

О ДВУХ МОДЕЛЯХ ДЛЯ ПЛАЗМЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ: ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ И ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ

Е.В.Чижонков

МГУ им. М.В.Ломоносова

Секция «Прикладная математика и математическое
моделирование» Второй конференции Математических центров
России

Неформальное введение — 1

Будем считать плазму нерелятивистской электронной жидкостью (газом), пренебрегая рекомбинационными эффектами и движением ионов.

Физический процесс начинается с того, что в некоторой области, занятой плазмой, часть электронов изначально выведена из положения равновесия.

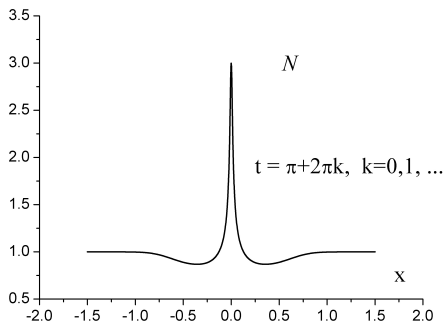
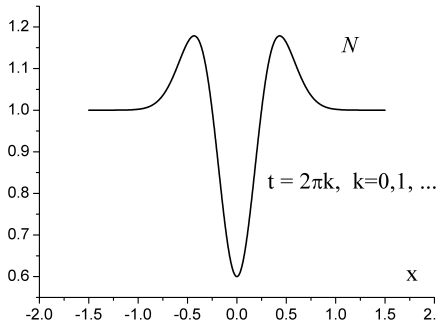
Смещенные относительно положения равновесия электроны формируют начальное электрическое поле, которое, в свою очередь, однозначно связано с неоднородностью плотности. Изменение температуры плазмы при этом не предполагается.

Возникшее электрическое поле заставляет электроны двигаться к положению равновесия, но движение происходит с ускорением.

Поэтому, проскочив положение равновесия, аналогично движению маятника, электроны начинают двигаться в противоположном направлении.

Неформальное введение — 2

- Рис.1 Плотность электронов для $t = 2\pi k$, $k = 0, 1, \dots$
- Рис.2 Плотность электронов для $t = \pi + 2\pi k$, $k = 0, 1, \dots$



$$\frac{\partial F}{\partial t} + v \frac{\partial F}{\partial x} - E(x, t) \frac{\partial F}{\partial v} = 0, \quad (1)$$

где $F = F(x, v, t)$ — функция распределения электронов, $E = E(x, t)$ — напряженность электрического поля. Функции E и F связаны соотношением

$$\frac{\partial}{\partial x} E(x, t) = 1 - N(x, t) \equiv 1 - \int_{-\infty}^{\infty} F dv, \quad (2)$$

где $N(x, t)$ — плотность электронов. В уравнении (2) символ “1” означает, что ионы неподвижны, а их плотность (безразмерная) — постоянна. Поэтому согласно одному из уравнений Максвелла имеем

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} v F dv. \quad (3)$$

$$E(x, t = 0) = \alpha x \exp \left\{ -2 \frac{x^2}{\rho_*^2} \right\}, \quad \alpha = \left(\frac{a_*}{\rho_*} \right)^2, \quad (4)$$

где параметры ρ_* и a_* характеризуют масштаб области локализации и амплитуду колебаний.

$$N(x, t = 0) = 1 - \frac{\partial}{\partial x} E(x, t = 0). \quad (5)$$

При этом параметры ρ_* и a_* в (4) должны обеспечивать положительность начальной электронной плотности, т.е. выполнение условия $\alpha < 1$. В свою очередь, соотношение (5) дает возможность задать начальное значение функции распределения, необходимое для решения уравнения Власова (1),

$$F(x, v, t = 0) = N(x, t = 0) \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \exp \left\{ -\frac{v^2}{2T} \right\}, \quad (6)$$

где множитель при N определяет максвелловское распределение скоростей при фиксированной температуре T .

Было

$$\frac{\partial}{\partial x} E(x, t) = 1 - N(x, t).$$

Добавилось

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + E + \boxed{\frac{1}{N} \frac{\partial P}{\partial x}} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + U \frac{\partial E}{\partial x} - U = 0, \quad (8)$$

где новые функции $U(x, t)$ и $P(x, t)$ определяют скорость электронов и газодинамическое давление.

Если в уравнении Власова положить

$$F(x, v, t) = N(x, t) \delta(v - U(x, t)), \quad (9)$$

т.е. рассмотреть предел при $T \rightarrow 0$, то новые уравнения — точное следствие с $P(x, t) \equiv 0$ («холодная» плазма!).

При учете конечной (ненулевой!) температуры используют две популярные формулы для давления:

- Изотермический процесс ($T \equiv \text{const}$):

$$P = \nu_1(T) N, \quad (10)$$

где $\nu_1(T)$ — коэффициент, зависящий от температуры электронов.

- Адиабатический процесс (приближение теплоизолированности плазмы от окружающей среды):

$$P = \nu_2(T) N^3, \quad (11)$$

где $\nu_2(T)$ — коэффициент, также зависящий от температуры электронов T .

Обе формулы имеют происхождение из кинетической модели Власова.

Для согласования с начальными условиями в кинетической модели заметим

$$N(x, t = 0) U(x, t = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x, v, t = 0) v dv = 0,$$

что, в силу положительности начальной плотности электронов (т.е. при $\alpha < 1$), дает

$$U(x, t = 0) \equiv 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (12)$$

Начальное условие для электрического поля — прежнее:

$$E(x, t = 0) = \alpha x \exp \left\{ -2 \frac{x^2}{\rho_*^2} \right\}, \quad \alpha = \left(\frac{a_*}{\rho_*} \right)^2 < 1.$$

- Хорошо известный полулагранжев метод для уравнений Власова – Пуассона:

Cheng C.Z., Knorr G. The integration of the Vlasov equation in configuration space. J. Computational Physics. 1976. V.22. P.330-351.

- Стандартная 2D–схема МакКормака для уравнений Власова – Ампера:

Horne R.B., Freeman M.P. A new code for electrostatic simulation by numerical integration of the Vlasov and Ampere equations using MacCormack's method. J. Computational Physics. 2001. V.171. P.182-200.

Алгоритмы принципиально различные!

Численные методы для гидродинамики

- Модифицированная схема МакКормака второго порядка аппроксимации:

Чижонков Е.В. О схемах второго порядка точности для моделирования плазменных колебаний. Вычисл. методы и программирование. 2020. Т.21. С.115–128.

- Монотонная схема (типа upwind) первого порядка аппроксимации:

Фролов А.А., Чижонков Е.В. Численное моделирование плазменных колебаний с учетом теплового движения электронов. Вычисл. методы и программирование. 2018. Т.19. С.194–206.

Алгоритмы принципиально различные!

Выбор параметров и согласование моделей — 1

Параметры импульса и значение температуры:

$$\rho_* = 0.5, \quad a_* = \rho_* \sqrt{0.4} \approx 0.316227, \quad \alpha = 0.4, \quad T = 4 \cdot 10^{-4}.$$

Уточним, что параметры импульса выбираются такими, чтобы обеспечить существование, единственность и достаточную гладкость решений как уравнений Власова – Максвелла, так и уравнений „холодной“ плазмы. Кроме того, значение температуры в кинетической модели должно обеспечивать небольшое, но заметное отличие по сравнению с „холодной“ плазмой.

Плоскость $\{(x, v) : x \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}\}$ заменим прямоугольником $\Omega = \{(x, v) : |x| \leq X_{\max}, |v| \leq V_{\max}\}$, где параметры $X_{\max}, V_{\max}$ выбираются достаточно большими, чтобы обеспечить с хорошей точностью выполнение краевых условий I-го рода по обоим переменным. Конкретные значения для указанных выше параметров — $X_{\max} = 2.5, V_{\max} = 0.34$.

Выбор параметров и согласование моделей — 2

Вычисленные для $T = 4 \cdot 10^{-4}$ значения равны:

$$\nu_1 = 1.5 \cdot 10^{-3}, \quad \nu_2 = 0.3 \cdot 10^{-3}.$$

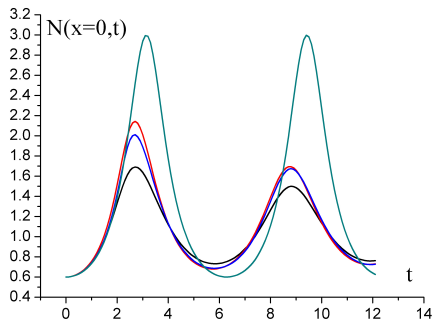


Рис.3. Динамика электронной плотности $N(x, t)$ на прямой $x = 0$:
черный цвет — модель I, красный цвет — модель II, синий цвет —
модель III, бирюзовый цвет — модель „холодной“ плазмы.

Итог первого полупериода

Все модели можно считать удовлетворительными.

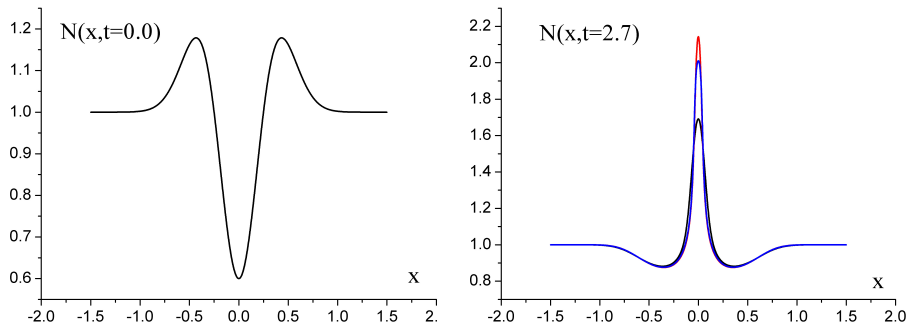


Рис.4. Распределения электронной плотности $N(x, t)$: слева — начальное ($t = 0$), справа — для $t = 2.7$. Графики для различных моделей справа: черный цвет — модель I, красный цвет — модель II, синий цвет — модель III.

Итог второго полупериода — 1

Что-то пошло «не так».

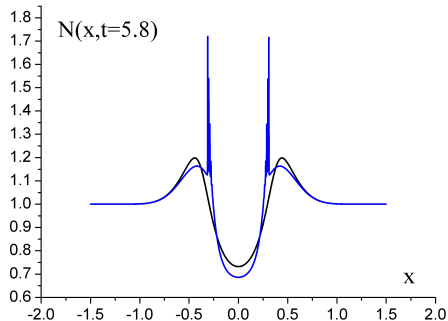
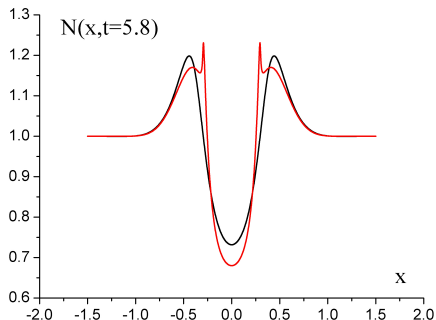


Рис.5. Распределения электронной плотности $N(x, t)$ для $t = 5.8$.
Графики для различных моделей: черный цвет — модель I, красный цвет — модель II, синий цвет — модель III.

Итог второго полупериода — 2

Посмотрим внимательно.

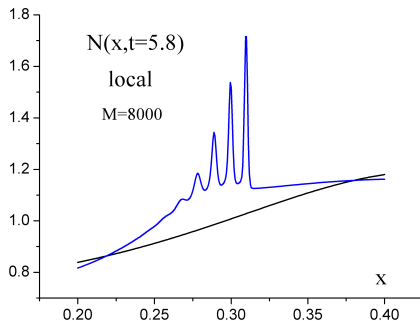
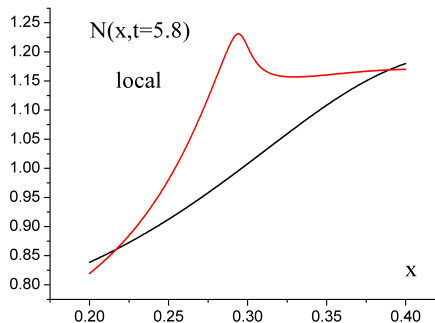


Рис.6. Распределения электронной плотности $N(x, t)$ для $t = 5.8$ в окрестности $x = 0.3$ (крупно). Графики для различных моделей: черный цвет — модель I, красный цвет — модель II, синий цвет — модель III.

Итог второго полупериода — 3

Модель III не подходит (разрывное решение!).

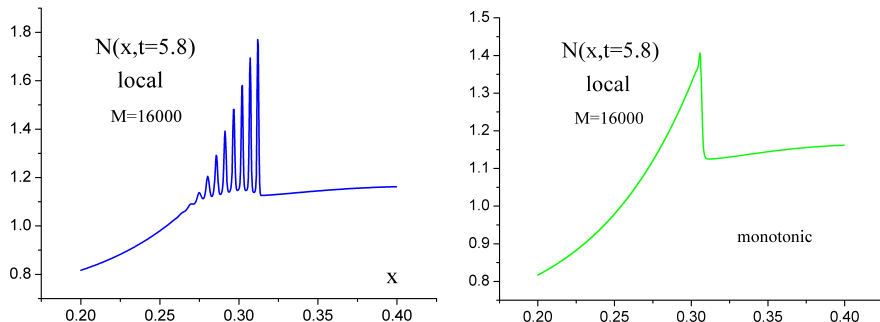


Рис.7. Распределения электронной плотности $N(x, t)$ для $t = 5.8$ в окрестности $x = 0.3$ (крупно). Расчеты для модели III с уменьшенными сеточными параметрами: слева — синий цвет: по схеме второго порядка аппроксимации (рабочей), справа — зеленый цвет: по монотонной схеме первого порядка аппроксимации.

Температура в кинетике (она колеблется!)

Используя первый и второй моменты функции распределения $F(x, v, t)$, получим формулу для температуры электронов:

$$Temp(x, t) = \frac{1}{N(x, t)} \int_{-\infty}^{\infty} (v - U(x, t))^2 F(x, v, t) dv.$$

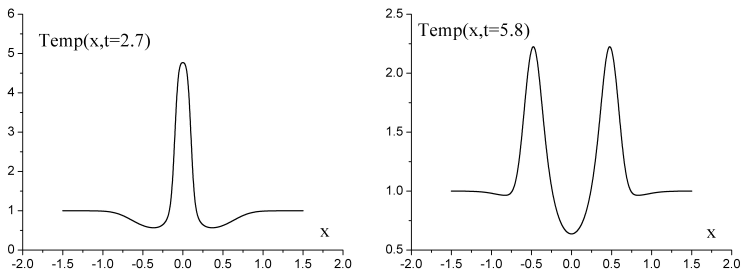


Рис.8. Распределения температуры в модели I, нормированные на T : слева — для $t = 2.7$, справа — $t = 5.8$.

Бегущая (тепловая) волна

Главное отличие — на фронте волны.

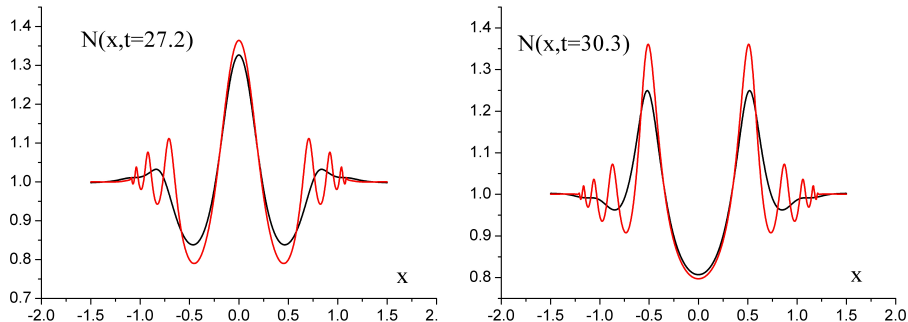


Рис.9. Распределения электронной плотности $N(x, t)$ — бегущая волна: слева для $t = 27.2$, справа для $t = 30.3$. Графики для различных моделей: черный цвет — модель I, красный цвет — модель II.

Выводы — 1:

- учет конечной температуры электронов приводит к возбуждению бегущих волн во всех рассматриваемых моделях I – III, в модели „холодной“ плазмы имеют место только колебания;
- в течение первого „полупериода“ все рассматриваемые модели I – III порождают примерно одинаковые качественные и количественные результаты;
- к окончанию первого „периода“ в модели III формируется разрывное решение, что следует считать ее недостатком;
- в моделях I и II бегущие волны существуют достаточно долго, причем они имеют хорошее совпадение в окрестности начала координат;

Выводы — 2:

- важным отличием гидродинамических волн в модели II от кинетических волн в модели I является регулярное возникновение новых экстремумов на фронте волны, которые никуда не исчезают и двигаются вместе с ней, монотонно возрастая по амплитуде;
- представляется правдоподобным, что наиболее разумное описание возбуждения бегущих волн порождает кинетическая модель I на основе уравнений Власова – Максвелла, так как гидродинамическая модель II (с постоянной температурой плазмы) качественно неверно отражает динамику температуры.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!!!