. А. Злобина и А. П. Киселев (2018–2022).

Описано поле вблизи предельного луча, найдено выражение для дифрагированной волны.

Дифракция от скачка кривизны. Касательное падение

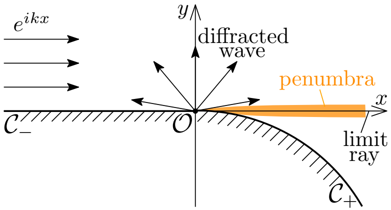


А. В. Попов *Обратное рассеяние от линии разрыва кривизны*, Труды V Всесоюзн. Симпоз. по Дифр. Распр. Волн, 1971.

Затем другие конфигурации рассматривали Н. Я. Кирпичникова, В. Б. Филиппов, А. С. Кирпичникова (1995–1999).

Постановка задачи

Предполагается гармоническая зависимость от времени $e^{-i\omega t}$.



Уходящая волна u^{out} удовлетворяет уравнению Гельмгольца

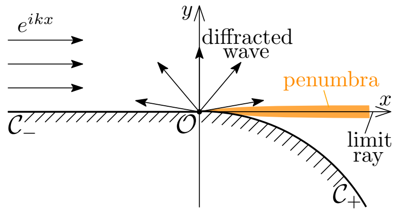
$$(\partial_x^2 + \partial_y^2 + k^2)u^{\mathrm{out}} = 0, \quad k \gg 1,$$

и граничному условию Неймана

$$\partial_n \left(u^{\mathrm{out}} + e^{ikx}\right)\Big|_{\mathcal{C}} = 0.$$

Постановка задачи

Предполагается гармоническая зависимость от времени $e^{-i\omega t}$.



Уходящая волна u^{out} удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2 + k^2)u^{\text{out}} = 0, \quad k \gg 1,$$

и граничному условию Неймана

$$\partial_n \left(u^{\text{out}} + e^{ikx}\right)\Big|_{\mathcal{C}} = 0.$$

Вблизи $\mathcal{O}$ кривизна контура æ имеет вид

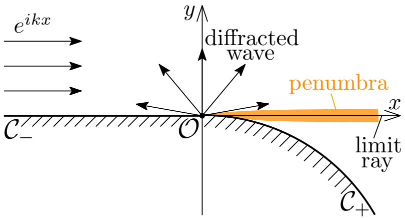
$$æ(x) = h\theta(x),$$

где $h > 0$ — значение кривизны $\mathcal{C}_+$ в точке $\mathcal{O}$, а

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, \ x > 0, \\ 0, \ x \leq 0 \end{cases}$$

— функция Хевисайда.

Предсказания Геометрической Теории Дифракции



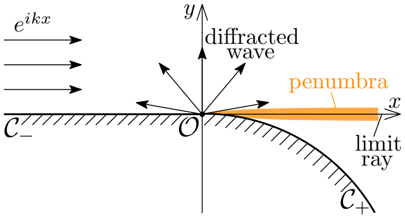
Вдали от предельного луча $u^{\text{out}} \equiv u^{\text{dif}}$, причем

$$u^{\text{dif}} \approx A(\varphi; k)\frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}}, \quad kr \gg 1.$$

Здесь $A(\varphi; k)$ — дифракционный коэффициент, и

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad 0 \leqslant r < \infty, -\pi \leqslant \varphi < \pi.$$

Предсказания Геометрической Теории Дифракции



Вдали от предельного луча $u^{\text{out}} \equiv u^{\text{dif}}$, причем

$$u^{\text{dif}} \approx A(\varphi; k) \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}}, \quad kr \gg 1.$$

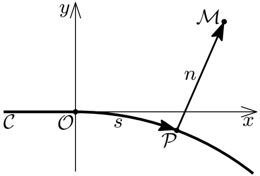
Здесь $A(\varphi; k)$ — дифракционный коэффициент, и

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad 0 \leqslant r < \infty, -\pi \leqslant \varphi < \pi.$$

А. В. Попов

- определил дифракционный коэффициент
- не интересовался полем в тени и полутени

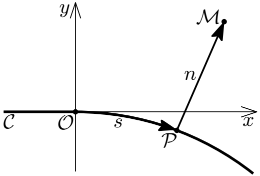
Локальные координаты (s, n)



$æ(x) = h\theta(x)$:

$$\begin{cases} x = s + \theta(s)\left(hns - \dfrac{h^2 s^3}{6} + O\left(h^3 s^3 (n + hs^2)\right)\right), \\ y = n - \theta(s)\left(\dfrac{hs^2}{2} + O\left(h^2 s^2 (n + hs^2)\right)\right). \end{cases}$$

Локальные координаты (s, n)



$æ(x) = h\theta(x)$:

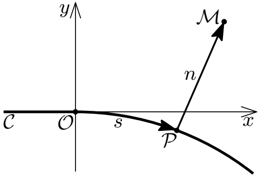
$$\begin{cases} x = s + \theta(s)\left(hns - \dfrac{h^2 s^3}{6} + O\left(h^3 s^3 (n + hs^2)\right)\right), \\ y = n - \theta(s)\left(\dfrac{hs^2}{2} + O\left(h^2 s^2 (n + hs^2)\right)\right). \end{cases}$$

Вблизи $\mathcal{O}$ падающая волна имеет вид

$$u^{\mathrm{inc}} = e^{ikx} = e^{iks} V,$$

где V осциллирует медленнее e^{iks}.

Локальные координаты (s, n)



$æ(x) = h\theta(x)$:

$$\begin{cases} x = s + \theta(s)\left(hns - \dfrac{h^2 s^3}{6} + O\left(h^3 s^3 (n + hs^2)\right)\right), \\ y = n - \theta(s)\left(\dfrac{hs^2}{2} + O\left(h^2 s^2 (n + hs^2)\right)\right). \end{cases}$$

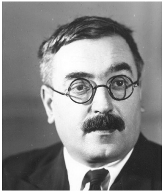
Вблизи $\mathcal{O}$ падающая волна имеет вид

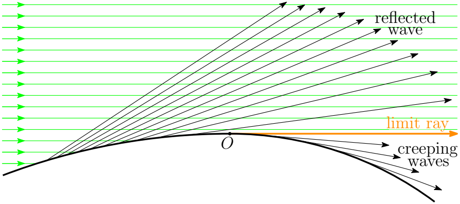
$$u^{\mathrm{inc}} = e^{ikx} = e^{iks} V,$$

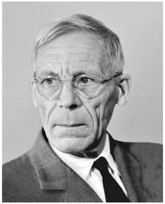
где V осциллирует медленнее e^{iks}.

Так же было в классической задаче дифракции на гладком выпуклом теле.

Задача Леонтовича—Фока

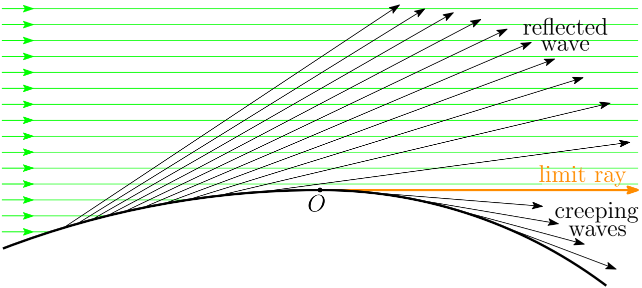






- В. А. Фок, "Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн", 1965
- W. P. Brown, *On the asymptotic behavior of electromagnetic fields scattered from convex cylinders near grazing incidence*, Math. An. & Appl., 1966
- В. М. Бабич, Н. Я. Кирпичникова, "Метод пограничного слоя в задачах дифракции", 1972

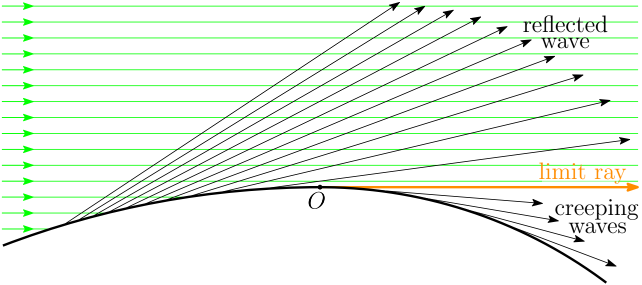
Метод параболического уравнения Леонтовича—Фока



Действуем в духе классического подхода:

- выделяем быстроосциллирующий множитель e^{iks}
- вводим растянутые переменные
- сводим исходную задачу к задаче для параболического уравнения Леонтовича—Фока

Метод параболического уравнения Леонтовича—Фока



Растянутые переменные:

$$\sigma = (h^2k/2)^{\frac{1}{3}}s, \quad \nu = (2hk^2)^{\frac{1}{3}}n, \qquad k/h \gg 1.$$

Анзац для уходящей волны:

$$u^{\text{out}} = e^{iks}U(\sigma,\nu) = e^{iks}\left(U_0(\sigma,\nu) + O\left((h/k)^{\frac{2}{3}}\right)\right),$$

U — множитель ослабления.

Сведение к параболическому уравнению

$$\begin{cases} k(x-s) = \theta(\sigma)\left(\nu\sigma - \dfrac{\sigma^3}{3} + O\left((h/k)^{\frac{2}{3}}\,\sigma^3(\nu+\sigma^2)\right)\right), \\ (2hk^2)^{\frac{1}{3}}y = \nu - \theta(\sigma)\left(\sigma^2 + O\left((h/k)^{\frac{2}{3}}\,\sigma^2(\nu+\sigma^2)\right)\right). \end{cases}$$

Множитель ослабления падающей волны $e^{ikx} = e^{iks}V$:

$$V(\sigma,\nu) = 1 - \theta(\sigma) + \theta(\sigma)e^{i\left(\sigma\nu - \sigma^3/3\right)} + O\left((h/k)^{\frac{2}{3}}\,\sigma^3(\nu+\sigma^2)\right).$$

Сведение к параболическому уравнению

$$\begin{cases} k(x-s) = \theta(\sigma)\left(\nu\sigma - \dfrac{\sigma^3}{3} + O\left((h/k)^{\frac{2}{3}}\sigma^3(\nu+\sigma^2)\right)\right), \\ (2hk^2)^{\frac{1}{3}} y = \nu - \theta(\sigma)\left(\sigma^2 + O\left((h/k)^{\frac{2}{3}}\sigma^2(\nu+\sigma^2)\right)\right). \end{cases}$$

Множитель ослабления падающей волны $e^{ikx} = e^{iks}V$:

$$V(\sigma,\nu) = 1 - \theta(\sigma) + \theta(\sigma)e^{i\left(\sigma\nu - \sigma^3/3\right)} + O\left((h/k)^{\frac{2}{3}}\sigma^3(\nu+\sigma^2)\right).$$

NB: малость остаточных членов требует ограничений на расстояние до точки негладкости $\mathcal{O}$:

$$\sigma \ll (k/h)^{\frac{2}{15}}, \quad \nu \ll (k/h)^{\frac{4}{15}}.$$

Сведение к параболическому уравнению

$$\begin{cases} k(x-s) = \theta(\sigma)\left(\nu\sigma - \dfrac{\sigma^3}{3} + O\left((h/k)^{\frac{2}{3}}\,\sigma^3(\nu+\sigma^2)\right)\right), \\ (2hk^2)^{\frac{1}{3}} y = \nu - \theta(\sigma)\left(\sigma^2 + O\left((h/k)^{\frac{2}{3}}\,\sigma^2(\nu+\sigma^2)\right)\right). \end{cases}$$

Множитель ослабления падающей волны $e^{ikx} = e^{iks}V$:

$$V(\sigma,\nu) = 1 - \theta(\sigma) + \theta(\sigma) e^{i\left(\sigma\nu - \sigma^3/3\right)} + O\left((h/k)^{\frac{2}{3}}\,\sigma^3(\nu+\sigma^2)\right).$$

NB: малость остаточных членов требует ограничений на расстояние до точки негладкости $\mathcal{O}$:

$$\sigma \ll (k/h)^{\frac{2}{15}}, \quad \nu \ll (k/h)^{\frac{4}{15}}.$$

Задача для множителя ослабления U_0:

$$\begin{cases} \partial_\nu^2 U_0 + i\partial_\sigma U_0 + \nu\theta(\sigma) U_0 = 0, \\ \partial_\nu U_0\big|_{\nu=0} = -i\theta(\sigma)\sigma e^{-i\sigma^3/3}. \end{cases}$$

Решение задачи для U_0

Ищем U_0 в виде интеграла Фурье:

$$U_0(\sigma, \nu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{U}_0(\xi, \nu) e^{i\sigma\xi} d\xi.$$

Тогда получим

$$\begin{cases} \partial_\nu^2 \widehat{U}_0(\xi, \nu) - \xi \widehat{U}_0(\xi, \nu) + \dfrac{i\nu}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{U}_0(t, \nu)}{t - (\xi - i0)} dt = 0, \\ \partial_\nu \widehat{U}_0 \Big|_{\nu=0} = I'(\xi). \end{cases}$$

Здесь

$$I(\xi) = \int_0^\infty e^{-i\left(\sigma\xi + \sigma^3/3\right)} d\sigma$$

— *неоднородная* функция Эйри (функция Скорера): $I''(\xi) - \xi I(\xi) = -i$.

Решение задачи для U_0

Решение, отвечающее уходящей волне для временной зависимости $e^{-i\omega t}$:

$$\widehat{U}(\xi, \nu) = -\frac{I'(\xi)}{w_1'(\xi)} w_1(\xi - \nu).$$

Здесь w_1 — классическая функция Эйри в обозначениях Фока:

$$w_1(z) = \mathrm{Bi}(z) + i\mathrm{Ai}(z) = \int_\gamma e^{zt - \frac{t^3}{3}} dt, \quad \gamma : \infty e^{-\frac{2i\pi}{3}} \to 0 \to +\infty.$$

Тогда

$$U_0(\sigma, \nu) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I'(\xi)}{w_1'(\xi)} w_1(\xi - \nu) e^{i\sigma\xi} d\xi.$$

Решение задачи для U_0

Решение, отвечающее уходящей волне для временной зависимости $e^{-i\omega t}$:

$$\widehat{U}(\xi, \nu) = -\frac{v'(\xi)}{w_1'(\xi)} w_1(\xi - \nu).$$

Здесь w_1 — классическая функция Эйри в обозначениях Фока:

$$w_1(z) = \mathrm{Bi}(z) + i\mathrm{Ai}(z) = \int_\gamma e^{zt - \frac{t^3}{3}} dt, \quad \gamma : \infty e^{-\frac{2i\pi}{3}} \to 0 \to +\infty.$$

Тогда

$$U_0(\sigma, \nu) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v'(\xi)}{w_1'(\xi)} w_1(\xi - \nu) e^{i\sigma\xi} d\xi.$$

Формулы Фока для классического случая дифракции на гладком теле получаются заменой

$$I(\xi) \longleftrightarrow v(\xi) \equiv \mathrm{Ai}(\xi).$$

Решение задачи для U_0

Решение, отвечающее уходящей волне для временной зависимости $e^{-i\omega t}$:

$$\widehat{U}(\xi,\nu) = -\frac{I'(\xi)}{w_1'(\xi)} w_1(\xi-\nu).$$

Здесь w_1 — классическая функция Эйри в обозначениях Фока:

$$w_1(z) = \mathrm{Bi}(z) + i\mathrm{Ai}(z) = \int_\gamma e^{zt-\frac{t^3}{3}}\,dt, \quad \gamma : \infty e^{-\frac{2i\pi}{3}} \to 0 \to +\infty.$$

Тогда

$$U_0(\sigma,\nu) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{I'(\xi)}{w_1'(\xi)} w_1(\xi-\nu) e^{i\sigma\xi} d\xi.$$

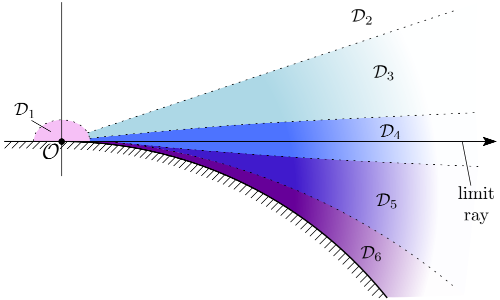
Формулы Фока для классического случая дифракции на гладком теле получаются заменой

$$I(\xi) \longleftrightarrow v(\xi) \equiv \mathrm{Ai}(\xi).$$

NB: $U_0 = 0$ при $\sigma \leqslant 0$; везде далее $\sigma > 0$.

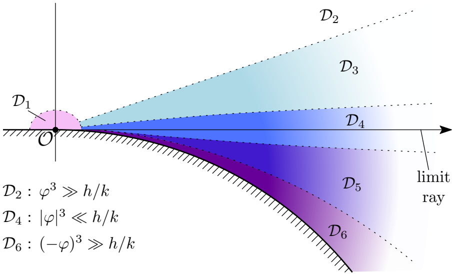
Исследование U_0

$$U_0(\sigma,\nu) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{I'(\xi)}{w_1'(\xi)}w_1(\xi-\nu)e^{i\sigma\xi}d\xi.$$



Область $\mathcal{D}_1$: и σ, и ν не большие. Коротковолновое асимптотическое упрощение невозможно.

Исследуем U_0 в областях $\mathcal{D}_2$–$\mathcal{D}_6$, где $\nu+\sigma \gg 1$.
Там имеем интеграл от быстроосциллирующей функции.
Спецфункции в интеграле заменяются асимптотиками.



$$\mathcal{D}_2 : \ u^{\mathrm{out}} \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{h}{k}\,\frac{2}{\varphi^4}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}\,\frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}}$$

$$\mathcal{D}_3 : \ u^{\mathrm{out}} \approx \frac{e^{iks+i\frac{2}{3}\nu^{\frac{3}{2}}-i\frac{\pi}{4}}}{2\pi\nu^{\frac{1}{4}}} \int \frac{H'(\xi)}{w_1'(\xi)} e^{i(\sigma-\sqrt{\nu})\xi}\,d\xi$$

$$\mathcal{D}_5 : \ u \approx \frac{e^{iks+i\frac{2}{3}\nu^{\frac{3}{2}}-i\frac{\pi}{4}}}{2\pi\nu^{\frac{1}{4}}} \int \frac{H'(\xi)}{w_1'(\xi)} e^{i(\sigma-\sqrt{\nu})\xi}\,d\xi$$

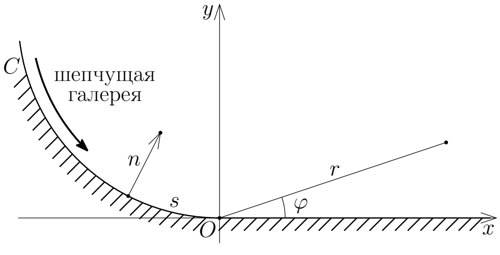
$$\mathcal{D}_6 : \ u \approx -\sum_{j=1}^{N} \frac{iI'(\zeta_j)}{\zeta_j w_1(\zeta_j)} w_1(\zeta_j-\nu) e^{iks+i\sigma\zeta_j}$$

$$\mathcal{D}_4 : \ u \approx e^{ikx}\Phi\left(\sqrt{\frac{kr}{2}}\,\varphi\right) + \\ + \frac{e^{i\left(ks+\frac{2}{3}\nu^{\frac{3}{2}}-i\frac{\pi}{4}\right)}}{2\pi\nu^{\frac{1}{4}}}\left(\int_{-\infty}^{0} \frac{H'(\xi)}{w_1'(\xi)} e^{i\xi(\sigma-\sqrt{\nu})}\,d\xi - i\int_{0}^{\infty} \frac{I'(\xi)}{w_1'(\xi)} e^{i\xi(\sigma-\sqrt{\nu})}\,d\xi\right)$$

Здесь

$$I(z) = \int_0^\infty e^{-i(zt+t^3/3)}\,dt, \quad H(z) = \int_0^\infty e^{zt-t^3/3}\,dt, \quad \Phi(z) = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{it^2}\,dt.$$

Дифракция волны шепчущей галереи



Поле u удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2 + k^2)u = 0, \quad k \gg 1$$

и граничному условию Неймана

$$\partial_n u\big|_C = 0.$$

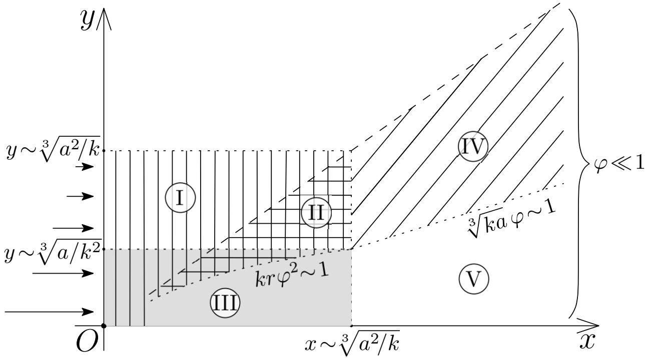
Слева — дуга окружности радиуса a, справа — прямая.

При удалении от границы $u \to 0$.

$$u^{\mathrm{inc}} = e^{iks} U^{\mathrm{inc}}, \quad U^{\mathrm{inc}} = e^{-i\tau' \left(k/2a^2\right)^{1/3} s}\, v\left(\left(\frac{2k^2}{a} \right)^{1/3} n - \tau' \right).$$

$v \equiv \mathrm{Ai}$ — функция Эйри, $v'(-\tau') = 0$.

Структура пограничных слоев



Спасибо за внимание!