Спектральные задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

Алексей Косарев
доклад основан на совместной работе с А. А. Шкаликовым

Вторая конференция Математических центров России
МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва
11 ноября 2022

Рассмотрим $n \times n$ систему дифференциальных уравнений вида

$$\boldsymbol{y}' - B(x)\boldsymbol{y} = \lambda A(x)\boldsymbol{y}, \quad x \in [0,1], \tag{1}$$

где $A(x), B(x)$ - комплекснозначные матрицы, λ - комплексный (спектральный) большой параметр.

- $A(x) = \operatorname{diag}\{a_1(x), \ldots, a_n(x)\}$,
- $a_i(x) \neq a_j(x)$ для $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots n$,
- $a_i(x) \neq 0 \ \forall x \in [0,1], i = 1, \ldots, n$.

Будем рассматривать два случая гладкости коэффициентов $A(x), B(x) \in L_1[0,1]$ и $A(x), B(x) \in W_1^k[0,1]$ $(k \in \mathbb{N})$.

Главный член асимптотики

Определим матрицы

$$E(x,\lambda) = \operatorname{diag}\{e^{\lambda\int_0^x a_1\,dt}, \dots, e^{\lambda\int_0^x a_n\,dt}\},$$

$$M(x) = \operatorname{diag}\{e^{\int_0^x b_{11}\,dt}, \dots, e^{\int_0^x b_{nn}\,dt}\}.$$

Легко видеть, что матрица

$$Y_0(x,\lambda) = M(x)E(x,\lambda)$$

является фундаментальной матрицей решений системы (1) в случае $b_{ij}(x) \equiv 0$ при $i \neq j$. Матрицы $M(x), E(x,\lambda)$ будут активно использоваться дальше.

Исторический обзор

1907, Л. Шлезингер был первым, кто рассмотрел асимптотики решений для систем, содержащих большой параметр.

1917, более общие результаты были получены Я. Д. Тамаркиным в его кандидатской диссертации. Немецкая (Tamarkin, Besicowitsch, 1924) и английская (Tamarkin, 1927) версии статьи Тамаркина появились уже после работы Дж. Д. Биркгофа и Р. Е. Лангера (1923).

В последующих работах авторы стремились ослабить условия на гладкость коэффициентов. Мы должны упомянуть работы Б. Митягина, П. Джакова, А. Лунева, М. Маламуда, Л.Оридороги, А. Савчука, А. Шкаликова.

Исторический обзор

1917, Я. Д. Тамаркин

Я. Д. Тамаркин рассматривал системы вида (1) с $\mathrm{A(x), B(x)} \in \mathrm{C}^{\mathrm{k+1}}[0,1]$ и доказал существование фундаментальной матрицы решений $Y(x,\lambda)$, имеющей асимптотическое представление

$$Y(x,\lambda) = \left[\Phi_0(x) + \cdots + \lambda^{-(k-1)}\Phi_{k-1}(x) + \lambda^{-k}\mathcal{O}(1)\right] E(x,\lambda),$$

в некоторых секторах комплексной плоскости.

Исторический обзор

1923, Дж. Д. Биркгоф и Р. Е. Лангер

Пусть элементы матриц $A(x), B(x)$ принадлежат пространству $C^k[0,1]$ $(k \geq 1)$. Тогда в каждом секторе П комплексной плоскости, внутри которого величины $Re\{\lambda(\gamma_j(x) - \gamma_i(x))\}$ сохраняют знак, существует фундаментальная матрица $Y(x,\lambda)$ уравнения (1), имеющая асимптотическое представление

$$Y(x,\lambda) = \left(P_0(x) + \frac{P_1(x)}{\lambda} + \cdots + \frac{P_{k-1}(x)}{\lambda^{k-1}} + \lambda^{-k}\mathcal{O}(1) \right) E(x,\lambda),$$

где $\|\mathcal{O}(1)\|_{C[0,1]} \leq C$ при $\lambda \to \infty$ в секторе П.

Исторический обзор

2020, А. М. Савчук и А. А. Шкаликов

В этой статье авторы рассмотрели системы вида

$$\boldsymbol{y}' = \lambda\,(\rho(x)D)\,\boldsymbol{y} + B(x)\boldsymbol{y} + C_0(x,\lambda)\boldsymbol{y},$$

где $\rho(x), b_{ij}(x), c_{ij}(x) \in L_1[0,1]$, $D = diag\{d_1,\ldots,d_n\} \equiv const$, $\int_0^1 |c_{ij}(x,\lambda)|dx \to 0$ при $|\lambda| \to \infty$, и доказали существоание фундаментальной матрицы решений с асимптотикой

$$Y(x,\lambda) = M(x)\,(I + o(1))\,E(x,\lambda),\ \ \|o(1)\|_{L_\infty} \to 0 \text{ при } \Gamma_\kappa \ni \lambda \to \infty$$

где прямые $Re(\lambda d_i) = Re(\lambda d_j)$ $(i,j = 1,\ldots n)$ разбивают комплексную плоскость на не более чем $n^2 - n$ секторов Γ_κ.

Исторический обзор

2020, А. М. Савчук и А. А. Шкаликов

Они использовали подход отличный от подходов Биркгофа-Лангера и Тамаркина: вместо построения формальной матрицы решений они перешли к интегральным уравнениям (для каждого столбца фундаментальной матрицы)

$$\boldsymbol{z}_m = \boldsymbol{z}_0^m + V_m \boldsymbol{z}_m, \quad \boldsymbol{z}_0^m = \left(\delta_j^m\right)_{j=1}^n, \quad m = 1, \ldots, n \qquad (*)$$

и показали, что

$$\|V_m^2(\lambda)\|_{L_\infty} \to 0 \text{ as } |\lambda| \to \infty,$$

то есть V_m^2 - сжатие в пространстве $L_\infty^n[0,1]$ при больших $|\lambda|$.

Исторический обзор

2020, А. М. Савчук и А. А. Шкаликов

Решение интегрального уравнения (*) может быть представлено в виде ряда

$$\boldsymbol{z}_m = \boldsymbol{z}_0^m + \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} V_m^{\nu}(\lambda)\right) V_m(\lambda)\boldsymbol{z}_0^m.$$

Утверждение теоремы следует из следующего факта: $\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} V_m^{\nu}(\lambda)\right)$ сходится и $\|V_m(\lambda)\boldsymbol{z}_0^m\|_{L_\infty} \to 0$ при $|\lambda| \to \infty$ (из-за конкретного представления $V_m(\lambda)$ и выбора вектора $\boldsymbol{z}_0^m$).

Основная теорема для $n \times n$ систем

Пусть коэффициенты матриц $A(x), B(x) \in L_1[0,1]$. Тогда в каждом бесконечном секторе Π комплексной плоскости, в котором величины $Re\{\lambda(a_i(x) - a_j(x))\}$ сохраняют знак при всех $x \in [0,1]$, $\lambda \in \Pi$, существует фундаментальная матрица решений $Y(x,\lambda)$ уравнения (1), имеющая асимптотическое представление

$$Y(x,\lambda) = M(x)(I + R(x,\lambda))E(x,\lambda),$$

где $R(x,\lambda)$ - голоморфная матриц-функция в секторе Π при достаточно больших λ, причем

$$\|R(x,\lambda)\|_{C[0,1]} \to 0 \ \text{при} \ \lambda \to \infty, \ \ \lambda \in \Pi.$$

Если элементы матриц $A(x)$, $B(x)$ принадлежат пространству $W_1^k[0,1]$, $k \in \mathbb{N}$, то фундаментальную матрицу $Y(x,\lambda)$ можно выбрать такой, что $R(x,\lambda)$ допускает представление

$$R(x,\lambda) = \frac{R^1(x)}{\lambda} + \dots + \frac{R^k(x)}{\lambda^k} + o(1)\lambda^{-k},$$

где $o(1)$ - бесконечно малая функция равномерно по $x \in [0,1]$ при $\lambda \to \infty$, $\lambda \in \Pi$. Матриц-функции R^m вычисляются по формулам

$$q_{ij} := b_{ij} e^{\int_0^x b_{jj}(t) - b_{ii}(t) dt}, \quad p_{ij}^l := \sum_{s=1,\, s\neq i}^{n} q_{is}(t) r_{sj}^l(t), \quad l = 1, \dots, k,$$

$$r_{ij}^1 = \frac{q_{ij}}{a_j - a_i}, \quad i \neq j, \quad r_{ii}^1 = \int_0^x p_{ii}^1(t) dt,$$

$$r_{ij}^m = \frac{-\frac{d}{dx} r_{ij}^{m-1} + p_{ij}^{m-1}}{a_j - a_i}, \quad i \neq j, \quad r_{ii}^m = \int_0^x p_{ii}^m(t) dt.$$

Схема доказательства

Будем искать решение матричного уравнения

$$Y'(x,\lambda) = \{\lambda A(x) + B(x)\} Y(x,\lambda) \tag{2}$$

в виде

$$Y(x,\lambda) = M(x)\left\{I + \frac{R_1(x)}{\lambda} + \frac{R_2(x)}{\lambda^2} + \dots\right\} E(x,\lambda).$$

Последовательно приравнивая коэффициенты при степенях λ, мы построим матрицу

$$S(x,\lambda) = M(x)\left(I + \frac{R_1(x)}{\lambda} + \dots + \frac{R_{k-1}(x)}{\lambda^{k-1}} + \frac{R_k(x)}{\lambda^k}\right) E(x,\lambda),$$

которую назовем матрицей формального решения.

Схема доказательства

Можно показать, что $S(x,\lambda)$ удовлетворяет уравнению (2) в приближенном смысле, а именно

$$S'(x,\lambda) = (\lambda A(x) + B(x))S(x,\lambda) + \frac{1}{\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{k}}}\boldsymbol{\Phi(x,\lambda)S(x,\lambda)},$$

где

$$\Phi(x,\lambda) = M(x)L(x)\left(I + \frac{R_1(x)}{\lambda} + \dots + \frac{R_k(x)}{\lambda^k}\right)^{-1} M^{-1}(x),$$

$$L(x) = R_k'(x) - Q(x)R_k(x) \in L_1[0,1].$$

Более того, $l_{ii}(x) \equiv 0, i = 1, \dots, n$ по построению.

Схема доказательства

Перепишем матричное уравнение (2) в виде

$$Y'(x,\lambda) = \left[\lambda A(x) + B(x) + \frac{1}{\lambda^k}\Phi(x,\lambda)\right] Y(x,\lambda) - \frac{1}{\lambda^k}\Phi(x,\lambda)Y(x,\lambda).$$

Общее решение такого уравнения задается формулой

$$Y(x,\lambda) = S(x,\lambda)C - \frac{1}{\lambda^k}\int^{x} S(x,\lambda)T(t,\lambda)\Phi(t,\lambda)Y(t,\lambda)dt,$$

где C - константная матрица, $T(x,\lambda) = S^{-1}(x,\lambda)$, а нижние пределы интегрирования могут быть выбраны произвольно.

Схема доказательства

Теорема следует из анализа матрицы перехода $\boldsymbol{U(x,\lambda)}$

$$Y(x,\lambda) = \boldsymbol{U(x,\lambda)} S(x,\lambda),$$

где

$$U(x,\lambda) = S(x)CT(x) - \frac{1}{\lambda^k}\int^x S(x)T(t)\Phi(t,\lambda)U(t,\lambda)S(t)T(x)dt$$

(символы λ в $S(x,\lambda)$ и $T(x,\lambda)$ опущены для краткости).

Схема доказательства

Положив $C = I$, получим следующее уравнение для $U(x, \lambda)$

$$U(x, \lambda) = I - \frac{1}{\lambda^k} \int^{x} S(x, \lambda) T(t, \lambda) \Phi(t, \lambda) U(t, \lambda) S(t, \lambda) T(x, \lambda) dt.$$

Такой выбор для C гарантирует, что соответствующая матрица решений $Y(x, \lambda)$ будет являеться фундаментальной.

Схема доказательства

1. На первом шаге мы покажем, что матрица

$$\phi(x,\lambda) := \int^{x} S(x,\lambda)T(t,\lambda)\Phi(t,\lambda)U(t,\lambda)S(t,\lambda)T(x,\lambda)dt$$

такова, что $\|\phi_{ij}(x,\lambda)\|_{C[0,1]} \leq KM_U$ при больших $|\lambda|$, $\lambda \in \Pi$, где K - некоторая фиксированная константа, а

$$M_U := \max_{i,j,x} |u_{ij}(x,\lambda)|.$$

Тогда из равенства

$$U(x,\lambda) = I - \frac{1}{\lambda^k}\phi(x,\lambda)$$

следуют оценки

$$M_U \leq 2, \ \ \|\phi_{ij}(x,\lambda)\|_{C[0,1]} \leq KM_U \leq 2K,$$

то есть матрица $U(x,\lambda)$ имеет вид

$$U(x,\lambda) = I - \frac{1}{\lambda^k}O(1).$$

Схема доказательства

Подстановка $U(x,\lambda) = I - \frac{1}{\lambda^k} O(1)$ в равенство

$$Y(x,\lambda) = U(x,\lambda) S(x,\lambda)$$

дает нам следующую асимптотику

$$Y(x,\lambda) = M(x) \left[I + \frac{R^1(x)}{\lambda} + \cdots + \frac{R^{k-1}(x)}{\lambda^{k-1}} + O(1)\lambda^{-k} \right] E(x,\lambda).$$

Схема доказательства

2. На втором шаге мы получим более точные оценки для $U(x,\lambda)$, пользуясь уже доказанной ограниченностью $U(x,\lambda)$ и $\phi(x,\lambda)$. Подставляя представление $U(x,\lambda) = I - \frac{1}{\lambda^k}\phi(x,\lambda)$ в уравнение для $U(x,\lambda)$, получим

$$U(x,\lambda) = I - \frac{1}{\lambda^k}\int^x S(x,\lambda)T(t,\lambda)\Phi(t,\lambda)S(t,\lambda)T(x,\lambda)dt$$
$$+ \frac{1}{\lambda^{2k}}\int^x S(x,\lambda)T(t,\lambda)\Phi(t,\lambda)\phi(t,\lambda)S(t,\lambda)T(x,\lambda)dt.$$

Из ограниченности $\phi(x,\lambda)$ следует ограниченность второго интеграла константой $K\cdot 2K$, то есть последнее слагаемое дает в асимптотику $U(x,\lambda)$ вклад $O(\frac{1}{\lambda^{2k}})$.

Схема доказательства

Элементы матрицы

$$\int^{x} S(x,\lambda)T(t,\lambda)\Phi(t,\lambda)S(t,\lambda)T(x,\lambda)dt$$

имеют вид

$$\int_{x_{ij}}^{x} e^{\lambda \int_t^x a_i(s)-a_j(s)ds} l_{ij}(t)dt + O(\lambda^{-1}),$$

где $l_{ii} \equiv 0, i = 1, \dots, n$ по построению, а x_{ij} выбраны так, что

$$Re\{\lambda \int_t^x a_i(s) - a_j(s)ds\} < 0, \qquad i \neq j, \qquad \forall \lambda \in \Pi.$$

По лемме Римана-Лебега следует, что

$$\| \int_{x_{ij}}^{x} e^{\lambda \int_t^x a_i(s)-a_j(s)ds} l_{ij}(t)dt \|_{C[0,1]} \to 0 \text{ as } \lambda \to \infty, \;\; \lambda \in \Pi.$$

Спектральная задача

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & -a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, x \in [0,1], \quad (3)$$

$$y_1(1) = 0, \quad y_2(0) = 0, \quad (4)$$

где $a_1(x), a_2(x) > 0$, $a_i(x), b_{ij}(x) \in W_1^k[0,1], k \in N$.

По теореме для $n \times n$ систем в левой и правой полуплоскостях существует фундаментальная матрица решений $Y(x, \lambda)$ системы (3), имеющая асимптотику

$$Y(x, \lambda) = M(x) \left(I + \frac{R^1(x)}{\lambda} + \cdots + \frac{R^k(x)}{\lambda^k} + o(1)\lambda^{-k} \right) E(x, \lambda).$$

Формулы для 2×2 системы

2021, А. П. Косарев и А. А. Шкаликов

Введем обозначения для функций и операторов

$$a(x) = a_1(x) + a_2(x), \quad b(x) = e^{\int_0^x b_{11}(t) - b_{22}(t) dt},$$

$$(I_1 f)(x) = \int_0^x b_{12}(t) b^{-1}(t) f(t)\, dt, \quad (I_2 f)(x) = \int_0^x b_{21}(t) b(t) f(t)\, dt,$$

$$(Df)(x) = \frac{1}{a(x)} f'(x), \quad J_1 = \frac{b_{21} b}{a} I_1, \quad J_2 = -\frac{b_{12} b^{-1}}{a} I_2,$$

тогда формулы для R^m примут более простой вид

$$r_{11}^1 = I_1 \frac{b_{21} b}{a}, \quad r_{12}^1 = -\frac{b_{12} b^{-1}}{a}, \quad r_{21}^1 = \frac{b_{21} b}{a}, \quad r_{22}^1 = -I_2 \frac{b_{12} b^{-1}}{a},$$

$$r_{11}^{m+1} = I_1 r_{21}^{m+1}, \qquad r_{12}^{m+1} = (D + J_2)^m r_{12}^1,$$
$$r_{21}^{m+1} = (-D + J_1)^m r_{21}^1, \qquad r_{22}^{m+1} = I_2 r_{12}^{m+1}.$$

Собственные значения пучка $L - \lambda A$

Пусть матрицы $A(x), B(x)$ принадлежат пространству $W_1^k[0,1]$, $k \in \mathbb{N}$, и числа n_1, $n_2 \le k$ таковы, что

$$\gamma_m^1 = 0, \;\; m = 1, \dots, n_1 - 1, \;\; \gamma_{n_1} \ne 0,$$

$$\gamma_m^2 = 0, \;\; m = 1, \dots, n_2 - 1, \;\; \gamma_{n_2} \ne 0,$$

$$\gamma_m^1 := (-D + J_1)^{m-1} r_{21}^1(0), \qquad \gamma_m^2 := (D + J_2)^{m-1} r_{12}^1(1), \qquad m = 1, \dots, k.$$

Тогда характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ задачи (3)-(4) имеет вид

$$\Delta(\lambda) = e^{\lambda A_1}(1 + o(1)) - \gamma \lambda^{-(n_1+n_2)} e^{-\lambda A_2}(1 + o(1)), \qquad \gamma = \gamma_{n_1}^1 \gamma_{n_2}^2,$$

где $A_1 = \int_0^1 a_1(t)dt > 0$, $A_2 = \int_0^1 a_2(t)dt > 0$.

Собственные значения пучка $L - \lambda A$

Нули квазиполинома

$$\Delta_0(\lambda) = e^{\lambda A_1} - \gamma \lambda^{-(n_1+n_2)} e^{-\lambda A_2}$$

хорошо известны (см., например, В. Ф. Жданович, 1960) и имеют асимптотику

$$\lambda_n^{\pm} = \frac{1}{A_1 + A_2} \left(\pm 2\pi i n - \ln n^{n_1+n_2} - \ln \frac{(\pm 2\pi i)^{n_1+n_2}}{\gamma (A_1 + A_2)^{n_1+n_2}} + \mathcal{O}\left(\frac{\ln n}{n} \right) \right).$$

Собственные значения пучка $L - \lambda A$

Применяя теорему Руше для окружностей радиуса ε вокруг нулей $\lambda_n^{\pm}$ и целой функции $\Delta(\lambda) = \Delta_0(\lambda) + \Delta_d(\lambda)$, получаем, что собственные значения задачи (3)-(4), то есть нули $\Delta(\lambda)$, совпадают с $\lambda_n^{\pm}$ с точностью до $o(1)$.

Полнота системы СПФ

Используя полученные асимптотики, можно явно выписать функцию Грина задачи (3)-(4) и показать, что при достаточно больших $|\lambda|$ в правой λ-полуплоскости $|G_{ij}(x,\xi,\lambda)| \le C_{right}$, а в левой полуплоскости $|G_{ij}(x,\xi,\lambda)| \le C_{left}\lambda^{n_1+n_2}$ вне кругов фиксированного радиуса с центрами в $\lambda_n^{\pm}$.

Дальнейшее доказательство полноты системы собственных и присоединенных функций задачи (3)-(4) проводится стандартным путем.

Спасибо за внимание!