Асимптотика решений трехмерного уравнения Гельмгольца в двухслойной среде с локализованной правой частью

А.И. Клевин
(Совместная работа с А.Ю. Аникиным)
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

Вторая конференция Математических центров России
7–11 ноября 2022, Москва, МГУ, МИАН

Уравнение

$$\left[\Delta_x + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2(x,z)}\right]u = -F\left(\frac{x-x^0}{\mu_1}\right)G\left(\frac{z-z^0}{\mu_2}\right)$$

$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\Delta_x = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$,
частота ω, скорость звука $c(x,z)$, функции $F \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $G \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.
Правая часть локализована в окрестности точки $(x^0, z^0) \in \mathbb{R}^3$, параметры μ_1, μ_2 отвечают за степень локализации правой части.

Безразмерные переменные:

$$z = z' d_0, \qquad x = x' l_0.$$

Малый параметр

$$h = d_0/l_0.$$

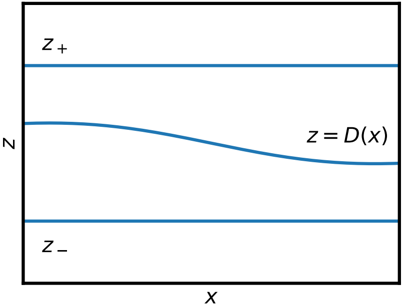
Пусть следующие величины являются «малыми одного порядка»:

$$h \sim \mu_1 l_0^{-1} \sim \mu_2 d_0^{-1}.$$

Приходим к уравнению в новых координатах

$$\Big[-h^2\Delta_x-\frac{\partial^2}{\partial z^2}-k^2(x,z)\Big]u=f\Big(\frac{x-x^0}{h},\frac{z-z^0}{h}\Big),$$

где $f(\xi,\eta)=F(\xi)G(\eta)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)\otimes C_0^\infty(\mathbb{R})$,
$k(x,z)=\omega d_0/c(x,z)$.



Две среды с показателями $k_\pm(x) > 0$ и плотностями $\rho_\pm(x) > 0$.

$$k(x,z) = \begin{cases} k_+(x), & z \in (D(x), z_+]; \\ k_-(x), & z \in [z_-, D(x)), \end{cases} \qquad \rho(x,z) = \begin{cases} \rho_+(x), & z \in (D(x), z_+]; \\ \rho_-(x), & z \in [z_-, D(x)). \end{cases}$$

Граничные условия на неизвестную функцию $u(x,z)$:

$$u|_{z=z_\pm} = 0, \qquad u, \rho^{-1}\frac{\partial u}{\partial z} \text{ непрерывны.}$$

- C. L. Pekeris, Theory of propagation of explosive sound in shallow water, the Geological Society of America Memoir 27, (1948)
- V. S. Buldyrev, V. S. Buslaev, Zap, nauch. sem. LOMI, v. 117, pp. 39−77 (1981)
- V. S. Buslaev, A. A. Fedotov, Akus. Zh., v. 32, No. 1, pp. 27−31 (1986).
- L. M. Brekhovskikh, Y. P. Lysanov, Fundamentals of ocean acoustics, 2003.
- F. B. Jensen, W. A. Kuperman, M. B. Porter, H. Schmidt, Computational Ocean Acoustics, pp. 360−426 (2011).
- B. G. Katsnelson, V. G. Petnikov, J. Lynch. Fundamentals of shallow water acoustics, 2012.
- P. S. Petrov, M. Y. Trofimov, A. D. Zakharenko, Russ. J. Math. Phys. 28, 257−262 (2021).

Случай $k_+ = k_-$, $\rho_- = \rho_+$ (один слой вместо двух) рассматривался в

П. Н. Петров, С. Ю. Доброхотов, “Асимптотика решения уравнения Гельмгольца в трехмерном слое переменной толщины с локализованной правой частью”, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 59:4 (2019), 566–578

Рассматривается асимптотическое решение при $h \to +0$ уравнения

$$\Big[-h^2\Delta_x - \frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2(x,z)\Big]u = f\Big(\frac{x-x^0}{h}, \frac{z-z^0}{h}\Big) + O(h^\infty)$$

в виде быстроосциллирующей по x функции, удовлетворяющей граничным условиям.

z — «быстрая» переменная,
x — «медленная» переменная x.

Адиабатическая редукция
(операторный метод разделения переменных)
В. В. Белов, С. Ю. Доброхотов, Т. Я. Тудоровский, ТМФ, 141:2, 2004

h-псевдодифференциальный оператор

$$\mathscr{H}(x, -ih\partial_x) = -h^2\Delta_x - \frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2(x,z)$$

с операторнозначным символом

$$\mathscr{H}(x,p) = p^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2(x,z), \qquad x \in \mathbb{R}^2, \qquad p \in \mathbb{R}^2.$$

При фиксированных $(x,p)=(\widetilde{x},\widetilde{p})$ оператор

$$\mathscr{H}(\widetilde{x},\widetilde{p})=\widetilde{p}^2-\frac{\partial^2}{\partial z^2}-k^2(\widetilde{x},z)$$

с областью определения

$$\begin{aligned}\{\chi(z)\in L_2((z_-,z_+),\rho^{-1}dz) \mid \chi,\rho^{-1}\chi\in AC(z_-,z_+),\\ \mathscr{H}(\widetilde{x},\widetilde{p})\chi\in L_2((z_-,z_+),\rho^{-1}dz),\\ \chi|_{z=z_-+0}=\chi|_{z=z_+-0}=0\},\qquad \rho=\rho(\widetilde{x},z)\end{aligned}$$

самосопряжен.

Оператор $\mathscr{H}(\widetilde{x},\widetilde{p})$ имеет:

1. Простой дискретный спектр

$$\{\widetilde{p}^2-\mathscr{E}_\nu\}_{\nu=1}^{\infty},$$

причем

$$\ldots<\mathscr{E}_\nu<\ldots<\mathscr{E}_2<\mathscr{E}_1,\qquad \lim_{\nu\to\infty}\mathscr{E}_\nu=-\infty.$$

2. Ортонормированный базис в $L_2((z_-,z_+),\rho^{-1}dz)$ из собственных функций $\chi_\nu(z)$.

Пары $(\mathscr{E}, \chi) = (\mathscr{E}_\nu, \chi_\nu)$ находятся из спектральной задачи

$$\chi''(z) + k^2(\widetilde{x}, z)\chi(z) = \mathscr{E}\chi(z)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned}
\chi(z_+) &= \chi(z_-) = 0,\\
\chi(D(\widetilde{x}) - 0) &= \chi(D(\widetilde{x}) + 0),\\
\frac{\chi'(D(\widetilde{x}) - 0)}{\rho_-(\widetilde{x})} &= \frac{\chi'(D(\widetilde{x}) + 0)}{\rho_+(\widetilde{x})}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим собственную функцию отдельно для каждой среды:

$$\chi(z) = \begin{cases} \chi_+(z), & z \in (D(\widetilde{x}), z_+];\\ \chi_-(z), & z \in [z_-, D(\widetilde{x})). \end{cases}$$

Получаем два уравнения с постоянными коэффициентами

$$\chi_-''(z) + k_-^2(\widetilde{x})\chi_-(z) = \mathscr{E}\chi_-(z), \qquad \chi_+''(z) + k_+^2(\widetilde{x})\chi_+(z) = \mathscr{E}\chi_+(z).$$

Их общие решения ($A_+, A_- \in \mathbb{C}$ — произвольные постоянные):

(A1) $\chi_\pm(z) = \frac{A_\pm}{\sqrt{k_\pm^2 - \mathscr{E}}} \sin[\sqrt{k_\pm^2 - \mathscr{E}}(z - z_\pm)]$, если $k_\pm^2 - \mathscr{E} > 0$;

(A2) $\chi_\pm(z) = A_\pm(z - z_\pm)$, если $k_\pm^2 - \mathscr{E} = 0$;

(A3) $\chi_\pm(z) = \frac{A_\pm}{\sqrt{-(k_\pm^2 - \mathscr{E})}} \sinh[\sqrt{-(k_\pm^2 - \mathscr{E})}(z - z_\pm)]$, если $k_\pm^2 - \mathscr{E} < 0$,

Функции вида (A1)–(A3) можно записать единым образом:

$$\chi_\pm(z) = A_\pm(z - z_\pm)\mathbf{s}((k_\pm^2 - \mathscr{E})(z - z_\pm)^2), \qquad \mathbf{s}(\zeta) = \frac{\sin\sqrt{\zeta}}{\sqrt{\zeta}}.$$

Граничные условия накладывают следующие ограничения на $A_\pm$, $\mathscr{E}$:

$$A_+ \cdot \begin{pmatrix} (D - z_+)\mathbf{s}((k_+^2 - \mathscr{E})(D - z_+)^2) \\ \rho_+^{-1}\mathbf{c}((k_+^2 - \mathscr{E})(D - z_+)^2) \end{pmatrix} = A_- \cdot \begin{pmatrix} (D - z_-)\mathbf{s}((k_-^2 - \mathscr{E})(D - z_-)^2) \\ \rho_-^{-1}\mathbf{c}((k_-^2 - \mathscr{E})(D - z_-)^2) \end{pmatrix},$$

где

$$\mathbf{c}(\zeta) = \cos\sqrt{\zeta}.$$

Приходим к дисперсионному соотношению

$$-\rho_+ \cdot (D-z_+)\mathbf{c}((k_-^2-\mathscr{E})(D-z_-)^2)\mathbf{s}((k_+^2-\mathscr{E})(D-z_+)^2)+$$
$$+\rho_- \cdot (D-z_-)\mathbf{c}((k_+^2-\mathscr{E})(D-z_+)^2)\mathbf{s}((k_-^2-\mathscr{E})(D-z_-)^2)=0,$$

где $\rho_\pm = \rho_\pm(\widetilde{x})$, $k_\pm = k_\pm(\widetilde{x})$, $D = D(\widetilde{x})$.
Вводя функцию $\mathscr{D}(\mathscr{E}, x)$, можем записать уравнение в виде

$$\mathscr{D}(\mathscr{E}, \widetilde{x}) = 0.$$

Возникает последовательность решений $\mathscr{E} = \mathscr{E}_\nu$ уравнения $\mathscr{D}(\mathscr{E}, \widetilde{x}) = 0$.

Коэффициенты A_+, A_- находятся из граничных условий и из условия нормировки

$$\langle \chi(z), \chi(z) \rangle = \frac{1}{\rho_-(\widetilde{x})} \int_{z_-}^{D(\widetilde{x})} |\chi_-|^2 dz + \frac{1}{\rho_+(\widetilde{x})} \int_{D(\widetilde{x})}^{z_+} |\chi_+|^2 dz = 1.$$

Вычисления дают

$$\langle \chi, \chi \rangle = \frac{|A_-|^2 C_-}{\rho_-} + \frac{|A_+|^2 C_+}{\rho_+}, \qquad C_\pm = 2|D - z_\pm|^3 \mathbf{b}(4(k_\pm^2 - \mathscr{E})(D - z_\pm)^2) > 0,$$

где $\mathbf{b}(\zeta) = \frac{\sqrt{\zeta} - \sin\sqrt{\zeta}}{\zeta\sqrt{\zeta}}$.

Получаем

$$A_+ = \frac{1}{\sqrt{\frac{C_+}{\rho_+} + \frac{C_- C_0^2}{\rho_-}}}, \qquad A_- = \frac{C_0}{\sqrt{\frac{C_+}{\rho_+} + \frac{C_- C_0^2}{\rho_-}}},$$

где

$$C_0 = \Big[(D - z_+)(D - z_-)\mathbf{s}((k_+^2 - \mathscr{E})(D - z_+)^2)\mathbf{s}((k_-^2 - \mathscr{E})(D - z_-)^2) + \\ + \rho_+^{-1}\rho_-^{-1}\mathbf{c}((k_+^2 - \mathscr{E})(D - z_+)^2)\mathbf{c}((k_-^2 - \mathscr{E})(D - z_-)^2) \Big] \times \\ \times \Big[[\mathbf{s}((k_-^2 - \mathscr{E})(D - z_-)^2)(D - z_-)]^2 + [\rho_-^{-1}\mathbf{c}((k_-^2 - \mathscr{E})(D - z_-)^2)]^2 \Big]^{-1}.$$

При произвольных (x, p) для оператора

$$\mathscr{H}(x, p) = p^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2(x, z)$$

получаем серию собственных значений

$$\left\{p^2 - \mathscr{E}_\nu(x)\right\}_{\nu=1}^{\infty},$$

и ортонормированных собственных функций $\left\{\chi_\nu(x, z)\right\}_{\nu=1}^{\infty}$.

Асимптотическое решение уравнения

$$[\mathscr{H}(x,-ih\partial_x)]u=f\Big(\frac{x-x^0}{h},\frac{z-z^0}{h}\Big)$$

представляем в виде

$$u(x,z,h)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\phi_\nu(z;x,-ih\partial_x,h)u_\nu(x,h),$$

где

1. $u_\nu(x,h)$ — новые неизвестные функции.
2. $\phi_\nu(z;x,-ih\partial_x,h)$, $\nu\in\mathbb{N}$ — ПДО с некоторыми символами $\phi_\nu(z;x,p,h)$, $\nu\in\mathbb{N}$, зависящими от координаты z.

Символы ПДО ϕ_ν находятся из условий для каждого $\nu\in\mathbb{N}$:

$$\mathscr{H}(x,-ih\partial_x)\circ\phi_\nu(z;x,-ih\partial_x,h)=\phi_\nu(z;x,-ih\partial_x,h)\circ H_\nu(x,-ih\partial_x,h)+O(h^\infty)$$

для некоторых ПДО $H_\nu(x,-ih\partial_x,h)$ с символами

$$H_\nu(x,p,h)\colon\mathbb{R}^4\times\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{C},\qquad \nu\in\mathbb{N}.$$

Известно, что первые члены разложений символов

$$\phi_\nu(z;x,p,h) = \phi_{\nu,0} + h\phi_{\nu,1} + \ldots, \qquad H_\nu(x,p,h) = H_{\nu,0} + hH_{\nu,1} + \ldots,$$

равны

$$\begin{aligned}
&H_{\nu,0}(x,p) = p^2 - \mathscr{E}_\nu(x),\\
&\phi_{\nu,0}(z;x) = \chi_\nu(x,z),\\
&H_{\nu,1}(x,p) = -i\sum_{j=1}^{2}\left\langle \chi_\nu, \frac{\partial\chi_\nu}{\partial p_j}\frac{\partial\mathscr{E}_\nu}{\partial x_j} + \frac{\partial\mathscr{H}}{\partial p_j}\frac{\partial\chi_\nu}{\partial x_j}\right\rangle = -2i\sum_{j=1}^{2} p_j\langle\chi_\nu, \nabla_{x_j}\chi_\nu\rangle.
\end{aligned}$$

Разложение правой части:

$$f = \sum_{\nu=1}^{\infty}\chi_\nu f_\nu, \qquad f_\nu = \langle\chi_\nu, f\rangle.$$

Приходим к семейству задач на поиск асимптотического решения $u_\nu(x,h)$ уравнения

$$H_\nu(x,-ih\partial_x,h)u_\nu(x,h)=f_\nu\Big(\frac{x-x^0}{h}\Big),\qquad \nu\in\mathbb{N}.$$

Аникин А.Ю., Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е., Руло М., "Канонический оператор Маслова на паре лагранжевых многообразий и асимптотика решений стационарных уравнений с локализованными правыми частями", Доклады Академии наук, № 6, с. 624-628

Гамильтониан

$$\mathbf{H}(x,p) \equiv H_{\nu,0}(x,p) = p^2 - \mathscr{E}_\nu(x).$$

Напомним,

$$-\infty \leftarrow \ldots < \mathscr{E}_\nu(x^0) < \ldots < \mathscr{E}_2(x^0) < \mathscr{E}_1(x^0).$$

Предполагается, что $\mathscr{E}_\nu(x^0) \neq 0$ для любого ν.

1. Эллиптические моды: $\mathscr{E}_\nu(x^0) < 0$, то есть $\{p \mid p^2 - \mathscr{E}_\nu(x^0)\} = \emptyset$. Тогда вне окрестности x^0 решение имеет вид $u_\nu \in O(h^\infty)$.
2. Гиперболические моды: $\mathscr{E}_\nu(x^0) > 0$. Их конечное число.

Пусть зафиксирована гиперболическая мода $\nu = \widetilde{\nu}$, $\mathscr{E}_{\widetilde{\nu}}(x^0) > 0$.

Система Гамильтона с начальными условиями на $\mathbb{S}^1 = \{p^2 = \mathscr{E}_\nu(x^0)\}$:

$$\frac{dx}{d\tau} = 2p, \qquad \frac{dp}{d\tau} = \frac{\partial \mathscr{E}_{\widetilde{\nu}}}{\partial x}(x), \qquad x\Big|_{\tau=0} = x^0, \qquad p\Big|_{\tau=0} = \sqrt{\mathscr{E}_{\widetilde{\nu}}(x^0)}\begin{pmatrix}\cos\psi\\ \sin\psi\end{pmatrix}.$$

Решения: $x = X(\psi,\tau)$, $p = P(\psi,\tau)$.

Функция $\mathscr{E}_{\widetilde{\nu}}(x)$ задана неявно уравнением $\mathscr{D}(\mathscr{E},x) = 0$.
Устранение зависимости от неявной функции:

$$\frac{dx}{d\tau} = 2p, \qquad \frac{dp}{d\tau} = -\Big[\frac{\partial \mathscr{D}}{\partial \mathscr{E}}\Big]^{-1}\frac{\partial \mathscr{D}}{\partial x}\Big|_{\mathscr{E}=p^2}.$$

Предположения:

1. Решения $x = X(\psi,\tau)$, $p = P(\psi,\tau)$ определены при всех $\tau \geq 0$, $\psi \in \mathbb{S}^1$.
2. Для любого $R > 0$ найдется τ_R, что $|X(\psi,\tau)| > R$ при $\tau > \tau_R$ и $\psi \in \mathbb{S}^1$.

Лагранжево многообразие в фазовом пространстве $\mathbb{R}^4 \ni (x,p)$

$$\Lambda = \{(x,p) = (X(\psi,\tau), P(\psi,\tau)) \mid \psi \in \mathbb{S}^1,\ \tau > 0\},$$

оснащенное гладкой мерой $d\mu = d\psi \wedge d\tau$.

Главная часть асимптотического решения уравнения

$$H_{\widetilde{\nu}}(x,-ih\partial_x,h)u_{\widetilde{\nu}}(x,h)=f_{\widetilde{\nu}}\Big(\frac{x-x^0}{h}\Big)$$

вне окрестности x^0 задается каноническим оператором Маслова

$$u_{\widetilde{\nu}}(x,h)\asymp\sqrt{2\pi h}\exp(\pi i/4)[K_{(\Lambda,d\mu)}B](x,h),$$

действующим на функцию

$$B(\psi,\tau)=A(P(\psi,0))\exp\Big(-i\int_0^\tau \mathbf{H}_{\mathrm{sub}}(P(\psi,\tau'),X(\psi,\tau'))\,d\tau'\Big),$$

где

$$A(p)=\frac{i}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}e^{-ip\cdot\xi}f_{\widetilde{\nu}}(\xi)d\xi,$$

$$\mathbf{H}_{\mathrm{sub}}(x,p)\equiv H_{\widetilde{\nu},1}+\frac{i}{2}\operatorname{tr}\frac{\partial^2 H_{\widetilde{\nu},0}}{\partial p\partial x}=-2i\sum_{j=1}^2 p_j\langle\chi_{\widetilde{\nu}},\nabla_{x_j}\chi_{\widetilde{\nu}}\rangle=$$

$$=i\sum_{j=1}^2 p_j[A_-^2C_-\nabla_{x_j}\rho_-^{-1}+A_+^2C_+\nabla_{x_j}\rho_+^{-1}+\chi_{\widetilde{\nu}}^2|_{z=D(x)}(\rho_-^{-1}-\rho_+^{-1})\nabla_{x_j}D].$$

Если $\Lambda \subset \mathbb{R}^2_x \times \mathbb{R}^2_p$ диффеоморфно проектируется на $\mathbb{R}^2_x$, то получаем ВКБ-функцию.

Пусть отображение $(\psi, \tau) \mapsto X(\psi, \tau)$ окрестности U точки $(\widetilde{\psi}, \widetilde{\tau}) \in \Lambda$ является вложением в $\mathbb{R}^2_x$.
Тогда в $X(U)$ определено обратное отображение $x \mapsto [X^{-1}](x)$ и в $X(U)$ имеем ВКБ-представление

$$u_{\widetilde{\nu}}(x, h) \asymp \sqrt{2\pi h}\exp\left(\frac{i\pi}{4}\right)\frac{\exp\left(\frac{i\Phi(\psi,\tau)}{h}\right)B(\psi, \tau)}{\sqrt{J(\psi, \tau)}}\bigg|_{(\psi,\tau)=[X^{-1}](x)},$$

где

$$\Phi(\psi, \tau) = 2\int_0^\tau P^2(\psi, \tau')\, d\tau', \qquad J(\psi, \tau) = \frac{dx}{d\mu} = \det\frac{\partial X(\psi, \tau)}{\partial(\psi, \tau)}.$$

Алгоритм:

1. Из дисперсионного соотношения $\mathscr{D}(\mathscr{E}, x^0) = 0$ найти положительные решения $\mathscr{E}_1(x^0), \dots, \mathscr{E}_m(x^0)$, соответствующие гиперболическим модам.
2. Для каждой моды найти решения $x = X(\psi, \tau)$, $p = P(\psi, \tau)$ задачи Коши для системы Гамильтона:
$$\frac{dx}{d\tau} = 2p, \quad \frac{dp}{d\tau} = \frac{\partial \mathscr{E}_{\widetilde{\nu}}}{\partial x}(x), \qquad x\Big|_{\tau=0} = x^0, \quad p\Big|_{\tau=0} = \sqrt{\mathscr{E}_{\widetilde{\nu}}(x^0)}\begin{pmatrix}\cos\psi \\ \sin\psi\end{pmatrix}.$$
3. Построить лагранжево многообразие
$$\Lambda = \{(x,p) = (X(\psi,\tau), P(\psi,\tau)) \mid \psi \in \mathbb{S}^1,\ \tau > 0\} \subset \mathbb{R}^4.$$
4. Вычислить
$$u_{\widetilde{\nu}}(x,h) = \sqrt{2\pi h}\exp(\pi i/4)[K_{(\Lambda,d\mu)}B](x,h),$$
5. Взять главную часть асимптотического решения в виде суммы по всем гиперболическим модам
$$u(x,z,h) \asymp \sum_{\nu=1}^{m} \chi_\nu(x,z) u_\nu(x,h).$$

Спасибо за внимание!