

Решение двумерного безмассового уравнения Дирака с линейным потенциалом и локализованной правой частью

А.А. Толченников

Институт проблем механики РАН, Москва

совместная работа с С.Ю.Доброхотовым и И.А.Богаевским
грант РФФИ 21-11-00341

Вторая конференция математических центров России, 2022

Двумерное безмассовое уравнение Дирака с линейным потенциалом и локализованной правой частью

$$(x_1\sigma_0 + \sigma_1\hat{p}_{x_1} + \sigma_2\hat{p}_{x_2})\psi = h^{-2}\psi^0\left(\frac{x-x^0}{h}\right),$$

где

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

— матрицы Паули, $\hat{p}_{x_k} = -i\hbar\partial_{x_k}$, $x^0 = (-a, 0)$, $a > 0$, $\psi^0(x)$ гладкая быстроубывающая функция, $h \ll 1$.

Решение должно удовлетворять принципу предельного поглощения.

Решение описывает стационарный поток квазичастиц в графене, испускаемых из источника, локализованного в окрестности точки $(-a, 0)$. Есть постоянное электрическое поле, параллельное оси x_1 .

Потенциальная энергия квазичастицы в этом поле равна

$U(x_1, x_2) = x_1$. Квазичастицы являются электронами при $U < 0$, дырками при $U > 0$. Источник испускает электроны.

Матрично–значный символ:

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} x_1 & p_1 - ip_2 \\ p_1 + ip_2 & x_1 \end{pmatrix},$$

$$H_0 := \det \mathcal{H} = x_1^2 - p_1^2 - p_2^2$$

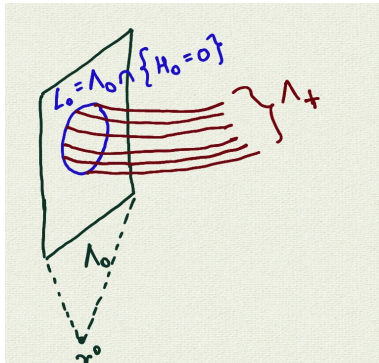
A. Yu. Anikin, S. Yu. Dobrokhotov, V. E. Nazaikinskii, M. Rouleux.
 Maslov canonical operator on a pair of Lagrangian manifolds and
 asymptotic solutions of stationary equations with localized right-hand
 sides. Doklady Mathematics, 2017, 96 (1), pp. 406–410.

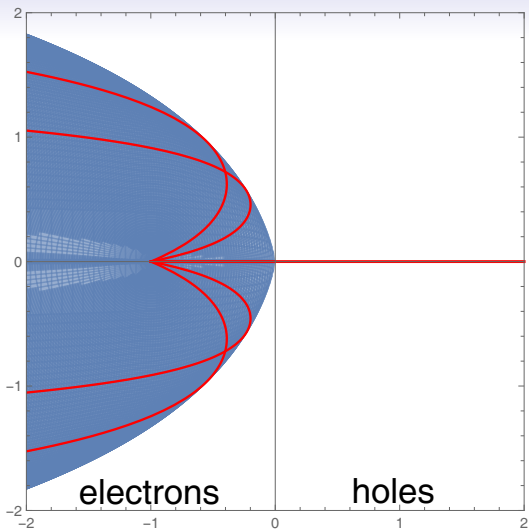
Локализованная правая часть: $K_{\Lambda_0, d\mu_0}[\tilde{\psi}^0(p)]$, где

$$\Lambda_0 = \{x = x^0, p - \text{arbitrary}\}.$$

Вне окрестности x^0 асимптотическое решение имеет вид:

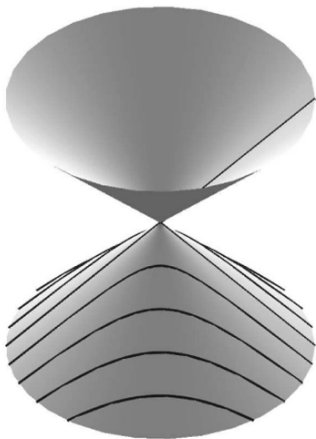
$$K_{\Lambda_+, d\mu_+}[A_+].$$





Точка $(0, 0)$ — особая.

V. I. Arnold, Singularities of Caustics and Wave Fronts [in Russian],
Fazis, Moscow (1996)



$$\begin{cases} H_0(x, p) = p_1^2 + p_2^2 - x_1^2 = 0 \\ p_2 = \text{const} \end{cases}$$

Область дырок $x_1 > 0$

I. A. Bogaevsky, Fundamental solution of the stationary Dirac equation with a linear potential, Theoretical and Mathematical Physics vol.205, pages 1547–1563 (2020)

И.А. Богаевский написал асимптотику в области дырок, если в правой части стоит δ -функция. Согласно его результатам, часть электронов порядка $\sqrt{\hbar}$ превращаются в дырки, локализованные вдоль полуоси $x_1 > 0, x_2 = 0$ с характерным размером $\sqrt{\hbar}$, и их плотность быстро убывает при увеличении $|x_2|$.

$$\psi \approx \sqrt{\frac{\hbar}{A}} \exp \left[-\frac{x_2^2}{2A\hbar} + i\frac{a^2 - x_1^2}{2\hbar} \right] C,$$

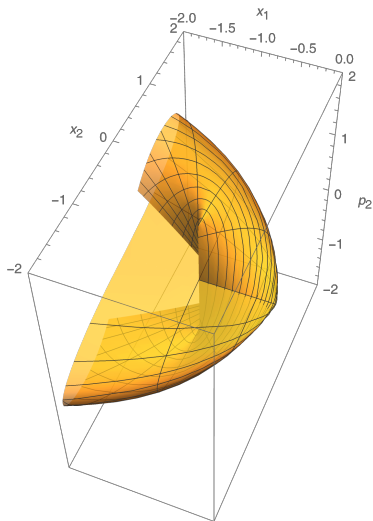
где $A = \pi - i \ln \frac{x}{a}$, C — постоянный вектор.

Асимптотическое решение при $x_2 \neq 0$

Решение при $x_2 \neq 0$ представляется в виде канонического оператора на лагранжевом многообразии Λ_+ (с инвариантной мерой $d\mu_+ = dt \wedge d\varphi$) полученном объединением полутраекторий гамильтоновой системы $H_1 = x_1 + |p|$, выпущенных из окружности $|p| = a, x = (-a, 0)$.

$$\begin{cases} x_1 = -|p|, \\ x_2 = -\int_a^{p_1} \cos \varphi \frac{p_2}{\sqrt{\eta^2 + p_2^2}} d\eta, \\ p_1 = a \cos \varphi - t, \\ p_2 = a \sin \varphi. \end{cases}$$

Проекция Λ_+ на пространство (x_1, x_2, p_2) :



При $x_2 \neq 0$, вне каустики, решение имеет вид ВКБ

$$\sqrt{\frac{2\pi}{h}} e^{-\frac{3\pi i}{4}} e^{-\frac{i\pi m}{2}} e^{\frac{iS}{h}} \frac{D}{\sqrt{|\frac{\partial x}{\partial(t,\varphi)}|}} \quad (1)$$

где

$$S = \int_0^t P dX = \int_0^t \sqrt{(\cos \varphi - t)^2 + \sin^2 \varphi} dt$$

$$D = \frac{1}{2} ((\cos \varphi - t)^2 + \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{4}} \langle \tilde{\psi}^0(\cos \varphi, \sin \varphi), \begin{pmatrix} e^{-\frac{i\varphi}{2}} \\ e^{\frac{i\varphi}{2}} \end{pmatrix} \rangle \times \\ \times \left(\frac{\sqrt{\cos \varphi - t - i \sin \varphi}}{\sqrt{\cos \varphi - t + i \sin \varphi}} \right)$$

В координатах Арнольда на Λ_+ :

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{A^2+B^2}{1+A^2B^2}, \\ x_2 = -\frac{2AB \log A^2}{1+A^2B^2}, \\ p_1 = \frac{A^2-B^2}{1+A^2B^2}, \\ p_2 = \frac{2AB}{1+A^2B^2} \end{cases} \quad (2)$$

$$A \in (0, 1], \quad B \in \mathbb{R}$$

$$S = \int_0^\tau p dx = \frac{A^4 + 4(\ln A^2)A^2B^2 - B^4 - 1 + A^4B^4}{(1 + A^2B^2)^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{D|_{\Lambda_+}}{\sqrt{|\frac{\partial x}{\partial(t,\varphi)}|}} &= \frac{1}{\sqrt{|\frac{\partial x}{\partial(A,B)}|}} \frac{1}{(1 + A^2B^2)^{\frac{3}{2}}} \times \\ &\times \begin{pmatrix} A - iB \\ A + iB \end{pmatrix} \langle \tilde{\psi}^0 \left(\frac{1 - A^2B^2}{1 + A^2B^2}, \frac{2AB}{1 + A^2B^2} \right), \begin{pmatrix} 1 - iAB \\ 1 + iAB \end{pmatrix} \rangle \end{aligned}$$

Если мы ищем фундаментальное решение, то $\tilde{\psi}^0 = w = \text{const}$ и амплитуда упрощается:

$$\frac{w_1 + w_2 + iAB(w_2 - w_1)}{(1 + A^2B^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} A - iB \\ A + iB \end{pmatrix}$$

Асимптотика при $x_2 \neq 0$ через функции Эйри

A. Yu. Anikin, S. Yu. Dobrokhoto, V. E. Nazaikinskii, A. V. Tsvetkova,
Uniform Asymptotic Solution in the Form of an Airy Function for
Semiclassical Bound States in One-Dimensional and Radially Symmetric
Problems, Theoretical and Mathematical Physics volume 201, pages
1742–1770 (2019)

$$e^{\frac{i\Theta}{h}} \left[e^{-\frac{i\pi}{4}} \text{Ai} \left(- \left(\frac{3\Psi(x)}{2h} \right)^{\frac{2}{3}} \right) H_+(x) - e^{\frac{i\pi}{4}} \text{Ai}' \left(- \left(\frac{3\Psi(x)}{2h} \right)^{\frac{2}{3}} \right) H_-(x) \right],$$

где $\Theta = \frac{1}{2} (S_+ + S_-)$, $\Psi = \frac{1}{2} (S_+ - S_-)$.

Функции $\Theta(x)$, $\Psi(x)^{\frac{2}{3}}$ можно продолжить через каустику.

$$H_{\pm}(x) = \left(\frac{D_+}{\sqrt{|J_+|}} \pm \frac{D_-}{\sqrt{|J_-|}} \right) \left(\frac{3\Psi(x)}{2h} \right)^{\frac{1}{6}}$$

Интегральное представление

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}^2} dp \int_{p_1}^{\infty} d\theta e^{\frac{ipx}{\hbar}} e^{\frac{ia\theta}{\hbar}} \Phi(p_1, p_2) \Phi^{-1}(\theta, p_2) \tilde{\psi}^0(\theta, p_2),$$

где

$$\Phi(p_1, p_2) = C \begin{pmatrix} e^{\frac{3\pi i}{4} p_2} D_{-1 - \frac{ip_2^2}{2\hbar}} \left(-\sqrt{\frac{2i}{\hbar}} p_1 \right) & e^{-\frac{\pi i}{4} p_2} D_{-1 - \frac{ip_2^2}{2\hbar}} \left(\sqrt{\frac{2i}{\hbar}} p_1 \right) \\ D_{-\frac{ip_2^2}{2\hbar}} \left(-\sqrt{\frac{2i}{\hbar}} p_1 \right) & D_{-\frac{ip_2^2}{2\hbar}} \left(\sqrt{\frac{2i}{\hbar}} p_1 \right) \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Спасибо за внимание!