

Восстановление оператора Шрёдингера с сингулярным потенциалом на полупрямой по наперёд заданному существенному спектру

Агафонкин Г.А.

МГУ им. М.В.Ломоносова, Московский центр фонд. и прикл. математики

11 ноября 2022

Поддержан грантом РФФИ № 20-11-20261

Рассматривается одномерный оператор Шрёдингера вида

$$Hu(x) = -u''(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \delta(x - x_k) u(x) \quad \text{в} \quad L_2([0, +\infty))$$

Постановка задачи

Рассматривается одномерный оператор Шрёдингера вида

$$Hu(x) = -u''(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \delta(x - x_k) u(x) \quad \text{в } L_2([0, +\infty))$$

Область определения:

$$u \in W_2^2([0, +\infty) \setminus \{x_k, k \in \mathbb{N}\}) \cap C([0, +\infty))$$

Постановка задачи

Рассматривается одномерный оператор Шрёдингера вида

$$Hu(x) = -u''(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \delta(x - x_k) u(x) \quad \text{в} \quad L_2([0, +\infty))$$

Область определения:

$$u \in W_2^2([0, +\infty) \setminus \{x_k, k \in \mathbb{N}\}) \cap C([0, +\infty))$$

Краевое условие: $(D) \ u(0) = 0$ ИЛИ $(N) \ u'(0+) = 0$

Постановка задачи

Рассматривается одномерный оператор Шрёдингера вида

$$Hu(x) = -u''(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \delta(x - x_k) u(x) \quad \text{в } L_2([0, +\infty))$$

Область определения:

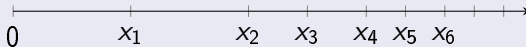
$$u \in W_2^2([0, +\infty) \setminus \{x_k, k \in \mathbb{N}\}) \cap C([0, +\infty))$$

Краевое условие: $(D) \ u(0) = 0$ ИЛИ $(N) \ u'(0+) = 0$

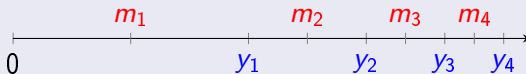
Основная задача

По заданному (замкнутому) ограниченному снизу множеству $S \subset \mathbb{R}$ найти значения x_k и a_k такие, что $\sigma_{\text{ess}}(H) = S$.

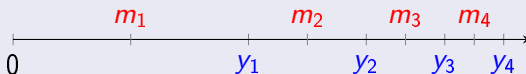
Мы разбиваем последовательность $\{x_k\}$ на 2 части:



Мы разбиваем последовательность $\{x_k\}$ на 2 части:



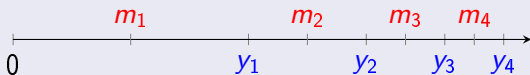
Мы разбиваем последовательность $\{x_k\}$ на 2 части:



y_k – подпослед-ть с $d_k := y_k - y_{k-1} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$ и

$$\sum_{k=1}^{+\infty} d_k = +\infty$$

Мы разбиваем последовательность $\{x_k\}$ на 2 части:

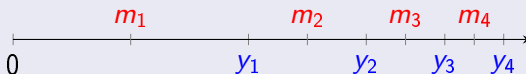


y_k – подпослед-ть с $d_k := y_k - y_{k-1} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$ и

$$\sum_{k=1}^{+\infty} d_k = +\infty$$

m_k – середина $I_k := [y_{k-1}, y_k]$

Мы разбиваем последовательность $\{x_k\}$ на 2 части:



y_k – подпослед-ть с $d_k := y_k - y_{k-1} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$ и

$$\sum_{k=1}^{+\infty} d_k = +\infty$$

m_k – середина $I_k := [y_{k-1}, y_k]$

Наконец, обозначим $a_k = \begin{cases} \mu_k & \text{в } m_k \\ \nu_k & \text{в } y_k \end{cases}$

В этих обозначениях

$$Hu(x) = -u''(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} (\mu_k \delta(x - m_k) + \nu_k \delta(x - y_k)) u(x)$$

В этих обозначениях

$$Hu(x) = -u''(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} (\mu_k \delta(x - m_k) + \nu_k \delta(x - y_k)) u(x)$$

Пусть $\nu_k = +\infty$ при всех k :

В этих обозначениях

$$Hu(x) = -u''(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} (\mu_k \delta(x - m_k) + \nu_k \delta(x - y_k)) u(x)$$

Пусть $\nu_k = +\infty$ при всех k :

$$\hat{H} \cong \bigoplus_{k=1}^{+\infty} \hat{H}_k \quad \text{в} \quad L_2([0, +\infty)) \cong \bigoplus_{k=1}^{+\infty} L_2(I_k)$$

В этих обозначениях

$$Hu(x) = -u''(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} (\mu_k \delta(x - m_k) + \nu_k \delta(x - y_k)) u(x)$$

Пусть $\nu_k = +\infty$ при всех k :

$$\hat{H} \cong \bigoplus_{k=1}^{+\infty} \hat{H}_k \quad \text{в} \quad L_2([0, +\infty)) \cong \bigoplus_{k=1}^{+\infty} L_2(I_k)$$

$$u \longleftrightarrow (u_1, u_2, \dots) : u_k = u|_{I_k} \in L_2(I_k) \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \|u_k\|^2 < +\infty$$

В этих обозначениях

$$Hu(x) = -u''(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} (\mu_k \delta(x - m_k) + \nu_k \delta(x - y_k)) u(x)$$

Пусть $\nu_k = +\infty$ при всех k :

$$\hat{H} \cong \bigoplus_{k=1}^{+\infty} \hat{H}_k \quad \text{в} \quad L_2([0, +\infty)) \cong \bigoplus_{k=1}^{+\infty} L_2(I_k)$$

$$u \longleftrightarrow (u_1, u_2, \dots) : u_k = u|_{I_k} \in L_2(I_k) \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \|u_k\|^2 < +\infty$$

$$\hat{H}_k u_k(x) = -u_k''(x) + \mu_k \delta(x - m_k) u_k(x)$$

$$\hat{H} \cong \bigoplus_{k=1}^{+\infty} \hat{H}_k \quad \text{в} \quad L_2([0, +\infty)) \cong \bigoplus_{k=1}^{+\infty} L_2(I_k)$$

$$\hat{H}_k u_k(x) = -u_k''(x) + \mu_k \delta(x - m_k) u_k(x)$$

Область определения:

$$u_k \in W_2^2(I_k \setminus \{m_k\}) \cap C(I_k) \quad : \quad u(y_{k-1}) = u(y_k) = 0$$

$$\hat{H} \cong \bigoplus_{k=1}^{+\infty} \hat{H}_k \quad \text{в} \quad L_2([0, +\infty)) \cong \bigoplus_{k=1}^{+\infty} L_2(I_k)$$

$$\hat{H}_k u_k(x) = -u_k''(x) + \mu_k \delta(x - m_k) u_k(x)$$

Область определения:

$$u_k \in W_2^2(I_k \setminus \{m_k\}) \cap C(I_k) \quad : \quad u(y_{k-1}) = u(y_k) = 0$$

Первый этап

Найти μ_k такие, что $\sigma_{\text{ess}}(\hat{H}) = S$

Известно, что спектры всех $\hat{H}_k$ чисто дискретны. Пронумеруем их элементы:

$$\lambda_{jk} - j\text{-е с.з. } \hat{H}_k.$$

Известно, что спектры всех $\hat{H}_k$ чисто дискретны. Пронумеруем их элементы:

$$\lambda_{jk} - j\text{-е с.з. } \hat{H}_k.$$

Мы используем следующие леммы:

Известно, что спектры всех $\hat{H}_k$ чисто дискретны. Пронумеруем их элементы:

$$\lambda_{jk} - j\text{-е с.з. } \hat{H}_k.$$

Мы используем следующие леммы:

Лемма 1

$$\dim \text{Ker}(\hat{H} - \lambda I) = \#\{(j, k) : \lambda_{jk} = \lambda\}$$

Вспомогательная задача

Известно, что спектры всех $\hat{H}_k$ чисто дискретны. Пронумеруем их элементы:

$$\lambda_{jk} - j\text{-е с.з. } \hat{H}_k.$$

Мы используем следующие леммы:

Лемма 1

$$\dim \text{Ker}(\hat{H} - \lambda I) = \#\{(j, k) : \lambda_{jk} = \lambda\}$$

Лемма 2

$$\sigma(\hat{H}) = \overline{\{\lambda_{jk}\}}$$

Вспомогательная задача

Известно, что спектры всех $\hat{H}_k$ чисто дискретны. Пронумеруем их элементы:

$$\lambda_{jk} - j\text{-е с.з. } \hat{H}_k.$$

Мы используем следующие леммы:

Лемма 1

$$\dim \text{Ker}(\hat{H} - \lambda I) = \#\{(j, k) : \lambda_{jk} = \lambda\}$$

Лемма 2

$$\sigma(\hat{H}) = \overline{\{\lambda_{jk}\}}$$

В частности, имеем $\sigma_{\text{ess}}(\hat{H}) = \text{т.накопл. } \{\lambda_{jk}\}$.

Для удобства используем безындексовую запись.

Для удобства используем безындексовую запись.

Рассматривается спектральная задача

$$-u''(x) + \mu\delta(x - m)u(x) = \lambda u(x), \quad x \in I = [\alpha, \beta], \quad d := \beta - \alpha$$

$$u \in W_2^2(I \setminus \{m\}) \cap C(I), \quad u(\alpha) = u(\beta) = 0$$

Для удобства используем безындексовую запись.

Рассматривается спектральная задача

$$\begin{aligned} -u''(x) + \mu\delta(x - m)u(x) &= \lambda u(x), \quad x \in I = [\alpha, \beta], \quad d := \beta - \alpha \\ u &\in W_2^2(I \setminus \{m\}) \cap C(I), \quad u(\alpha) = u(\beta) = 0 \end{aligned}$$

Решая хар.уравнение, получаем:

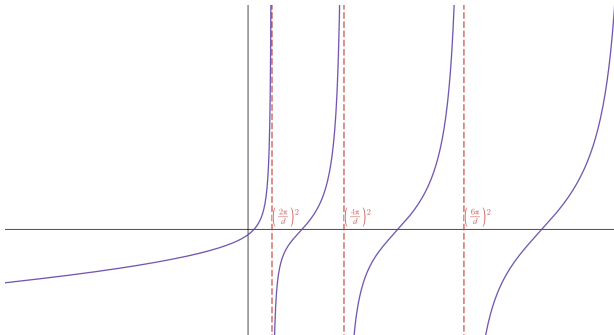
$$\Lambda = \left\{ \left(\frac{2\pi k}{d} \right)^2, \quad k \in \mathbb{N} \right\} \cup \{ \lambda : \mathcal{F}_d(\lambda) = \mu \},$$

где Λ – набор с.з. λ .

Функция $\mathcal{F}_d$ и ее свойства

$$\mathcal{F}_d(\lambda) = \begin{cases} -\frac{4}{d} \cdot \overline{\text{ctg}}\left(\frac{d\sqrt{\lambda}}{2}\right), & \lambda > 0 \\ -\frac{4}{d} \cdot \overline{\text{cth}}\left(\frac{d\sqrt{-\lambda}}{2}\right), & \lambda < 0 \end{cases},$$

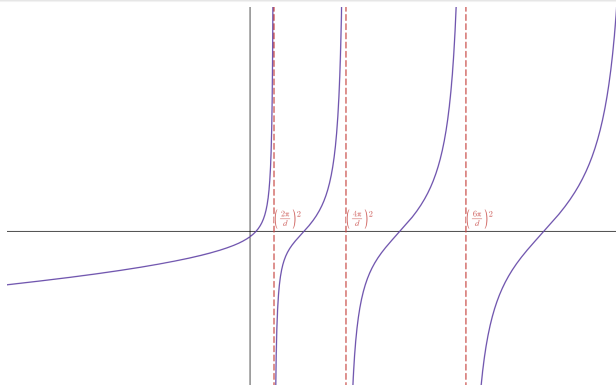
где $\overline{f}(x) := xf(x)$.



Функция $\mathcal{F}_d$ и ее свойства

Уравнение $\mathcal{F}_d(\lambda) = \mu$ имеет единственное решение на каждой компоненте связности обл.опред. $\mathcal{F}_d$. Поэтому

$$\Lambda = \left\{ \lambda_1 < \left(\frac{2\pi}{d} \right)^2 < \lambda_3 < \left(\frac{4\pi}{d} \right)^2 < \dots \right\}$$



Имеем:

$$\sigma(\hat{H}_k) = \left\{ \lambda_{1,k} < \left(\frac{2\pi}{d_k} \right)^2 < \lambda_{3,k} < \left(\frac{4\pi}{d_k} \right)^2 < \dots \right\}$$

Имеем:

$$\sigma(\hat{H}_k) = \left\{ \lambda_{1,k} < \left(\frac{2\pi}{d_k} \right)^2 < \lambda_{3,k} < \left(\frac{4\pi}{d_k} \right)^2 < \dots \right\}$$

Поскольку $d_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$,

$$\text{т.накопл. } \{\lambda_{jk}, j \geq 2\} = \{+\infty\}$$

Имеем:

$$\sigma(\hat{H}_k) = \left\{ \lambda_{1,k} < \left(\frac{2\pi}{d_k} \right)^2 < \lambda_{3,k} < \left(\frac{4\pi}{d_k} \right)^2 < \dots \right\}$$

Поскольку $d_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$,

$$\text{т.накопл. } \{\lambda_{jk}, j \geq 2\} = \{+\infty\}$$

Поэтому

$$\sigma_{\text{ess}}(\hat{H}) = \text{т.накопл. } \{\lambda_{1,k}\}.$$

Пусть S – замкнутое ограниченное снизу множество. Выберем последовательность $\{s_k, k \in \mathbb{N}\}$ так, что:

- $S = \text{т.накопл.}\{s_k\}$

- $s_k < \left(\frac{\pi}{d_k}\right)^2$

Пусть S – замкнутое ограниченное снизу множество. Выберем последовательность $\{s_k, k \in \mathbb{N}\}$ так, что:

- $S = \text{т.накопл.}\{s_k\}$

- $s_k < \left(\frac{\pi}{d_k}\right)^2$

Определим $\mu_k = \mathcal{F}_{d_k}(s_k)$. Тогда $\mu_k < 0$ при всех k и

$$\lambda_{1,k} = s_k \implies \sigma_{\text{ess}}(\hat{H}) = S$$

Пусть S – замкнутое ограниченное снизу множество. Выберем последовательность $\{s_k, k \in \mathbb{N}\}$ так, что:

- $S = \text{т.накопл.} \{s_k\}$

- $s_k < \left(\frac{\pi}{d_k}\right)^2$

Определим $\mu_k = \mathcal{F}_{d_k}(s_k)$. Тогда $\mu_k < 0$ при всех k и

$$\lambda_{1,k} = s_k \implies \sigma_{\text{ess}}(\hat{H}) = S$$

Замечание

Построенный оператор $\hat{H}$ ограничен снизу константой $c = \min S$

$$H \cong \bigoplus_{k=1}^{+\infty} H_k \quad \text{в} \quad L_2([0, +\infty)) \cong \bigoplus_{k=1}^{+\infty} L_2(I_k)$$

$$H \cong \bigoplus_{k=1}^{+\infty} H_k \quad \text{в} \quad L_2([0, +\infty)) \cong \bigoplus_{k=1}^{+\infty} L_2(I_k)$$

$$H_k u_k(x) = -u_k''(x) + \mu_k \delta(x - m_k) u_k(x)$$

Дальнейшее построение

$$H \cong \bigoplus_{k=1}^{+\infty} H_k \quad \text{в} \quad L_2([0, +\infty)) \cong \bigoplus_{k=1}^{+\infty} L_2(I_k)$$

$$H_k u_k(x) = -u_k''(x) + \mu_k \delta(x - m_k) u_k(x)$$

Область определения:

$$u_k \in W_2^2(I_k \setminus \{m_k\}) \cap C(I_k)$$

Краевое условие:
$$\begin{cases} u'(x_{k-1}) = \frac{\nu_{k-1}}{2} u(x_{k-1}), \\ u'(x_k) = -\frac{\nu_k}{2} u(x_k), \end{cases}$$

Дальнейшее построение

$$H \cong \bigoplus_{k=1}^{+\infty} H_k \quad \text{в} \quad L_2([0, +\infty)) \cong \bigoplus_{k=1}^{+\infty} L_2(I_k)$$

$$H_k u_k(x) = -u_k''(x) + \mu_k \delta(x - m_k) u_k(x)$$

Область определения:

$$u_k \in W_2^2(I_k \setminus \{m_k\}) \cap C(I_k)$$

Краевое условие:
$$\begin{cases} u'(x_{k-1}) = \frac{\nu_{k-1}}{2} u(x_{k-1}), \\ u'(x_k) = -\frac{\nu_k}{2} u(x_k), \end{cases}$$

Второй этап

Подобрать ν_k так, что $\sigma_{\text{ess}}(H) = \sigma_{\text{ess}}(\hat{H}) (= S)$

Мы используем следующую лемму:

Мы используем следующую лемму:

Лемма 3

$$\lambda_j(H_k) \nearrow \lambda_{jk} \quad \text{при} \quad \min\{\nu_{k-1}, \nu_k\} \rightarrow +\infty$$

Мы используем следующую лемму:

Лемма 3

$$\lambda_j(H_k) \nearrow \lambda_{jk} \quad \text{при} \quad \min\{\nu_{k-1}, \nu_k\} \rightarrow +\infty$$

Зафиксируем последовательность $\{\tilde{\nu}_k\}$, что $\lambda_j(H_k) \geq \lambda_{jk} - 1$.
Тогда при всех $\{\nu_k \geq \tilde{\nu}_k\}$ имеем

$$H \geq \min S - 1$$

Пусть $\{M_k, k \in \mathbb{N}\}$ – возрастающая последовательность т.ч.то:

- $M_k > 0$ и $M_k = o(x^\varepsilon)$ для всех $\varepsilon > 0$
- $S \cap (-\infty, M_1) \neq \emptyset$

Пусть $\{M_k, k \in \mathbb{N}\}$ – возрастающая последовательность т.ч.то:

- $M_k > 0$ и $M_k = o(x^\varepsilon)$ для всех $\varepsilon > 0$
- $S \cap (-\infty, M_1) \neq \emptyset$

Положим $y_0 = 0$ и $y_n = \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{k\sqrt{M_k}}$ при $n \geq 1$.

Пусть $\{M_k, k \in \mathbb{N}\}$ – возрастающая последовательность т.ч.то:

- $M_k > 0$ и $M_k = o(x^\varepsilon)$ для всех $\varepsilon > 0$
- $S \cap (-\infty, M_1) \neq \emptyset$

Положим $y_0 = 0$ и $y_n = \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{k\sqrt{M_k}}$ при $n \geq 1$.

Условия на s_k :

- $S = \text{т.накопл. } \{s_k\}$
- $s_k < M_k k^2$

Пусть $\{M_k, k \in \mathbb{N}\}$ – возрастающая последовательность т.ч.то:

- $M_k > 0$ и $M_k = o(x^\varepsilon)$ для всех $\varepsilon > 0$
- $S \cap (-\infty, M_1) \neq \emptyset$

Положим $y_0 = 0$ и $y_n = \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{k\sqrt{M_k}}$ при $n \geq 1$.

Условия на s_k :

- $S = \text{т.накопл. } \{s_k\}$
- $s_k < M_k k^2$

Напомним, что $\mu_k = \mathcal{F}_{d_k}(s_k) < 0$, где $d_k = \frac{\pi}{k\sqrt{M_k}}$.

Мы готовы сформулировать основной результат.

Мы готовы сформулировать основной результат.

Теорема 1

Пусть y_k , m_k , μ_k и $\tilde{\nu}_k$ выбраны ранее.

Если ν_k удовлетворяет обоим неравенствам $\nu_k \geq \tilde{\nu}_k$ и $\nu_k \geq M_{k+1}^{3/2}(k+1)^{5+\varepsilon}$ для некоторого $\varepsilon > 0$, то резольвентная разность

$$T = R_\lambda(H) - R_\lambda(\hat{H})$$

компактна, и поэтому $\sigma_{\text{ess}}(H) = \sigma_{\text{ess}}(\hat{H}) = S$.

Мы готовы сформулировать основной результат.

Теорема 1

Пусть y_k , m_k , μ_k и $\tilde{\nu}_k$ выбраны ранее.

Если ν_k удовлетворяет обоим неравенствам $\nu_k \geq \tilde{\nu}_k$ и $\nu_k \geq M_{k+1}^{3/2}(k+1)^{5+\varepsilon}$ для некоторого $\varepsilon > 0$, то резольвентная разность

$$T = R_\lambda(H) - R_\lambda(\hat{H})$$

компактна, и поэтому $\sigma_{\text{ess}}(H) = \sigma_{\text{ess}}(\hat{H}) = S$.

Замечание

Выражение для оператора T не меняется при замене краевого условия в 0 с (D) на (N).

Применим этот же метод к задаче для оператора

$$Lu(x) = -u''(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \chi_{[x_{k-1}, x_k]} u(x) \quad \text{в} \quad L_2([0, +\infty))$$

Применим этот же метод к задаче для оператора

$$Lu(x) = -u''(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \chi_{[x_{k-1}, x_k]} u(x) \quad \text{в} \quad L_2([0, +\infty))$$

Область определения:

$$u \in W_2^2([0, +\infty))$$

Краевое условие: $(D) \ u(0) = 0$ ИЛИ $(N) \ u'(0+) = 0$

Применим этот же метод к задаче для оператора

$$Lu(x) = -u''(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \chi_{[x_{k-1}, x_k]} u(x) \quad \text{в} \quad L_2([0, +\infty))$$

Область определения:

$$u \in W_2^2([0, +\infty))$$

Краевое условие: $(D) \ u(0) = 0$ ИЛИ $(N) \ u'(0+) = 0$

Вспомогательный оператор $\hat{L}$ – сужение L на

$$\{u \in W_2^2([0, +\infty)) : u(x_k) = 0 \text{ для всех } k\}$$

Лемма 4

$$R_\lambda(L) = R_\lambda(\hat{L})$$

Лемма 4

$$R_\lambda(L) = R_\lambda(\hat{L})$$

Остается подобрать x_k и a_k так, что $\sigma_{ess}(\hat{L}) = S$.

Лемма 4

$$R_\lambda(L) = R_\lambda(\hat{L})$$

Остается подобрать x_k и a_k так, что $\sigma_{\text{ess}}(\hat{L}) = S$.

$$\hat{L} \cong \bigoplus_{k=1}^{+\infty} \hat{L}_k \quad \text{в} \quad L_2([0, +\infty)) \cong \bigoplus_{k=1}^{+\infty} L_2([x_{k-1}, x_k])$$

$$\hat{L}_k u_k(x) = -u_k''(x) + a_k u_k(x)$$

$$u_k \in \dot{W}_2^2([x_{k-1}, x_k])$$

Лемма 4

$$R_\lambda(L) = R_\lambda(\hat{L})$$

Остается подобрать x_k и a_k так, что $\sigma_{\text{ess}}(\hat{L}) = S$.

$$\hat{L} \cong \bigoplus_{k=1}^{+\infty} \hat{L}_k \quad \text{в} \quad L_2([0, +\infty)) \cong \bigoplus_{k=1}^{+\infty} L_2([x_{k-1}, x_k])$$

$$\hat{L}_k u_k(x) = -u_k''(x) + a_k u_k(x)$$

$$u_k \in \dot{W}_2^2([x_{k-1}, x_k])$$

$$\lambda_j(\hat{L}_k) = a_k + \left(\frac{\pi j}{d_k} \right)^2, \quad \text{где} \quad d_k = x_k - x_{k-1}.$$

Пусть

$$\{a_k\} = \{b_k\} \cup \{c_k\},$$

где $b_k = a_{n_k} < 0$ и $c_k = a_{m_k} \geq 0$ для всех k .

Пусть

$$\{a_k\} = \{b_k\} \cup \{c_k\},$$

где $b_k = a_{n_k} < 0$ и $c_k = a_{m_k} \geq 0$ для всех k .

Поскольку $d_k \rightarrow 0$, имеем

$$\text{т.накопл. } \left\{ c_k + \left(\frac{\pi j}{d_{m_k}} \right)^2 \right\} = \{+\infty\}$$

Пусть

$$\{a_k\} = \{b_k\} \cup \{c_k\},$$

где $b_k = a_{n_k} < 0$ и $c_k = a_{m_k} \geq 0$ для всех k .

Поскольку $d_k \rightarrow 0$, имеем

$$\text{т.накопл. } \left\{ c_k + \left(\frac{\pi j}{d_{m_k}} \right)^2 \right\} = \{+\infty\}$$

Поэтому

$$\sigma_{\text{ess}}(\hat{L}) = \text{т.накопл. } \left\{ b_k + \left(\frac{\pi j}{d_{n_k}} \right)^2 \right\}$$

Выбираем $\{s_k, k \in \mathbb{N}\}$, так что:

- $S = \text{т.накопл. } \{s_k\}$

- $s_k < \left(\frac{\pi}{d_{n_k}}\right)^2$ и $s_k = o\left(\frac{1}{d_{n_k}^2}\right)$

и определяем $b_k = -\left(\frac{\pi}{d_{n_k}}\right)^2 + s_k < 0$.

Выбираем $\{s_k, k \in \mathbb{N}\}$, так что:

- $S = \text{т.накопл. } \{s_k\}$

- $s_k < \left(\frac{\pi}{d_{n_k}}\right)^2$ и $s_k = o\left(\frac{1}{d_{n_k}^2}\right)$

и определяем $b_k = -\left(\frac{\pi}{d_{n_k}}\right)^2 + s_k < 0$.

Тогда

$$\left\{ b_k + \left(\frac{\pi j}{d_{n_k}}\right)^2 \right\} = \{s_k\} \cup \left\{ \frac{\pi^2(j^2 - 1) + s_k d_{n_k}^2}{d_{n_k}^2}, j \geq 2 \right\}$$

Остается заметить, что единственной точкой накопления второго множества является $+\infty$.

Восстановление оператора Шрёдингера с сингулярным потенциалом на полупрямой по наперёд заданному существенному спектру

Агафонкин Г.А.

МГУ им. М.В.Ломоносова, Московский центр фонд. и прикл. математики

11 ноября 2022

Поддержан грантом РФФИ № 20-11-20261