

Вторая конференция математических центров России
Москва, 7-11 ноября 2022 г.

Обратные задачи для дифференциальных операторов высших порядков с коэффициентами-распределениями

Бондаренко Наталья Павловна

Саратовский государственный университет
Самарский университет

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 21-71-10001.

Операторы Штурма-Лиувилля с регулярными потенциалами

Наиболее полные результаты в теории обратных задач спектрального анализа получены для уравнения Штурма-Лиувилля

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in (0, 1), \quad (1)$$

с потенциалом $q \in L_2(0, 1)$.

Г. Борг (1946) доказал, что потенциал $q(x)$ однозначно определяется двумя спектрами краевых задач для уравнения Штурма-Лиувилля (1) с разными краевыми условиями:

$$y(0) = y(1) = 0 \quad \sim \quad \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad (2)$$

$$y'(0) = y(1) = 0 \quad \sim \quad \{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}. \quad (3)$$

В работе И.М. Гельфанда и Б.М. Левитана (1951) был предложен конструктивный метод решения обратной задачи Штурма-Лиувилля, основанный на операторах преобразования.

- 1 Марченко, В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения, Киев: Наукова Думка, 1977.
- 2 Левитан, Б.М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля, Москва: Наука, 1984.

В.А. Юрко, С.А. Бутерин, М.Ю. Игнатъев, М.А. Кузнецова,
А.А. Шкаликов, А.М. Савчук, А.С. Макин, М.М. Маламуд,
В.А. Садовничий, Я.Т. Султанаев, А.М. Ахтямов, Н.Ф. Валеев,
М.И. Белишев, Е.Л. Коротяев, А.В. Баданин, А.В. Киселев,
А.П. Жабко, В.В. Провоторов, А.П. Солдатов, Н.А. Жура,
В.В. Кравченко, С.И. Кадченко, А.А. Голубков.

Дифференциальные операторы высших порядков

В работах В.А. Юрко была построена теория обратных задач для операторов вида

$$y^{(n)} + \sum_{\nu=0}^{n-2} p_{\nu}(x)y^{(\nu)}, \quad 0 < x < T \leq \infty, \quad (4)$$

с коэффициентами $p_{\nu} \in W_1^{\nu}(0, T)$, $\nu = \overline{0, n-2}$, при помощи *метода спектральных отображений*.

- 3 Юрко, В.А. Восстановление дифференциальных операторов по матрице Вейля, Докл. АН СССР 313 (1990), № 6, 1368–1372.
- 4 Юрко, В.А. Введение в теорию обратных спектральных задач, М.: Физматлит, 2007.

Операторы Штурма-Лиувилля с потенциалами-распределениями

Обратные задачи для уравнения Штурма-Лиувилля

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in (0, 1), \quad (1)$$

с потенциалом $q \in W_2^{-1}(0, 1)$ исследовали R.O. Hryniv, Ya.V. Mykytyuk, A.M. Савчук, A.A. Шкаликов, Е.Л. Коротяев, N. Pronska, J. Eckhardt, F. Gesztesy, R. Nichols, G. Teschl, N.J. Guliyev, ...

Метод спектральных отображений:

- 5 Freiling, G.; Ignatiev, M.Y.; Yurko, V.A. An inverse spectral problem for Sturm-Liouville operators with singular potentials on star-type graph, Proc. Symp. Pure Math. 77 (2008), 397–408.
- 6 Bondarenko, N.P. Solving an inverse problem for the Sturm-Liouville operator with singular potential by Yurko's method, Tamkang J. Math. 52 (2021), no. 1, 125–154.

Постановка задачи

Доклад посвящен теории обратных спектральных задач для уравнений вида

$$\ell_n(y) = \lambda y, \quad x \in (0, 1), \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \ell_n(y) := & y^{(n)} + \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} (\tau_{2k}(x) y^{(k)})^{(k)} + \\ & + \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor - 1} ((\tau_{2k+1}(x) y^{(k)})^{(k+1)} + (\tau_{2k+1}(x) y^{(k+1)})^{(k)}). \end{aligned}$$

Постановка задачи

Рассматривается класс уравнений (5), которые можно эквивалентным образом представить в виде системы

$$Y'(x) = (F(x) + \Lambda)Y(x), \quad x \in (0, 1), \quad (6)$$

где $Y(x)$ — вектор-функция (столбец) размера n , Λ — матрица размера $(n \times n)$ с элементом λ в позиции $(n, 1)$ и нулевыми остальными элементами, $F(x) = [f_{k,j}(x)]_{k,j=1}^n$ — матрица-функция из класса $\mathfrak{F}_n$, который определяется свойствами

$$\begin{aligned} f_{k,j}(x) &\equiv 0, & k+1 < j, & & f_{k,k+1}(x) &\equiv 1, & k = \overline{1, n-1}, \\ f_{k,k} &\in L_2(0, 1), & k = \overline{1, n}, & & f_{k,j} &\in L_1(0, 1), & k > j, & \text{trace}(F(x)) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} f_{1,1} & 1 & 0 & 0 \\ f_{2,1} & f_{2,2} & 1 & 0 \\ f_{3,1} & f_{3,2} & f_{3,3} & 1 \\ f_{4,1} & f_{4,2} & f_{4,3} & f_{4,4} \end{bmatrix}$$

Постановка задачи

По любой матрице $F \in \mathfrak{F}_n$ можно определить квазипроизводные

$$y^{[0]} := y, \quad y^{[k]} = (y^{[k-1]})' - \sum_{j=1}^k f_{k,j} y^{[j-1]}, \quad k = \overline{1, n}, \quad (8)$$

и область определения

$$\mathcal{D}_F = \{y: y^{[k]} \in AC[0, 1], k = \overline{0, n-1}\}.$$

Определение

Матрица-функция $F(x) \in \mathfrak{F}_n$ называется согласованной с дифференциальным выражением $\ell_n(y)$, если при любом $y \in \mathcal{D}_F$ верно равенство $\ell_n(y) = y^{[n]}$. Будем называть функцию y решением уравнения $\ell_n(y) = \lambda y$, если $y \in \mathcal{D}_F$ и $y^{[n]} = \lambda y$, $x \in (0, 1)$.

Для $y \in \mathcal{D}_F$ обозначим $\vec{y}(x) = \text{col}(y^{[0]}(x), y^{[1]}(x), \dots, y^{[n-1]}(x))$. Тогда уравнение $\ell_n(y) = \lambda y$ эквивалентно системе

$$\vec{y}' = (F(x) + \Lambda)\vec{y}, \quad x \in (0, 1). \quad (6)$$

Регуляризационный подход

Регулярный случай: $\tau_\nu \in L_1(0, 1)$, $\nu = \overline{0, n-2}$.

$$\ell_6(y) = y^{(6)} + (\tau_4 y'')'' + ((\tau_3 y'')' + (\tau_3 y')'') + (\tau_2 y')' + ((\tau_1 y)' + \tau_1 y') + \tau_0 y,$$

$$F(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\tau_3 & -\tau_4 & 0 & 1 & 0 \\ -\tau_1 & -\tau_2 & -\tau_3 & 0 & 0 & 1 \\ -\tau_0 & -\tau_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- 7** Everitt, W.N.; Marcus, L. Boundary Value Problems and Symplectic Algebra for Ordinary Differential and Quasi-Differential Operators, AMS, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 61, 1999.

$$\ell_2(y) = y'' - \tau_0 y, \quad \tau_0 \in W_2^{-1}(0, 1), \quad \tau_0 = \sigma'_0, \quad \sigma_0 \in L_2(0, 1),$$

$$F(x) = \begin{bmatrix} \sigma_0(x) & 1 \\ -\sigma_0^2(x) & -\sigma_0(x) \end{bmatrix}.$$

- 8** Савчук, А.М.; Шкаликов, А.А. Операторы Штурма Лиувилля с потенциалами-распределениями, Труды ММО 64 (2003), 159–212.

$$\begin{aligned} \ell_n(y) := & y^{(n)} + \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} (\tau_{2k}(x)y^{(k)})^{(k)} + \\ & + \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor - 1} ((\tau_{2k+1}(x)y^{(k)})^{(k+1)} + (\tau_{2k+1}(x)y^{(k+1)})^{(k)}), \quad x \in (0, 1). \end{aligned}$$

Случай Мирзоева-Шкаликова: $\tau_\nu = \sigma_\nu^{(i_\nu)}$, $i_{2k+j} = m - k - j$, $m = \lfloor n/2 \rfloor$, $k \geq 0$, $j = 0, 1$, $\sigma_\nu \in L_2(0, 1)$ при $n = 2m$ и $\sigma_\nu \in L_1(0, 1)$ при $n = 2m + 1$.

- 9** Мирзоев, К.А.; Шкаликов, А.А. Дифференциальные операторы четного порядка с коэффициентами-распределениями, Матем. заметки 99 (2016), № 5, 788–793.
- 10** Mirzoev, K.A.; Shkalikov, A.A. Ordinary differential operators of odd order with distribution coefficients, arXiv:1912.03660 [math.CA].
- 11** Vladimirov, A.A. On one approach to definition of singular differential operators, arXiv:1701.08017 [math.SP].
- 12** Конечная, Н.Н.; Мирзоев, К.А. Главный член асимптотики решений линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами-распределениями первого порядка, Матем. заметки 106 (2019), № 1, 74–83.
- 13** Валеев, Н.Ф.; Назирова, Э.А.; Султанаев, Я.Т. Об одном методе исследования асимптотики решений дифференциальных уравнений нечетного порядка с осциллирующими коэффициентами, Матем. заметки 109 (2021), № 6, 938–943.

Постановка задачи: краевые условия

Рассмотрим некоторое дифференциальное выражение $\ell_n(y)$ с согласованной матрицей $F(x)$. Введем квазипроизводные по формуле (8) и линейные формы

$$\mathcal{U}_{s,a}(y) := y^{[p_{s,a}]}(a) + \sum_{j=1}^{p_{s,a}} u_{s,j,a} y^{[j-1]}(a), \quad s = \overline{1, n}, \quad a = 0, 1, \quad (9)$$

где $p_{s,a} \in \{0, \dots, n-1\}$, $p_{s,a} \neq p_{k,a}$ при $s \neq k$, $u_{s,j,a}$ — некоторые комплексные числа. Введем матрицы $U_a = [u_{s,j,a}]_{s,j=1}^n$, $u_{s,j,a} := \delta_{j,p_{s,a}+1}$ при $j > p_{s,a}$, $a = 0, 1$. Будем называть задачей $\mathcal{L}$ тройку $(F(x), U_0, U_1)$.

Постановка задачи: матрица Вейля-Юрко

Обозначим через $\{C_k(x, \lambda)\}_{k=1}^n$ и $\{\Phi_k(x, \lambda)\}_{k=1}^n$ решения уравнения

$$\ell_n(y) = \lambda y, \quad x \in (0, 1),$$

удовлетворяющие условиям

$$\mathcal{U}_{s,0}(C_k) = \delta_{s,k}, \quad s = \overline{1, n}, \quad (10)$$

$$\mathcal{U}_{s,0}(\Phi_k) = \delta_{s,k}, \quad s = \overline{1, k}, \quad \mathcal{U}_{s,1}(\Phi_k) = 0, \quad s = \overline{k+1, n}. \quad (11)$$

Рассмотрим матрицы-функции $C(x, \lambda) = [\vec{C}_k(x, \lambda)]_{k=1}^n$ и $\Phi(x, \lambda) = [\vec{\Phi}_k(x, \lambda)]_{k=1}^n$. Справедливо соотношение

$$\Phi(x, \lambda) = C(x, \lambda)M(\lambda), \quad (12)$$

где $M(\lambda)$ называется *матрицей Вейля-Юрко* задачи $\mathcal{L}$.

Обратная задача по матрице Вейля-Юрко

Обратная задача 1

По матрице Вейля-Юрко $M(\lambda)$ найти коэффициенты $\{\tau_\nu\}_{\nu=0}^{n-2}$.

Единственность решения обратной задачи 1 в случае Мирзоева-Шкаликова была доказана в [14].

- 14** Bondarenko, N.P. Inverse spectral problems for arbitrary-order differential operators with distribution coefficients, Mathematics 9 (2021), no. 22, Article ID 2989.

Матрица Вейля-Юрко

$$M(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ M_{21}(\lambda) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ M_{31}(\lambda) & M_{32}(\lambda) & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{n1}(\lambda) & M_{n2}(\lambda) & M_{n3}(\lambda) & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

$$M_{j,k}(\lambda) = -\frac{\Delta_{j,k}(\lambda)}{\Delta_{k,k}(\lambda)}, \quad 1 \leq k < j \leq n, \quad (13)$$

где $\Delta_{k,k}(\lambda) := \det[\mathcal{U}_{s,1}(C_r)]_{s,r=k+1}^n$ и $\Delta_{j,k}(\lambda)$ получаются из $\Delta_{k,k}(\lambda)$ заменой C_j на C_k .

Нули функции $\Delta_{k,k}(\lambda)$ совпадают с собственными значениями краевой задачи $\mathcal{L}_k$:

$$\ell_n(y) = \lambda y, \quad x \in (0, 1), \quad \mathcal{U}_{s,0}(y) = 0, \quad s = \overline{1, k}, \quad \mathcal{U}_{s,1}(y) = 0, \quad s = \overline{k+1, n}.$$

Собственные значения $\Lambda_k := \{\lambda_{l,k}\}_{l \geq 1}$ задачи $\mathcal{L}_k$ имеют следующую асимптотику (с учетом кратностей):

$$\lambda_{l,k} = (-1)^{n-k} \left(\frac{\pi}{\sin \frac{\pi k}{n}} (l + \chi_k + \varkappa_{l,k}) \right)^n, \quad (14)$$

где $\{\varkappa_{l,k}\} \in l_2$ и константы χ_k зависят только от n , k и $\{p_{s,a}\}$.

Спектральные данные

Будем говорить, что $\mathcal{L} \in W$, если нули функций $\Delta_{k,k}(\lambda)$, $k = \overline{1, n-1}$, простые.

Обозначим через $\Lambda := \bigcup_{k=1}^{n-1} \Lambda_k$ множество полюсов матрицы Вейля $M(\lambda)$.

Рассмотрим ряд Лорана

$$M(\lambda) = \frac{M_{\langle -1 \rangle}(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} + M_{\langle 0 \rangle}(\lambda_0) + M_{\langle 1 \rangle}(\lambda_0)(\lambda - \lambda_0) + \dots, \quad \lambda_0 \in \Lambda.$$

Введем *весовые матрицы*:

$$\mathcal{N}(\lambda_0) := (M_{\langle 0 \rangle}(\lambda_0))^{-1} M_{\langle -1 \rangle}(\lambda_0), \quad \lambda_0 \in \Lambda. \quad (15)$$

Спектральные данные

Спектральные данные $\{\lambda_0, \mathcal{N}(\lambda_0)\}_{\lambda_0 \in \Lambda}$ обобщают спектральные данные $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n \geq 1}$ классической обратной задачи для уравнения Штурма-Лиувилля

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in (0, 1), \quad (1)$$

с вещественным потенциалом $q \in L_2(0, 1)$ и краевыми условиями

$$y(0) = y(1) = 0. \quad (16)$$

Здесь $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ — собственные значения задачи (1), (16), $\alpha_n = \left(\int_0^1 y_n^2(x) dx \right)^{-1}$, $y_n(x)$ — собственные функции, нормированные условием $y_n'(0) = 1$.

В случае комплекснозначного потенциала q обобщенные спектральные данные введены в [15].

15 Buterin, S.A. On inverse spectral problem for non-selfadjoint Sturm-Liouville operator on a finite interval, J. Math. Anal. Appl. 335 (2007), no. 1, 739–749.

Обратная задача по спектральным данным

Обратная задача 2

По спектральным данным $\{\lambda_0, \mathcal{N}(\lambda_0)\}_{\lambda_0 \in \Lambda}$ найти $\{\tau_\nu\}_{\nu=0}^{n-2}$.

Можно ввести спектральные данные для любой матрицы $F(x) \in \mathfrak{F}_n$, не обязательно согласованной с каким-либо дифференциальным выражением, но матрица $F(x)$ в общем случае не будет однозначно восстанавливаться по спектральным данным.

Пример

$$n = 2, \quad F(x) = \begin{bmatrix} a(x) & 1 \\ b(x) & -a(x) \end{bmatrix},$$

$$y^{[1]} = y' - ay, \quad y^{[2]} = (y^{[1]})' + ay^{[1]} - by,$$

$$y^{[2]} = \lambda y \quad \Rightarrow \quad y'' - qy = \lambda y, \quad q = a' + a^2 + b.$$

Решение обратной задачи

Обратная задача 2

По спектральным данным $\{\lambda_0, \mathcal{N}(\lambda_0)\}_{\lambda_0 \in \Lambda}$ найти $\{\tau_\nu\}_{\nu=0}^{n-2}$.

Решение обратной задачи 2 разбивается на два шага:

$$\{\lambda_0, \mathcal{N}(\lambda_0)\}_{\lambda_0 \in \Lambda} \xrightarrow{(1)} \{\Phi_k(x, \lambda)\}_{k=1}^n \xrightarrow{(2)} \{\tau_\nu\}_{\nu=0}^{n-2}.$$

Шаг (1) выполняется для матрицы $F(x) \in \mathfrak{F}_n$ общего вида, шаг (2) — отдельно для коэффициентов $\{\tau_\nu\}_{\nu=0}^{n-2}$ из разных классов.

- 16** Bondarenko, N.P. Reconstruction of higher-order differential operators by their spectral data, Mathematics 10 (2022), no. 20, Article ID 3882.

Вместе с задачей $\mathcal{L} = (F(x), U_0, U_1)$ рассмотрим задачу $\tilde{\mathcal{L}} = (\tilde{F}(x), \tilde{U}_0, \tilde{U}_1)$ того же вида, но с другими коэффициентами. Будем предполагать, что $\mathcal{L}, \tilde{\mathcal{L}} \in W$, $F, \tilde{F} \in \mathfrak{F}_n$, $p_{s,a} = \tilde{p}_{s,a}$, $s = \overline{1, n}$, $a = 0, 1$. Квазипроизводные задачи $\tilde{\mathcal{L}}$ определяются по матрице $\tilde{F}(x)$, поэтому они могут отличаться от квазипроизводных задачи $\mathcal{L}$.

Теорема 1

Справедливы соотношения

$$\varphi_{l_0, k_0, \varepsilon_0}(x) = \tilde{\varphi}_{l_0, k_0, \varepsilon_0}(x) + \sum_{(l, k, \varepsilon) \in V} (-1)^\varepsilon \varphi_{l, k, \varepsilon}(x) \tilde{G}_{(l, k, \varepsilon), (l_0, k_0, \varepsilon_0)}(x), \quad (17)$$

$$\phi(x, \lambda) = \tilde{\phi}(x, \lambda) + \sum_{(l, k, \varepsilon) \in V} (-1)^\varepsilon \varphi_{l, k, \varepsilon}(x) \tilde{P}_{l, k, \varepsilon}(x, \lambda), \quad (18)$$

где $(l_0, k_0, \varepsilon_0) \in V$, $x \in [0, 1]$, $\lambda \in \mathbb{C}$, u

$$V := \{(l, k, \varepsilon) : l \geq 1, k \in \{1, \dots, n-1\}, \varepsilon \in \{0, 1\}\},$$

$$\lambda_{l, k, 0} := \lambda_{l, k}, \quad \lambda_{l, k, 1} := \bar{\lambda}_{l, k}, \quad \mathcal{N}_0(\lambda_0) := \mathcal{N}(\lambda_0), \quad \mathcal{N}_1(\lambda_0) := \tilde{\mathcal{N}}(\lambda_0),$$

$$\varphi_{l, k, \varepsilon}(x) := \Phi_{k+1, \langle 0 \rangle}(x, \lambda_{l, k, \varepsilon}), \quad \tilde{\varphi}_{l, k, \varepsilon}(x) := \tilde{\Phi}_{k+1, \langle 0 \rangle}(x, \lambda_{l, k, \varepsilon}),$$

$$\phi(x, \lambda) = [\Phi_k(x, \lambda)]_{k=1}^n, \quad \tilde{D}(x, \mu, \lambda) := (\lambda - \mu)^{-1} (\tilde{\Phi}(x, \mu))^{-1} \tilde{\Phi}(x, \lambda),$$

$$\tilde{P}_{l, k, \varepsilon}(x, \lambda) := e_{k+1}^T \mathcal{N}_\varepsilon(\lambda_{l, k, \varepsilon}) \tilde{D}_{\langle 0 \rangle}(x, \lambda_{l, k, \varepsilon}, \lambda),$$

$$\tilde{G}_{(l, k, \varepsilon), (l_0, k_0, \varepsilon_0)}(x) := [\tilde{P}_{l, k, \varepsilon}(x, \lambda)]_{\lambda=\lambda_{l_0, k_0, \varepsilon_0}}^{(0)} e_{k_0+1}.$$

Основное уравнение

Система (17) сводится к линейному уравнению в банаховом пространстве m ограниченных бесконечных последовательностей $\alpha = [\alpha_v]_{v \in V}$ с нормой $\|\alpha\|_m = \sup_{v \in V} |\alpha_v|$:

$$(\mathbf{I} - \tilde{R}(x))\psi(x) = \tilde{\psi}(x), \quad x \in [0, 1], \quad (19)$$

где $\psi(x), \tilde{\psi}(x) \in V$, $\psi(x) = [\psi_v(x)]_{v \in V}$, $\tilde{\psi}(x) = [\tilde{\psi}_v(x)]_{v \in V}$, $\tilde{R}(x): m \rightarrow m$ — компактный линейный оператор, $\mathbf{I}$ — единичный оператор в m .

Теорема 2

При любом фиксированном $x \in [0, 1]$ оператор $(\mathbf{I} - \tilde{R}(x))$ имеет ограниченный обратный

$$(\mathbf{I} - \tilde{R}(x))^{-1} = \mathbf{I} + R(x) \quad (20)$$

и, следовательно, основное уравнение (19) однозначно разрешимо в m .

Из теоремы 2 следует единственность восстановления решений Вейля $\{\Phi_k(x, \lambda)\}_{k=1}^n$ по спектральным данным $\{\lambda_0, \mathcal{N}(\lambda_0)\}_{\lambda_0 \in \Lambda}$ для любой $F(x) \in \mathfrak{F}_n$.

Пример: $n = 3$

Рассмотрим пример:

$$\ell_3(y) = y^{(3)} + (\tau_1(x)y)' + \tau_1(x)y' + \tau_0(x)y, \quad x \in (0, 1),$$

где $\tau_1 \in L_2(0, 1)$ и $\tau_0 \in W_2^{-1}(0, 1)$, т.е. $\tau_0 = \sigma_0'$, $\sigma_0 \in L_2(0, 1)$.

Согласованная матрица имеет вид

$$F(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -(\sigma_0 + \tau_1) & 0 & 1 \\ 0 & (\sigma_0 - \tau_1) & 0 \end{bmatrix}.$$

Предположим, что

$$U_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad U_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Собственные значения имеют асимптотику

$$\lambda_{l,k} = (-1)^{k+1} \left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}} \left(l + \frac{1}{6} + \frac{(-1)^k}{\pi^2 l} \int_0^1 \tau_1(t) dt + \frac{\varkappa_{l,k}}{l} \right) \right)^3, \quad \{\varkappa_{l,k}\} \in l_2, \\ l \geq 1, \quad k = 1, 2. \quad (21)$$

Формулы восстановления

Предположим, что заданы спектральные данные $\{\lambda_0, \mathcal{N}(\lambda_0)\}_{\lambda_0 \in \Lambda}$ задачи $\mathcal{L} = (F(x), U_0, U_1)$. Из асимптотики (21) находим $\tilde{\tau}_1 := \int_0^1 \tau_1(t) dt$. Положим

$$\tilde{F}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\tilde{\tau}_1 & 0 & 1 \\ 0 & -\tilde{\tau}_1 & 0 \end{bmatrix},$$

и $\tilde{\mathcal{L}} := (\tilde{F}(x), U_0, U_1)$.

Обозначим $\tilde{\eta}_{l,k,\varepsilon}(x) := (-1)^\varepsilon e_{k+1}^T \mathcal{N}_\varepsilon(\lambda_{l,k,\varepsilon}) J_0^{-1}(\tilde{\phi}_{\langle 0 \rangle}^*(x, \lambda_{l,k,\varepsilon}))^T$, $(l, k, \varepsilon) \in V$.

Теорема 3

Справедливы соотношения

$$\tau_1 = \tilde{\tau}_1 - \frac{3}{2} \sum_V (\varphi'_{l,k,\varepsilon} \tilde{\eta}_{l,k,\varepsilon} + \varphi_{l,k,\varepsilon} \tilde{\eta}'_{l,k,\varepsilon}), \quad (22)$$

$$\tau_0 = -\tau'_1 - 3 \frac{d}{dx} \left(\sum_V (\varphi'_{l,k,\varepsilon} \tilde{\eta}_{l,k,\varepsilon} - c_{l,k,\varepsilon}) \right) - 2(\tau_1 - \tilde{\tau}_1) \sum_V \varphi_{l,k,\varepsilon} \tilde{\eta}_{l,k,\varepsilon}. \quad (23)$$

Ряд в (22) сходится в $L_2(0, 1)$. В формуле (23) ряд в скобках сходится в $L_2(0, 1)$ с некоторыми регуляризующими константами $c_{l,k,\varepsilon}$, а второй ряд сходится абсолютно и равномерно по $x \in [0, 1]$.

Формулы восстановления

В статье [Bondarenko, Mathematics 2022] рассмотрены следующие случаи:

- n — четное, $\tau_\nu \in L_2(0, 1)$, $\nu = \overline{0, n-2}$;
- n — четное, $\tau_\nu \in W_2^{-1}(0, 1)$, $\nu = \overline{0, n-2}$.

$$\begin{aligned} \ell_n(y) := & y^{(n)} + \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} (\tau_{2k}(x)y^{(k)})^{(k)} + \\ & + \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor - 1} ((\tau_{2k+1}(x)y^{(k)})^{(k+1)} + (\tau_{2k+1}(x)y^{(k+1)})^{(k)}). \end{aligned}$$

Спасибо за внимание!

Для построения решений типа Биркгофа система

$$Y'(x) = (F(x) + \Lambda)Y(x), \quad x \in (0, 1), \quad (6)$$

сводится к виду

$$u'(x) = F(x, \rho)u, \quad x \in (0, 1), \quad (24)$$

где $\rho = \sqrt[n]{\lambda}$, $Y(x) = \text{diag}\{1, \rho, \dots, \rho^{n-1}\}u(x)$,

$$F(x, \rho) = \rho F_{-1} + F_0(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \rho^{-k} F_k(x),$$

и матрицы $F_k(x)$ образованы соответствующими нижними диагоналями $F(x)$:

0			
1			
2			
3			

- Савчук, А.М.; Шкаликов, А.А. Асимптотический анализ решений обыкновенных дифференциальных уравнений с коэффициентами-распределениями, Матем. сб. 211 (2020), № 11, 129–166.

$$n = 2m, \quad \tau_\nu \in L_2(0, 1), \quad \nu = \overline{0, n-2}.$$

Например,

$$\ell_6(y) = y^{(6)} + (\tau_4 y'')'' + ((\tau_3 y'')' + (\tau_3 y')'') + (\tau_2 y')' + ((\tau_1 y)' + \tau_1 y') + \tau_0 y,$$

$$F(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\tau_3 & -\tau_4 & 0 & 1 & 0 \\ -\tau_1 & -\tau_2 & -\tau_3 & 0 & 0 & 1 \\ -\tau_0 & -\tau_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\mathcal{L} = (F(x), U_0, U_1), \quad U_0 = I, \quad U_1 = [\delta_{k, n-j+1}]_{k,j=1}^n.$$

Выполняются шаги по $s = 1, 2, \dots, n-1$. На s -м шаге восстанавливается τ_{n-s-1} . Выбирается модельная задача $\tilde{\mathcal{L}} := \tilde{\mathcal{L}}^{(s)} = (\tilde{F}^{(s)}(x), U_0, U_1)$, где $\tilde{F}^{(s)}(x)$ — ассоциированная матрица дифференциального выражения $\tilde{l}_n^{(s)}(y)$ с коэффициентами

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_\nu &:= \tau_\nu, \quad \nu = \overline{n-s, n-2}, \quad \tilde{\tau}_{n-s-1} := \int_0^1 \tau_{n-s-1}(x) dx, \\ \tilde{\tau}_\nu &:= 0, \quad \nu = \overline{0, n-s-2}. \end{aligned}$$

$$n = 2m, \quad \tau_\nu \in W_2^{-1}(0, 1), \quad \tau_\nu = \sigma'_\nu, \quad \sigma_\nu \in L_2(0, 1), \quad \nu = \overline{0, n-2}.$$

Например, при $n = 4$:

$$F(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sigma_1 & -\sigma_2 & 1 & 0 \\ -\sigma_0 - \sigma_1\sigma_2 & -\sigma_2^2 & \sigma_2 & 1 \\ -\sigma_1^2 & \sigma_0 - \sigma_1\sigma_2 & \sigma_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Коэффициенты $\{\tau_\nu\}_{\nu=0}^{n-2}$ определяются спектральными данными однозначно в $W_2^{-1}(0, 1)$, т.е. $\{\sigma_\nu\}_{\nu=0}^{n-2}$ определяются с точностью до константы. Для определенности будем считать, что $\int_0^1 \sigma_\nu(x) dx = 0$, $\nu = \overline{0, n-2}$.

- 1 Bondarenko, N.P. Inverse spectral problems for arbitrary-order differential operators with distribution coefficients, Mathematics 9 (2021), no. 22, Article ID 2989.
- 2 Bondarenko, N.P. Linear differential operators with distribution coefficients of various singularity orders, arXiv:2204.02052 [math.SP].
- 3 Bondarenko, N.P. Spectral data asymptotics for the higher-order differential operators with distribution coefficients, J. Math. Sci. (accepted), arXiv:2208.12956 [math.SP].
- 4 Bondarenko, N.P. Reconstruction of higher-order differential operators by their spectral data, Mathematics 10 (2022), no. 20, Article ID 3882.