

Вокруг теоремы Гаусса о значениях дигамма-функции Эйлера в рациональных точках

Сафонова Т.А.

Доклад основан на совместных работах
с проф. Мирзоевым К.А.

Вторая конференция Математических центров России

Москва, МГУ, 8 ноября 2022 г.

Символами $\psi(a)$ и $G(a)$ обозначим дигамма-функцию (логарифмическую производную Γ -функции) Эйлера и связанную с ней функцию, определяемые равенствами

$$\psi(a) = \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}, \quad G(a) = \psi\left(\frac{1+a}{2}\right) - \psi\left(\frac{a}{2}\right).$$

Из этих равенств для функций $\psi(a)$ и $G(a)$ следует справедливость формул

$$\psi(a) = -\gamma + \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+a} \right), \quad G(a) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+a},$$

где γ - постоянная Эйлера.

Теорема Гаусса о значениях функции $\psi(a)$ в рациональных точках заключается в следующем:

Theorem (Гаусса)

Пусть $p, q \in \mathcal{N}$ и $0 < p < q$. Тогда

$$\psi\left(\frac{p}{q}\right) = -\gamma - \ln(2q) - \frac{\pi}{2} \operatorname{ctg}\left(\frac{p\pi}{q}\right) - 2 \sum_{k=1}^{[q-1]/2} \cos \frac{2pk\pi}{q} \ln \sin \frac{k\pi}{2q},$$

где $[x]$ - целая часть числа x .

Справедливость этого равенства можно извлечь, например, из интегрального представления

$$\psi(a) = -\gamma + \int_0^1 \frac{1 - t^{a-1}}{1 - t} dt.$$

В докладе речь пойдёт об аналогах этой теоремы для некоторых сумм, родственных с суммой $\psi(a)$, и, в частности, ещё об одном её доказательстве.

Докладчиком в соавторстве с проф. Мирзоевым К.А. предложен метод, позволяющий средствами спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов получать интегральное представление сумм некоторых степенных рядов и специальных функций.

Изложу суть метода на примере следующего оператора:

Пусть $-1 < a < 1$ и S - самосопряжённый оператор, порождённый в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}^2[0, \pi]$ выражением

$$l_2[y] = -y'' - a^2 y$$

и граничными условиями Дирихле $y(0) = y(\pi) = 0$. Хорошо известно, что

$$\mu_k = k^2 - a^2, \quad \text{и} \quad \varphi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kx, \quad k = 1, 2, \dots$$

соответствующие собственные значения и ортонормированные собственные функции оператора S .

Символом $G(x, t)$ обозначим функцию Грина задачи

$$\begin{cases} I_2[y] = f \\ y(0) = y(\pi) = 0. \end{cases}$$

Функция $G(x, t)$ существует, т.к. точка $\lambda = 0$ является регулярной точкой оператора S , и для неё справедлива формула

$$G(x, t) = \frac{\cos a(x + t - \pi) - \cos a(|x - t| - \pi)}{2a \sin(a\pi)}.$$

С другой стороны, функция $G(x, t)$ является ядром резольвенты оператора S , и, применяя спектральную теорему, получаем, что для неё справедливо тождество

$$G(x, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin kx \sin kt}{k^2 - a^2}.$$

В частности, при $t = x$ имеем

$$\frac{\sin(ax) \sin a(\pi - x)}{a \sin(a\pi)} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1 - \cos 2kx}{k^2 - a^2},$$

а при $t = \pi/2$ -

$$\frac{\sin(ax)}{2a \cos(a\pi/2)} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} \sin(2k-1)x}{(2k-1)^2 - a^2}.$$

Используя эти равенства, элементарное тождество

$$\frac{\sin(2k-1)x}{\sin x} = 1 + 2 \sum_{j=1}^{k-1} \cos(2jx)$$

и известные разложения в ряды Фурье функций

$$\ln \operatorname{tg}(\pi/4 + x/2), \quad \ln 2 \cos x, \quad \ln 2 \sin x$$

на промежутке $0 < x < \pi/2$, приходим к справедливости следующей теоремы.

Theorem (1)

Пусть $0 < a < 1$. Тогда справедливы равенства

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2 - a^2} = \frac{1}{2a \cos(a\pi/2)} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(ax)}{\sin x} dx,$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)((2k-1)^2 - a^2)} = \frac{1}{2a^2} \left(\operatorname{tg}(a\pi/2) \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(ax)}{\sin x} dx - \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos(ax)}{\sin x} dx \right),$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k^2 - a^2)} = \frac{\ln 2}{a^2} - \frac{1}{a^3 \sin(a\pi)} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin(ax)}{\sin x} \right)^2 dx,$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k^2 - a^2)} = \frac{\ln 2}{a^2} +$$

$$+ \frac{1}{a^2} \left(\int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin(2ax)}{2a} - x \right) \frac{dx}{\sin^2 x} - \frac{\operatorname{ctg}(a\pi)}{a} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin(ax)}{\sin x} \right)^2 dx \right).$$

Подобные тождества имеют особое значение, т.к. их левые части, очевидно, являются производящими функциями для чисел $\beta(2m)$, $\lambda(2m+1) = (1 - 2^{-(2m+1)})\zeta(2m+1)$, $\eta(2m+1) = (1 - 2^{-2m})\zeta(2m+1)$ и $\zeta(2m+1)$ при $m \in \mathcal{N}$, где дзета-функция Римана $\zeta(s)$ и бета-функция Дирихле $\beta(s)$ определяются равенствами

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}, \quad \beta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^s}.$$

Таким образом, раскладывая левые и правые части равенств из теоремы 1 в ряды Тейлора по степеням a и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получим известные интегральные представления этих чисел.

В частности, справедливы следующие равенства:

$$G = \beta(2) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{x}{\sin x} dx,$$

$$\lambda(3) = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \frac{x(\pi - x)}{\sin x} dx = \frac{\pi}{2} \beta(2) - \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \frac{x^2}{\sin x} dx,$$

$$\eta(1) = \ln 2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{x^2}{\sin^2 x} dx,$$

$$\eta(3) = \frac{1}{6\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{x^2(\pi^2 - 2x^2)}{\sin^2 x} dx = \frac{\pi^2}{6} \ln 2 - \frac{1}{3\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{x^4}{\sin^2 x} dx,$$

$$\zeta(3) = \frac{1}{3\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{x^2(\pi - x)^2}{\sin^2 x} dx = \frac{2\pi^2}{7} \ln 2 - \frac{8}{21} \int_0^{\pi/2} \frac{x^3}{\sin^2 x} dx.$$

Для функций $\psi(a)$ и $G(a)$ справедливо следующее следствие из теоремы 1.

Corollary (1)

При $0 < a < 1$ справедливы равенства

$$\begin{aligned}\psi(a) &= -\gamma - 2 \ln 2 - \frac{\pi}{2} \operatorname{ctg}(a\pi) + \frac{1}{\sin(a\pi)} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(a\pi) - \cos(2a-1)x}{\cos x} dx = \\ &= -\gamma - \ln 2 - \frac{1}{2a} - \frac{\pi}{2} \operatorname{ctg}(a\pi) - \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin 2ax}{2a} - x \right) \frac{dx}{\sin^2 x} + \frac{\operatorname{ctg}(a\pi)}{a} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin ax}{\sin x} \right)^2 dx, \\ G(a) &= \frac{\pi}{2 \sin(a\pi)} - \frac{1}{\sin(a\pi)} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2a-1)x}{\sin x} dx = \\ &= \frac{\pi}{2 \sin(a\pi)} + \frac{1}{2a} - \frac{1}{a \sin(a\pi)} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin ax}{\sin x} \right)^2 dx.\end{aligned}$$

Удивительно, но приведённые здесь формулы для $\psi(a)$ мы нигде не нашли, в то время, как формулы для $G(a)$ - известны.

Пусть теперь a является правильной положительной рациональной дробью, т.е. $a = \frac{p}{q}$, где $p, q \in \mathcal{N}$ и $0 < p < q$. Тогда интегралы, стоящие в правых частях равенств теоремы 1, можно записать в виде $\int_0^{\pi/(4q)} R(\sin x, \cos x) dx$, где $R(x, y)$ - правильная дробно-рациональная функция, и явно вычисляются. А именно, справедливо следующее утверждение.

Theorem (2)

При $a = \frac{p}{q}$, где $p, q \in \mathcal{N}$ и $0 < p < q$, справедливы равенства

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2 - a^2} = \frac{q}{p} \sum_{k=1}^q (-1)^k \sin \frac{(2k-1)p\pi}{2q} \ln \sin \frac{(2k-1)\pi}{4q},$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)((2k-1)^2 - a^2)} = 2 \left(\frac{q}{p} \right)^2 \sum_{k=1}^q (-1)^k \sin^2 \frac{pk\pi}{2q} \ln \sin \frac{k\pi}{2q},$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(k^2 - a^2)} = \left(\frac{q}{p} \right)^2 \left\{ \frac{q}{2p} - \ln 2 + 2 \sum_{k=1}^q \cos \frac{(2k-1)p\pi}{q} \ln \sin \frac{(2k-1)\pi}{4q} \right\},$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k^2 - a^2)} = \left(\frac{q}{p} \right)^2 \left\{ \ln 4q - \frac{q}{2p} - 2 \sum_{k=1}^q \cos \frac{2pk\pi}{q} \ln \sin \frac{k\pi}{2q} \right\}.$$

При этом любопытно, что для установления справедливости этой леммы весьма полезными оказываются следующие равенства

$$\sum_{k=1}^q \sin \frac{(2k-1)p\pi}{q} \operatorname{ctg} \frac{(2k-1)\pi}{4q} = q$$

и

$$\sum_{k=1}^q \sin \frac{2pk\pi}{q} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2q} = q - 2p$$

где $p, q \in \mathcal{N}$ и $0 < p < q$.

Равенства теоремы 2 являются аналогами теоремы Гаусса о значениях дигамма-функции Эйлера в рациональных точках, сформулированной нами на слайде 3, и согласно следствию 1 содержат ещё одно доказательство этой теоремы.

Если же положить $a = a_n = (p_n/q_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$ и перейти к пределу в обеих частях равенств из теоремы 2, можно получить новые аппроксимации для $\ln 2$, постоянных Каталана (G) и Апери ($\zeta(3)$). В частности, полагая $a_n = 1/(2n)$, приходим к справедливости следующего следствия из теоремы 2.

Corollary (2)

Справедливы равенства

$$\ln 2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n + \sum_{k=1}^n \cos(2k-1) \frac{\pi}{2n} \ln \left(1 - \cos(2k-1) \frac{\pi}{2n} \right) \right),$$

$$G = 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} n \sum_{k=1}^n (-1)^k \sin(2k-1) \frac{\pi}{4n} \ln \operatorname{tg}(2k-1) \frac{\pi}{8n},$$

$$\zeta(3) = 4 \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(\ln(2n) - 2n - \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi}{n} \ln \left(1 - \cos \frac{k\pi}{n} \right) \right) =$$

$$= \frac{32}{7} \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(\ln(2n) + \sum_{k=1}^n (-1)^k \cos \frac{k\pi}{2n} \ln \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{4n} \right) =$$

$$= \frac{16}{3} \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(\ln 2 - n - \sum_{k=1}^n \cos(2k-1) \frac{\pi}{2n} \ln \left(1 - \cos(2k-1) \frac{\pi}{2n} \right) \right).$$

Список литературы

-  А.П. Прудников, Ю.А.Брычков, О.И.Маричев, *Интегралы и ряды. В 3 т. Т.3. Специальные функции. Дополнительные главы*, ФИЗМАТЛИТ, М. (2002).
-  *NIST Handbook of Mathematical Functions*, Cambridge, New York (2010).
-  М. Abramowitz, I. A. Stegun *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover Publ., New York (1972).
-  Т.Д.А. Bromwich *An introduction to the theory of infinite series*. 2nd Ed., MacMillan and LTD (1926).
-  D. Cvijovic, H. M. Srivastava *Limit Representations of Riemann's Zeta Function*. The American Mathematical Monthly, 2012, Vol. 119, №4, PP. 324–330.

БЛАГОДАРЮ ЗА ВНИМАНИЕ!