

О структуре спектра несамосопряженных краевых задач для оператора Дирака

А.С. Макин

Введение.

Спектральные задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{1}{i}B\frac{d\mathbf{y}}{dx} + Q(x)\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}, \quad \mathbf{y} = \text{col}(y_1, \dots, y_n),$$

где B – невырожденная диагональная матрица $n \times n$,

$$B = \text{diag}(b_1^{-1}I_{n_1}, \dots, b_r^{-1}I_{n_r}) \in \mathbb{C}^{n \times n}, \quad n = n_1 + \dots + n_r,$$

с комплексными элементами $b_j \neq b_k$, и $Q(x)$ – потенциальная матрица, впервые были рассмотрены в работе Birkhoff и Langer [1]. Впоследствии спектральная теория указанных задач развивалась во многих направлениях.

Наиболее исследованными являются задачи на собственные значения для операторов Дирака и типа Дирака. В частности, многими авторами изучалась каноническая система Дирака на конечном интервале

$$B\mathbf{y}' + V\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}, \tag{1}$$

где $\mathbf{y} = \text{col}(y_1(x), y_2(x))$,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad V(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix},$$

Строение спектра системы (1) с регулярными краевыми условиями рассматривали Н.П. Бондаренко, С.А. Бутерин, М.М. Маламуд, В.А. Марченко, Т.В. Мисюра, Б.С. Митягин, И.М. Набиев, А.М. Савчук, И.В. Садовнича, А.А. Шкаликов, В.А. Юрко, А. Albeverio, R. Hryniv, Ya. Mykytyuk, автор настоящего доклада и другие.

В настоящей работе изучается система Дирака (1), где комплекснозначные функции $p, q \in L_2(0, \pi)$ ($V \in L_2(0, \pi)$), с двухточечными краевыми условиями

$$\begin{aligned} U_1(\mathbf{y}) &= a_{11}y_1(0) + a_{12}y_2(0) + a_{13}y_1(\pi) + a_{14}y_2(\pi) = 0, \\ U_2(\mathbf{y}) &= a_{21}y_1(0) + a_{22}y_2(0) + a_{23}y_1(\pi) + a_{24}y_2(\pi) = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где коэффициенты a_{ij} являются произвольными комплексными числами, а строки матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

линейно независимы. Основной целью является изучение строения спектра задачи на собственные значения для системы (1) с краевыми условиями типа (2) и негладким комплекснозначным потенциалом $V(x)$.

Обозначим через $\|\mathbf{f}\| = (|f_1|^2 + |f_2|^2)^{1/2}$ норму произвольного вектора $\mathbf{f} = \text{col}(f_1, f_2) \in \mathbb{C}^2$ и положим $\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = f_1 \bar{g}_1 + f_2 \bar{g}_2$. Обозначим через $L_{2,2}(a, b)$ пространство двумерных вектор-функций $\mathbf{f}(t) = \text{col}(f_1(t), f_2(t))$ с нормой $\|\mathbf{f}\|_{L_{2,2}(a,b)} = (\int_a^b \|\mathbf{f}(t)\|^2 dt)^{1/2}$. Оператор $\mathbb{L}\mathbf{y} = B\mathbf{y}' + V\mathbf{y}$ будем рассматривать как линейный оператор в пространстве $L_{2,2}(0, \pi)$ с областью определения $D(\mathbb{L}) = \{\mathbf{y} \in W_1^1[0, \pi] : \mathbb{L}\mathbf{y} \in L_{2,2}(0, \pi), U_j(\mathbf{y}) = 0 \ (j = 1, 2)\}$.

Обозначим через

$$E(x, \lambda) = \begin{pmatrix} c_1(x, \lambda) & -s_2(x, \lambda) \\ s_1(x, \lambda) & c_2(x, \lambda) \end{pmatrix} \quad (3)$$

матрицу фундаментальной системы решений уравнения (1) с краевыми условиями $E(0, \lambda) = I$, где I единичная матрица, и через $E_0(x, \lambda)$ фундаментальную систему решений невозмущенного уравнения $B\mathbf{y}' = \lambda\mathbf{y}$ с краевыми условиями $E_0(0, \lambda) = I$. Очевидно,

$$E_0(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \cos \lambda x & -\sin \lambda x \\ \sin \lambda x & \cos \lambda x \end{pmatrix}.$$

Хорошо известно, что элементы матрицы $E(x, \lambda)$ связаны соотношением

$$c_1(x, \lambda)c_2(x, \lambda) + s_1(x, \lambda)s_2(x, \lambda) = 1, \quad (4)$$

справедливом при любых x, λ .

Собственные значения задачи (1), (2) являются корнями характеристического уравнения

$$\Delta(\lambda) = 0,$$

где

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(E^{[1]}(\cdot, \lambda)) & U_1(E^{[2]}(\cdot, \lambda)) \\ U_2(E^{[1]}(\cdot, \lambda)) & U_2(E^{[2]}(\cdot, \lambda)) \end{vmatrix},$$

$E^{[k]}(x, \lambda)$ — k -ый столбец матрицы (3).

Обозначим через J_{ij} определитель, составленный из i -го и j -го столбцов матрицы A . Обозначим $J_0 = J_{12} + J_{34}$, $J_1 = J_{14} - J_{23}$, $J_2 = J_{13} + J_{24}$.

Методом оператора преобразования может быть показано [2], что характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ задачи (1), (2) может быть приведен к виду

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= J_{12} + J_{34} + J_{14}c_2(\pi, \lambda) - J_{23}c_1(\pi, \lambda) - J_{13}s_2(\pi, \lambda) - J_{24}s_1(\pi, \lambda) = \\ &= \Delta_0(\lambda) + \int_0^\pi r_1(t)e^{-i\lambda t}dt + \int_0^\pi r_2(t)e^{i\lambda t}dt, \end{aligned} \quad (5)$$

где функция

$$\Delta_0(\lambda) = J_0 + J_1 \cos \pi \lambda - J_2 \sin \pi \lambda = J_0 + \frac{J_1 + iJ_2}{2} e^{i\pi \lambda} + \frac{J_1 - iJ_2}{2} e^{-i\pi \lambda} \quad (6)$$

является характеристическим определителем невозмущенной задачи

$$B\mathbf{y}' = \lambda\mathbf{y}, \quad U(\mathbf{y}) = 0, \quad (7)$$

а функции $r_j \in L_2(0, \pi)$, $j = 1, 2$.

Краевые условия (2) могут быть разделены на 4 основных типа.

Определение. Краевые условия (2) называются *регулярными*, если

$$J_1^2 + J_2^2 = (J_{14} + J_{32})^2 + (J_{13} + J_{24})^2 \neq 0, \quad (8)$$

и *усиленно регулярными*, если дополнительно выполняется неравенство

$$J_0^2 \neq J_1^2 - J_2^2. \quad (9)$$

Определение. Краевые условия (2) называются *регулярными, но не усиленно регулярными*, если справедливо (8), но (9) не имеет места, т.е.,

$$J_0^2 = J_1^2 - J_2^2.$$

Определение. Краевые условия (2) называются *нерегулярными*, если

$$J_0 \neq 0, \quad J_1 + iJ_2 \neq 0, \quad J_1 - iJ_2 = 0; \quad J_0 \neq 0, \quad J_1 + iJ_2 = 0, \quad J_1 - iJ_2 \neq 0.$$

Определение. Краевые условия (2) называются *вырожденными*, если

$$J_1 = J_2 = 0; \quad J_0 = 0, \quad J_1 + iJ_2 \neq 0, \quad J_1 - iJ_2 = 0; \quad J_0 = 0, \quad J_1 + iJ_2 = 0, \quad J_1 - iJ_2 \neq 0.$$

Легко видеть, что краевые условия (2) являются вырожденными тогда и только тогда, когда характеристическое уравнение $\Delta_0(\lambda) = 0$ не имеет корней или $\Delta_0(\lambda) \equiv 0$.

Обозначим $c_j(\lambda) = c_j(\pi, \lambda)$, $s_j(\lambda) = s_j(\pi, \lambda)$, $j = 1, 2$. Обозначим также через PW_σ класс целых функций $f(z)$ экспоненциального типа, не превосходящего σ , таких что $\|f\|_{L_2(R)} < \infty$. Известно [3], что функции $c_j(\lambda)$, $s_j(\lambda)$ допускают представление

$$c_j(\lambda) = \cos \pi \lambda + g_j(\lambda), \quad s_j(\lambda) = \sin \pi \lambda + h_j(\lambda), \quad (10)$$

где $g_j, h_j \in PW_\pi$, $j = 1, 2$.

Лемма 1 [4]. *Целые функции $u(\lambda)$ и $v(\lambda)$ допускают представления*

$$u(\lambda) = \sin \pi \lambda + h(\lambda), \quad v(\lambda) = \cos \pi \lambda + g(\lambda), \quad (11)$$

где $h, g \in PW_\pi$, тогда и только тогда, когда

$$u(\lambda) = -\pi(\lambda_0 - \lambda) \prod_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{\lambda_n - \lambda}{n},$$

где $\lambda_n = n + \epsilon_n$, $\{\epsilon_n\} \in l_2$,

$$v(\lambda) = \prod_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_n - \lambda}{n - 1/2},$$

где $\lambda_n = n - 1/2 + \kappa_n, \{\kappa_n\} \in l_2$.

Сходимость бесконечных произведений понимается в смысле главного значения.

Основные результаты

В настоящей работе мы будем изучать задачу (1), (2) при выполнении условий

$$J_{13} \neq J_{24}, \quad J_{14} = 0, \quad J_{13} \neq 0, \quad J_{24} \neq 0. \quad (12)$$

Соотношениям (12) удовлетворяет широкий класс краевых условий, например, условия, задаваемые матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & b_2 & c_2 & 0 \end{pmatrix},$$

где $a_1 d_1 b_2 c_2 \neq 0$, $b_2 d_1 \neq -a_1 c_2$, в том числе усиленно регулярные, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

регулярные, но не усиленно регулярные, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 + \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

нерегулярные, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 - i & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

вырожденные, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1+3i}{2} & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим систему Дирака (1), (2), (12). Из (5), (6) следует, что характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ этой задачи может быть приведен к виду

$$\Delta(\lambda) = J_0 - J_{23}c_1(\lambda) - J_{13}s_2(\lambda) - J_{24}s_1(\lambda) = \Delta_0(\lambda) + f(\lambda), \quad (13)$$

где $\Delta_0(\lambda) = J_0 - (J_{13} + J_{24}) \sin \pi \lambda - J_{23} \cos \pi \lambda$, $f \in PW_\pi$. Справедливо и обратное утверждение.

Теорема 1. *Для любой функции $f \in PW_\pi$ существует потенциал $V \in L_2(0, \pi)$ такой, что для характеристического определителя $\Delta(\lambda)$ задачи (1), (2), (12) с потенциалом $V(x)$ справедливо равенство (13).*

Дополнительно к (12) предположим, что краевые условия (2) регулярны, стало быть, согласно (8)

$$(J_1 + iJ_2)(J_1 - iJ_2) \neq 0.$$

Теорема 2. Для того, чтобы множество Λ являлось спектром оператора Дирака (1), (2), (12) с комплекснозначным потенциалом $V \in L_2(0, \pi)$, необходимо и достаточно, чтобы оно состояло из двух последовательностей собственных значений $\lambda_{n,j}$, удовлетворяющих условию (14)

$$\lambda_{n,j} = 2n + \frac{\ln z_j}{i\pi} + \varepsilon_{n,j}, \quad (14)$$

где z_j являются корнями уравнения

$$(J_1 + iJ_2)z^2 + 2J_0z + (J_1 - iJ_2) = 0,$$

а значения ветви логарифма фиксируются в полосе $\text{Im}\lambda \in (-\pi, \pi]$, $\{\varepsilon_{n,j}\} \in l_2$, $j = 1, 2$, $n \in \mathbb{Z}$.

Замечание. Необходимость была доказана в [5].

Из (5) следует, что функция $\Delta(\lambda)$ является целой функцией экспоненциального типа, стало быть, для оператора (1), (2) существуют только следующие возможности:

- 1) спектр отсутствует;
- 2) спектр является конечным непустым множеством;
- 3) спектр представляет собой счетное множество, не имеющее конечной предельной точки;
- 4) спектр заполняет всю комплексную плоскость.

Из соотношений (5), (6) вытекает, что для задачи (1), (2) случай 1) реализуется, например, для краевых условий, задаваемых матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & i & -1 & i \\ 1 & -i & 1 & i \end{pmatrix},$$

а случай 4) для краевых условий, задаваемых матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 \end{pmatrix}.$$

Естественно, эти случаи неинтересны с точки зрения спектральной теории. Доказано [6], что случай 2 невозможен.

Определение. Будем говорить, что задача (1), (2) имеет классическую асимптотику спектра, если он представляет собой счетное множество, причем кратности собственных значений равномерно ограничены.

Хорошо известно, что задача (1), (2) с любыми регулярными краевыми условиями имеет указанную асимптотику. На наш взгляд представляется интересным вопрос о существовании задач (1), (2), для которых реализуется случай 3), но кратности собственных значений неограниченно растут, т.е. задач, система корневых функций которых содержит присоединенные функции сколь угодно высокого порядка.

Легко видеть, что характеристическое определитель задачи (7) для нерегулярных краевых условий принимает вид

$$\Delta_0(\lambda) = c + e^{i\pi\lambda} \quad \text{или} \quad \Delta_0(\lambda) = c + e^{-i\pi\lambda},$$

где в обоих случаях $c \neq 0$, причем все собственные значения простые, а для вырожденных краевых условий возможны случаи

$$\Delta_0(\lambda) \equiv 0, \quad \Delta_0(\lambda) \equiv c, \quad \Delta_0(\lambda) = e^{i\pi\lambda}, \quad \Delta_0(\lambda) = e^{-i\pi\lambda},$$

в первом из которых реализуется случай 4, а в остальных случай 1, поэтому построение потенциала $V(x)$, обеспечивающего неограниченный рост кратностей собственных значений, является нетривиальной задачей.

Для ее решения может быть применена теорема 1. Рассмотрим систему Дирака с краевыми условиями, задаваемыми матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Условия (15) являются вырожденными. Легко видеть, что они удовлетворяют соотношениям (12). Будем предполагать, что $V \in L_2(0, \pi)$. Из (4) следует, что характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ задачи (1), (15) может быть приведен к виду $\Delta(\lambda) = s_1(\lambda) - s_2(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} r(t)e^{i\lambda t} dt = f(\lambda)$, где $r \in L_2(0, \pi)$, $f \in PW_{\pi}$. Из теоремы 1 вытекает, что справедливо и обратное утверждение, т.е. для любой функции $f \in PW_{\pi}$ существует такой потенциал $V(x)$, что характеристический определитель соответствующей задачи (1), (15) $\Delta(\lambda) \equiv f(\lambda)$. Примеры функций из класса PW_{π} , имеющих корни сколь угодно высокой кратности, известны в литературе (см., например, [7], [8]). Отсюда следует существование двухточечных краевых задач для оператора Дирака, имеющих присоединенные функции сколь угодно высокого порядка. Заметим, что существование одномерных краевых задач с неограниченно растущей кратностью собственных значений ранее было установлено для оператора Штурма-Лувиля и обыкновенного дифференциального оператора любого четного порядка [7], [8], [9].

Заключительные замечания.

Построение и рассмотрение подобных примеров-"уродцев" оказывается связано с решением одного из основных вопросов спектральной теории несамосопряженных линейных операторов с дискретным спектром – вопроса о базисности системы корневых функций.

Рассмотрим обыкновенный дифференциальный оператор, порожденный дифференциальным выражением

$$ly = y^{(n)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_n(x)y = \lambda y, \quad (16)$$

заданным на интервале $(0, 1)$, где все коэффициенты $p_j \in L_1(0, 1)$, и линейно независимыми краевыми условиями

$$U_j(y) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{jk}y^{(j)}(0) + b_{jk}y^{(j)}(1)) = 0. \quad (17)$$

Если краевые условия (17) являются усиленно регулярными, то система собственных и присоединенных функций задачи (16), (17) образует базис Рисса в $L_2(0, 1)$ [10], [11]. Заметим, что в [12] содержалось ошибочное утверждение о справедливости указанной теоремы для более общего случая любых регулярных краевых условий. Правильное решение было дано в работе А.А. Шкаликова [13], где было установлено, что система корневых функций оператора (16), (17) с регулярными, но не усиленно регулярными краевыми условиями образует базис Рисса со скобками, причем в блок нужно объединять лишь собственные функции, отвечающие попарно близким собственным значениям. В [14] А.М. Минкин получил в определенном смысле обратное утверждение: из безусловной базисности системы корневых функций задачи (16), (17) вытекает регулярность краевых условий, но в своей последующей работе [15] сделал оговорку, что кратности собственных значений ограничены одной постоянной. Окончательное решение данного вопроса к настоящему времени получено только для оператора Штурма-Лиувилля

$$Ly = y'' - q(x)y$$

с краевыми условиями (17). Отсутствие даже обычной базисности системы собственных и присоединенных функций для нерегулярных краевых условий вытекает из работ S. Hoffman [16] и М.Н. Stone [17], [18], а для вырожденных из работ А.С. Макина [19], [20].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. G. D. Birkhoff and R. E. Langer, The boundary problems and developments associated with a system of ordinary differential equations of the first order, Proc. Amer. Acad. Arts Sci. **58** (1923), 49-128.
2. Lunyov A., Malamud M. On the Riesz basis property of root vectors system for 2×2 Dirac type operators // J. Math. Anal. Appl. 2016. V. 441. № 1. P. 57-103.
3. Tkachenko V. Non-self-adjoint Periodic Dirac Operators// Oper. Theory: Adv. and Appl. 2001. V. 123. P. 485-512.
4. Мисюра Т.В. Характеристика спектров периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых операцией Дирака. II// Теор. функц., функц. анализ и их прилож. 1979. Т. 31. С. 102–109.
5. Djakov and B. Mityagin, Unconditional Convergence of Spectral Decompositions of 1D Dirac operators with Regular Boundary Conditions, Indiana Univ. Math. J. **61** (2012), 359-398.
6. Макин А.С. О спектре двухточечных краевых задач для оператора Дирака.// Дифференц. уравнения. 2021 Т. 57, № 8, с. 1023–1031
7. Макин А.С. О двухточечной краевой задаче для оператора Штурма-Лиувилля с неклассической асимптотикой спектра// Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 5. С. 564-572.

8. Макин А.С. Об одной задаче для оператора Штурма-Лиувилля с неклассической асимптотикой спектра// Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 3. С. 317-322.
9. Makin A. Two-point boundary value problems with nonclassical asymptotics on the spectrum// Electron. J. Diff. Eqns. 2018. Vol. 2018. No. 95. P. 1-7.
10. Кесельман Г.М. О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов // Изв. вузов. Математика. 1964. № 2. С. 82-93.
11. Михайлов В.П. О базисах Рисса в $L^2(0, 1)$ // Докл. АН СССР. 1962. Т. 144. № 5. С. 981-984.
12. Dunford, Nelson; Schwartz, Jacob T. Linear operators. Part III. Spectral operators. With the assistance of William G. Bade and Robert G. Bartle. Reprint of the 1971 original. Wiley.
13. Шкаликов А.А., “О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями”, Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика, 1982, № 6, 41-51.
14. Minkin A. Spectrality of ordinary differential operators. arXiv:math/0409181 [math.SP].
15. Minkin A. Spectrality of ordinary differential operators. J. Math. Anal. Appl. 323 (2006) 387-402.
16. Hoffman S. Second-Order Linear Differential Operators Defined by Irregular Boundary Conditions/ Thesis. — Yale University, 1957.
17. Stone M.H. A comparison of the series of Fourier and Birkhoff// Trans. Am. Math. Soc. — 1926. — 29. — P. 695–761.
18. Stone M.H. Irregular differential systems of order two and the related expansions problems// Trans. Am. Soc. — 1927. — 29. — P. 23–53.
19. Макин А.С. О базисных свойствах системы корневых функций оператора Штурма-Лиувилля с вырожденными краевыми условиями. I. Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. №10, с. 1367-1382.
20. Макин А.С. О базисных свойствах системы корневых функций оператора Штурма-Лиувилля с вырожденными краевыми условиями. II. Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. №12, с. 1610-1625.