

Лакунарные рекуррентные соотношения для многочленов Бернулли и Эйлера

Мирзоев К.А.

Доклад основан на совместной работе с Сафоновой Т.А.

Вторая конференция Математических центров России

Москва, МГУ, 7 - 11 ноября 2022 г.

I. Введение. Формулировка основных результатов

Символами $B_n(x)$ и $E_n(x)$ обозначим многочлены Бернулли и Эйлера, определяемые соответственно из разложений

$$\frac{te^{tx}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!}, \quad \frac{2e^{tx}}{e^t + 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} E_n(x) \frac{t^n}{n!},$$

первое из которых справедливо при $|t| < 2\pi$, а второе - при $|t| < \pi$, а символами B_n и E_n - числа Бернулли и Эйлера, определяемые равенствами

$$B_n = B_n(0), \quad E_n = 2^n E_n(1/2), \quad n = 0, 1, \dots$$

Классические линейные неоднородные рекуррентные соотношения для многочленов $B_n(x)$ и $E_n(x)$

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k B_k(x) = nx^{n-1}, \quad n = 2, 3, \dots$$

и

$$\sum_{k=0}^n C_n^k E_k(x) + E_n(x) = 2x^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Эти формулы хорошо известны и следуют из определения этих многочленов.

Для чисел Бернулли и Эйлера известны следующие лакунарные рекуррентные соотношения с пропусками длины 4

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k 2^{n-2k} C_{2n+2}^{4k+2} B_{2n-4k} = (-1)^{[n/2]} (n+1)$$

(S. Ramanujan 1911, D. H. Lehmer 1935)

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \left(2^{2n-2k} - 2^{2k+1} \right) C_{2n+2}^{4k+2} B_{2n-4k} = (-1)^{n+1} (n+1)$$

(D. H. Lehmer 1935, M. Merca 2019)

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k 2^{2k} C_{2n}^{4k} E_{2n-4k} = (-1)^n$$

(D. H. Lehmer 1935)

Метод, предложенный авторами доклада, о котором речь пойдёт ниже, позволяет установить справедливость следующих теорем.

Theorem (1)

При $m = 0, 1, \dots$ справедливы следующие равенства

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} 2^{n-2k} C_{n+1}^{2k+1} B_{n-2k}(z) = (n+1)(2z-1)^n,$$

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} 2^{n-2k} C_n^{2k} E_{n-2k}(z) = (2z-1)^n.$$

Theorem (2)

При $n = 0, 1, \dots$ справедливы равенства

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k 4^{n-k} C_{2n+2}^{4k+2} B_{2n-4k}(z) = (n+1) \sum_{m=0}^n (-1)^{m+n} C_{2n+1}^{2m} (2z-1)^{2m},$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k 4^{n-k+1} C_{2n+3}^{4k+2} B_{2n-4k+1}(z) = \\ & = (2n+3) \sum_{m=0}^n (-1)^{m+n} C_{2n+2}^{2m+1} (2z-1)^{2m+1}. \end{aligned}$$

Theorem (3)

При $n = 0, 1, \dots$ справедливы равенства

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k 4^{n-k} C_{2n}^{4k} E_{2n-4k}(z) = \sum_{m=0}^n (-1)^{m+n} C_{2n}^{2m} (2z-1)^{2m},$$

$$2 \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k 4^{n-k} C_{2n+1}^{4k} E_{2n-4k+1}(z) = \sum_{m=0}^n (-1)^{m+n} C_{2n+1}^{2m+1} (2z-1)^{2m+1}.$$

II. О функции Грина некоторых самосопряжённых задач

Пусть $\alpha = 0$ или $\alpha = 1$. Рассмотрим самосопряжённый оператор S_α , порождённый в $\mathcal{L}^2[0, \pi]$ выражением

$$l_2[y] = -y'' - 2aiy' + 2a^2y$$

и граничными условиями

$$y^{(j)}(0) = e^{\pi i \alpha} y^{(j)}(\pi), \quad j = 0, 1,$$

где a - некоторое вещественное число.

Спектр этого оператора состоит из собственных чисел

$$\mu_{\alpha, k} = (2k + \alpha)^2 - 2a(2k + \alpha) + 2a^2,$$

а собственному значению $\mu_{\alpha, k}$ соответствует собственная функция

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-i(2k+\alpha)x}, \quad k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$$

Если число a не совпадает ни с одним из чисел $\mu_{\alpha,k}$, то число $\mu = 0$ не принадлежит спектру оператор S_{α} , и, следовательно, он имеет резольвенту R_{α} . Хорошо известно, что эта резольвента является интегральным оператором с ядром $G_{\alpha}(x, t)$ - функцией Грина граничной задачи

$$\begin{cases} l_2[y] = f \\ y^{(j)}(0) = e^{\pi i \alpha} y^{(j)}(\pi), \quad j = 0, 1 \end{cases} \quad (1)$$

Вычисления показывают, что функция Грина $G_\alpha(x, t)$ ($0 \leq x, t \leq \pi$) рассматриваемой задачи определяется формулой

$$G_\alpha(x, t) = \mathcal{P}_\alpha(x - t), \quad \alpha = 0, 1, \quad (2)$$

где

$$\mathcal{P}_0(u) = \begin{cases} \frac{-e^{-ai(\pi+u)} \operatorname{sh} au + e^{-aiu} \operatorname{sh} a(\pi + u)}{2a(\operatorname{ch}(a\pi) - \cos(a\pi))} & \text{при } u < 0 \\ \frac{e^{ai(\pi-u)} \operatorname{sh} au + e^{-aiu} \operatorname{sh} a(\pi - u)}{2a(\operatorname{ch}(a\pi) - \cos(a\pi))} & \text{при } u \geq 0 \end{cases}$$

и

$$\mathcal{P}_1(u) = \begin{cases} \frac{e^{-ai(\pi+u)} \operatorname{sh} au + e^{-aiu} \operatorname{sh} a(\pi + u)}{2a(\operatorname{ch}(a\pi) + \cos(a\pi))} & \text{при } u < 0 \\ \frac{-e^{ai(\pi-u)} \operatorname{sh} au + e^{-aiu} \operatorname{sh} a(\pi - u)}{2a(\operatorname{ch}(a\pi) + \cos(a\pi))} & \text{при } u \geq 0 \end{cases}$$

Theorem (4)

Пусть $x, t \in [0, \pi]$ и $u = x - t$. Тогда для функции Грина $G_\alpha(x, t)$ задачи (1), определяемой формулой (2), справедливы тождества

$$G_0(x, t) = \frac{1}{2a^2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2k^2 + a^2}{4k^4 + a^4} \cos 2ku - \frac{2ai}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{4k^4 + a^4} \sin 2ku,$$

$$G_1(x, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2k+1)^2 + 2a^2}{(2k+1)^4 + 4a^4} \cos(2k+1)u - \\ - \frac{4ai}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2k+1}{(2k+1)^4 + 4a^4} \sin(2k+1)u.$$

Схема доказательства теорем 2 и 3

Из теоремы 4 следует, что при $0 \leq u \leq \pi$ справедливо тождество

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi a^2} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2k^2 + a^2}{4k^4 + a^4} \cos 2ku &= \\ &= \frac{\cos au \operatorname{sh} a(\pi - u) + \cos a(\pi - u) \operatorname{sh} au}{2a(\operatorname{ch}(a\pi) - \cos(a\pi))} \end{aligned}$$

Полагая далее $0 < |a| < 1$, домножим это равенство на $2a(\operatorname{ch}(a\pi) - \cos(a\pi))$, а затем разложим обе части полученного равенства в степенные ряды по степеням a и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях a .

После некоторых элементарных преобразований с учётом разложения

$$B_{2n}(x) = \frac{(-1)^{n-1} 2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos 2k\pi x}{k^{2n}},$$

находим, что при $m = 0, 1, \dots$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m (-1)^k 4^{k+1} C_{4m+2}^{4k} B_{4k}(z) = \\ = (4m+2) ((1-i)(1-z+iz)^{4m+1} + (1+i)(1-z-iz)^{4m+1}). \end{aligned}$$

Из этого равенства следует справедливость теоремы 2.

Следствия из теорем 1, 2 и 3

Corollary (1)

При $m = 1, 2, \dots$ справедливы равенства

$$\sum_{k=1}^m 4^k C_{2m+1}^{2k} B_{2k} = 2m,$$

$$\sum_{k=0}^m (2^{2k-1} - 1) C_{2m+1}^{2k} B_{2k} = 0,$$

$$\sum_{k=0}^m C_{2m}^{2k} E_{2k} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^m 4^k (4^k - 1) C_{2m}^{2k} B_{2k} = 2m.$$

Corollary (2)

При $n = 0, 1, \dots$ справедливы равенства

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k 2^{n-2k} C_{2n+2}^{4k+2} B_{2n-4k} = (-1)^{[n/2]} (n+1),$$

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \left(2^{2n-2k} - 2^{2k+1} \right) C_{2n+2}^{4k+2} B_{2n-4k} = (-1)^{n+1} (n+1),$$

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k 2^{n-2k+1} (2^{2n-4k+2} - 1) C_{2n+2}^{4k} B_{2n-4k+2} = (-1)^{[n/2]} (n+1),$$

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k 2^{2k} C_{2n}^{4k} E_{2n-4k} = (-1)^n.$$

Список литературы

-  M. Abramowitz, I. A. Stegun *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover Publ., New York (1972).
-  *NIST Handbook of Mathematical Functions*, Cambridge, New York (2010).
-  А.П. Прудников, Ю.А.Брычков, О.И.Маричев, *Интегралы и ряды. В 3 т. Т.3. Специальные функции. Дополнительные главы*, ФИЗМАТЛИТ, М. (2002).
-  S. Ramanujan, “Some properties of Bernoulli’s numbers”, *J. Indian Math. Soc.* No. 3, 219–234 (1911).
-  D. H. Lehmer, “Lacunary recurrence formulas for the numbers of Bernoulli and Euler”, *Ann. of Math.* **36**, No. 3, 637–649 (1935).
-  M. Merca, “On lacunary recurrences with gaps of length four and eight for the Bernoulli numbers”, *Bull. Korean Math. Soc.* **56**, No. 2, 491–499 (2019).

БЛАГОДАРЮ ЗА ВНИМАНИЕ!