О решении обратных задач теории управления с помощью гамильтоновых конструкций.

Субботина Н. Н., Крупенников Е. А.

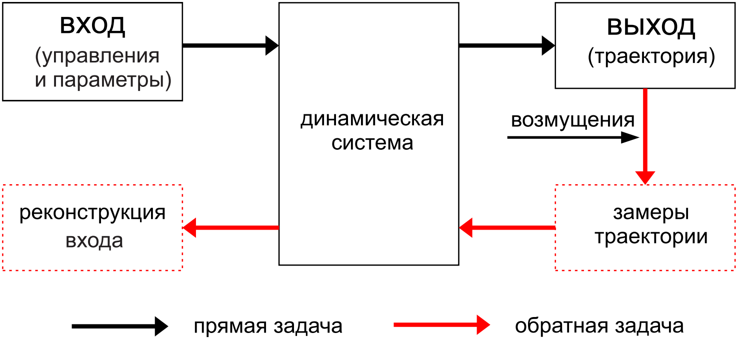
ИММ УрО РАН, УрФУ, Екатеринбург.

Вторая конференция Математических центров России (7–11 ноября, МГУ, МИАН, Москва)

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ

(проект 20-01-00362).

Обратные задачи.



Подходы к решению обратных задач. I

Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V., Maksimov V.I. Some algorithms for the dynamic reconstruction of inputs. P. Steklov Inst. Math. (2011) doi: 10.1134/S0081543811090082 .
(экстремальное прицеливание)

Kabanikhin S. I., Krivorotko O. I. Identification of biological models described by systems of nonlinear differential equations // J. of Inverse and Ill-posed Problems. 2015. Vol. 23, 5. P. 519–527. doi: 10.1515/jiip-2015-0072 .
(градиентные методы)

Liu Y.C., Chen Y.W., Wang Y.T., Chang J.R. A high-order Lie groups scheme for solving the recovery of external force in nonlinear system. // Inverse Problems in Science and Engineering. 2018. Vol. 26,№ 12. P. 1749–1783. doi: 10.1080/17415977.2018.1433669 .
(группы Ли)

Schmitt U., Louis A.K., Wolters C., Vauhkonen M. Efficient algorithms for the regularization of dynamic inverse problems: I. Theory. // Inverse Problems. 2002. Vol. 18, № 3. P. 659—676 doi: 10.1088/0266-5611/18/3/309 .
(оптимизация функционалов + регуляризация по Тихонову)

D'Autilia M. C., Sgura I. and Bozzini B. Parameter identification in ode models with oscillatory dynamics: a fourier regularization approach. // Inverse Problems 33. 2017. doi: 10.1088/1361-6420/aa9834 .
(ряды Фурье)

Schuster N., Burger M., Hahn B. Dynamic inverse problems: modelling—regularization—numerics. Preface. // Inverse Problems. 2018. Vol. 34, article ID 040301. 4 p. doi: 10.1088/1361-6420/aab0f5 .
(обзорная статья по современным методам)

Динамика

Рассматриваются динамические управляемые системы вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = G(t, x(t))u(t) + f(t, x(t)), \tag{1}$$

$$x(\cdot) : [0, T] \to \mathbb{R}^n, \quad u(\cdot) : [0, T] \to \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{m} \geq \mathbf{n},$$

$$t \in [0, T], \quad T < \infty. \tag{2}$$

x — фазовые переменны, u — управления.

Допустимые управления

Допустимые управления — измеримые функции

$$u(\cdot) : [0, T] \to \mathbf{U}, \tag{3}$$

$\mathbf{U} \subset \mathbb{R}^m$ — компакт (**необязательно выпуклый!**).

Невыпуклые ограничения могут привести к появлению так называемых скользящих режимов [12], [2, Ch. 2.2].

[12] *Уткин В.И.* Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления, М.: Наука, 1981.

[2] *Гамкрелидзе Р.В.* Основы оптимального управления. Изд-во Тбилисского ун-та, Тбилиси. 1977 . 230 с.

Обобщенные управления

Обобщенные управления — измеримые функции

$$\mu(\cdot|du) : [0, T] \to rpm(\mathbf{U})$$

со значениями во множестве **регулярных вероятностных борелевских мер** на $\mathbf{U}$ с топологией, индуцированной **слабой со звездой топологией** $C^*(\mathbf{U})$.

[2] *Гамкрелидзе Р.В.* Основы оптимального управления. Изд-во Тбилисского ун-та, Тбилиси. 1977 . 230 с.

[3] *Warga J.* Optimal Control of Differential and Functional Equations. Academic Press. 1972. 546 с.

Усредненные управления

Каждому обобщенному управлению отвечает одно усредненное

$$t \to u(t) = \int_{\mathbf{U}} u\mu(t|du), \tag{4}$$

Значения усредненных управлений принадлежат **выпуклой оболочке**, натянутой на $\mathbf{U}$.

$$u(\cdot) : [0, T] \to co\mathbf{U}. \tag{5}$$

[2] *Гамкрелидзе Р.В.* Основы оптимального управления. Изд-во Тбилисского ун-та, Тбилиси. 1977 . 230 с.

Входные данные

Известны неточные дискретные **замеры реализованной (т. н. базовой) траектории**

$$x^*(\cdot) : [0, T] \to \mathbb{R}^n$$

системы (1).

Точки замеров y_i^δ:

$$\|y_i^\delta - x^*(t_i)\| \leq \delta, \quad t_i = ih^\delta, \quad T = Nh^\delta, \quad i = 0, \ldots, N. \quad (6)$$

$\delta > 0$ — **погрешность**,
$h^\delta > 0$ — **шаг**.

Предположения

1. Существует компакт $\Psi \subset \mathbb{R}^n$ и константы $\delta_0 > 0,\ h_0 > 0,\ d_0 > 0$ такие, что

$$\bigcup_{i=\overline{0,N}} B_{d_0}[y_i^\delta] \subset \Psi, \quad \forall \delta \in (0, \delta_0],\ \forall h^\delta \in (0, h_0]$$

   (**все замеры содержатся в** Ψ при достаточно малой погрешности и шаге замеров);
2. Элементы $G(t,x)$ и $f(t,x)$ из (1) **липшицевы** на $[0,T] \times \Psi$;
3. Матрица $G(t,x)$ имеет **ранг** n на $[0,T] \times \Psi$.

Задача

Задача:

Найти управление, породившее базовую траекторию, по её известным замерам.

Некорректность задачи

Задача реконструкции управления **некорректна**, так как более, чем одно управление может порождать базовую траекторию.

Пример:

$$\frac{dx(t)}{dt} = u_1(t) + u_2(t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad u \in [-1,1] \times [-1,1], \quad t \in [0,1].$$

$$x^*(t) \equiv 0,$$

$$u(\cdot) \in \{(u_1(t), u_2(t))^\top : \ u_1(t) + u_2(t) = 0\}.$$

Корректная постановка задачи

Нормальное управление

это измеримое управление, порождающее базовую траекторию и имеющее минимальную L^2 норму.

Если предположения *1–3* выполняются, то **существует единственное** нормальное управление [17]

$$u^*(\cdot) : [0, T] \to \mathbb{R}^m.$$

[17] *Субботина Н.Н., Крупенников Е.А.* Слабое со звездой решение задачи динамической реконструкции // Труды Математического института им. В.А.Стеклова РАН, 315. 2021. С. 247–260.

Нормальное управление

Предположение 4. Нормальное управление является усредненным управлением:

$$u^*(t) \in co\mathbf{U}.$$

Корректная постановка задачи

Задача:

Найти **нормальное** управление, порождающее базовую траекторию.

Задача динамической реконструкции

ЗДР: Для $\forall\delta \le \delta_0,\ h^\delta \le h_0$ по набору замеров $\{y_k^\delta,\ k = 1, \dots, i \le N\}$ построить **аппроксимирующие кусочно-постоянные функции**

$$u^\delta(\cdot) : [0, t_i] \to \mathbb{R}^m$$

такие, что к концу процесса реконструкции $(t = t_N = T)$

1. $u^\delta(t) \in \mathbf{U}, \quad t \in [0, T]$;
2. Траектории $x^\delta(\cdot)$, порожденные этими управлениями, равномерно сходятся к базовой:

$$\|x^\delta(\cdot) - x^*(\cdot)\|_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\delta\to 0,\ h^\delta \to 0} 0;$$

3. Эти управления сходятся к нормальному в смысле

$$\int_0^T \langle g(\tau), u^\delta(\tau) - u^*(\tau)\rangle d\tau \xrightarrow{\delta\to 0} 0 \quad \forall g(\cdot) \in C([0, T], \mathbb{R}^m). \quad (7)$$

Сходимость управлений

Сходимость измеримых функций $u^\delta(\cdot) \to u^*(\cdot)$ (7)

$$\int\limits_0^T \langle g(\tau), u^\delta(\tau) - u^*(\tau)\rangle d\tau \xrightarrow{\delta\to 0} 0 \quad \forall g(\cdot) \in C([0,T], \mathbb{R}^m)$$

на классе измеримых функций эквивалента слабой со звездой сходимости в пространстве $L^1([0,T], C^*(\mathbf{U}))$

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbf{U}} g(\tau, u)\mu^\delta(\tau, du)d\tau - \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbf{U}} g(\tau, u)\mu^*(\tau, du)d\tau \xrightarrow{\delta\to 0} 0,$$

$$\forall g(\cdot) \in C([0,T] \times \mathbf{U}, \mathbb{R}),$$

где $\mu^\delta(t, du)$ — мера, сосредоточенная в точках $u^\delta(t) \in \mathbf{U}$, а $\mu^*(t, du)$ — в точках $u^*(t) \in \mathbf{U}$.

[3] *Warga J.* Optimal Control of Differential and Functional Equations. Academic Press. 1972. 546 c.

Вариационный подход к решению ЗДР

Шаг алгоритма совпадает с шагом поступления замеров h^δ. На каждом i-ом шаге строится решения на отрезке

$$[t_{i-1}, t_i] = [h^\delta(i-1), h^\delta i].$$

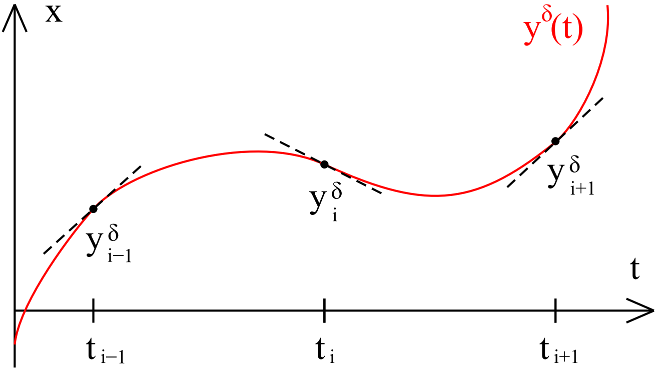
Процедуры шага:

1. **Интерполяция** замеров $y^\delta_{i-1}, y^\delta_i$.
2. **Интегрирование** гамильтоновой системы ОДУ во **вспомогательной вариационной задаче** (где используется интерполяция).
3. Построение **вспомогательного кусочно-непрерывного управления** (с использованием решения, полученного на предыдущем щаге).
4. **Усреднение и срезка** вспомогательного кусочно-непрерывного управления.
5. Построение **кусочно-постоянного аппроксимирующего управления** (на основании полученных усреднений).

Алгоритм. 1. Интерполяция.

По двум точкам $y_{i-1}^{\delta}, y_i^{\delta}$ строится **кубический сплайн** $y^{\delta}(t)$:

$$y^{\delta}(t_{i-1}) = y_{i-1}^{\delta}, \quad y^{\delta}(t_i) = y_i^{\delta},$$
$$\dot{y}^{\delta}(t_{i-1}) = f(t_{i-1}, y_{i-1}^{\delta}), \quad \dot{y}^{\delta}(t_i) = f(t_i, y_i^{\delta}).$$



Алгоритм. 2. Вспомогательная задача. Постановка.

Рассматривается семейство функций $x_i(\cdot),\ u_i(\cdot)$ таких, что:

1. Они **непрерывно дифференцируемы** и удовлетворяют уравнениям динамики (1).
2. Они удовлетворяют **краевым условиям**

$$x_i(t_{i-1}) = y^\delta_{i-1}, \quad u_i(t_{i-1}) = u_{i-1}.$$

$$x_i(t_i) = y^\delta_i, \quad u_i(t_{i-1}) = u_i.$$

Алгоритм. 2. Вспомогательная задача. Постановка.

Задача: найти **стационарные точки** функционала

$$I(x(\cdot), u(\cdot)) = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \left[\frac{\|x(t) - y^\delta(t)\|^2}{2} - \frac{\alpha^2 \|u(t)\|^2}{2} \right] dt, \qquad (8)$$

на множестве пар функций $x(\cdot), u(\cdot)$, удовлетворяющих условиям 1,2.

α — малый регуляризатор.

[1] *Tikhonov A. N.* (1963) Solution of Incorrectly Formulated Problems and the Regularization Method. Soviet Mathematics Doklady, 4, 1035-1038.

Алгоритм. 2. Вспомогательная задача. Условия стационарности.

Лагранжиан задачи:

$$L(x,u,\dot{x},\lambda,t) = \frac{\|x-y^\delta(t)\|^2}{2} - \frac{\alpha^2\|u\|^2}{2} + \langle \lambda^T, \dot{x} - G(x,t)u - f(x,t)\rangle \tag{9}$$

где λ — вектор множителей Лагранжа. **Уравнения Эйлера**:

$$\begin{gathered}\dot{\lambda}_l(t) - (x_l(t) - y_l^\delta(t)) \\ + \sum_{j=1}^{n}\left[\lambda_j(t)\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_l}(t,x(t))u_k(t) + \frac{\partial f_j}{\partial x_l}(t,x(t))\right] = 0, \\ l = 1,\dots,n, \\ \alpha^2 u_h(t) + \sum_{j=1}^{n}\left[\lambda_j(t) g_{jh}(t,x(t))\right] = 0, \quad h = 1,\dots,m.\end{gathered} \tag{10}$$

Последние m уравнений дают выражение $u(t)$ через $\lambda(t)$:

$$u(t) = -\frac{1}{\alpha^2}G^T(t,x(t))\lambda(t). \tag{11}$$

Алгоритм. 2. Вспомогательная задача. Условия стационарности.

Получаем **гамильтонову систему уравнений**:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_i(t) &= -\,\alpha^{-2} G(t, x_i(t)) G^T(t, x_i(t)) s_i(t) + f(t, x_i(t)),\\
\dot{s}_{i,l}(t) &= x_{i,l}(t) - y_l^\delta(t) + \frac{1}{\alpha^2} s_i^\top(t) \frac{\partial G}{\partial x_{i,l}}(t, x_i(t)) G^T(t, x_i(t)) s_i(t)\\
&\qquad + s_i(t)^\top \frac{\partial f}{\partial x_{i,l}}(t, x_i(t)),\ \ l = 1, \ldots, n,\\
&\qquad t \in [t_{i-1}, t_i],\\
&\qquad x_i(t_{i-1}) = y_{i-1}^\delta, \quad s_i(t_{i-1}) = s_{i-1}(t_{i-1}).
\end{aligned}
\tag{12}
$$

где $s_i(\cdot) = \lambda_i(\cdot)$ — вектор **сопряженных переменных**, соответствующий i-ому шагу, а

$$
u_i(t) = -\alpha^{-2} G^T(t, x_i(t)) s_i(t).
$$

Алгоритм. 2. Вспомогательная задача. Линеаризация.

Линеаризуем систему (12):

$$\begin{gathered}\dot{x}_i(t) = -\alpha^{-2} G_i G_i^\top s_i(t) + f_i,\\ \dot{s}_i(t) = x_i(t) - y^\delta(t),\\ t \in [t_{i-1}, t_i],\end{gathered} \tag{13}$$

где $G_i = G(t_{i-1}, y^\delta_{i-1})$, $f_i = f(t_{i-1}, y^\delta_{i-1})$ — "замороженные" коэффициенты из динамики (1).

Краевые условия:

$$\begin{aligned} i = 1: &\quad x_1(0) = y_0^\delta, \quad s_1(0) = 0,\\ i = 2, \dots, N: &\quad x_i(t_{i-1}) = y^\delta_{i-1}, \quad s_i(t_{i-1}) = s_{i-1}(t_{i-1}).\end{aligned} \tag{14}$$

Свойства вспомогательных конструкций.

Общий вид линеаризованных систем, которые решаются на каждом шаге алгоритма:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -\alpha^{-2} Q s(t) + f, \\ \dot{s}(t) &= x(t) - y^{\delta}(t), \end{aligned} \tag{15}$$

где

$$Q = GG^T$$

положительно-определенная матрица (Предположение 3).

Но тогда собственные значения матрицы (15) будут **чисто мнимые**!

[13] *Neudecker H., Magnus J.R.* Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics, Third Edition. John Wiley & Sons Ltd (2019) DOI:10.1002/9781119541219

Свойства вспомогательных конструкций.

Показано, что решения (13) удовлетворяют оценкам

$$\|x(t) - y^\delta(t)\| \leq \alpha\Big(C_1 + C_2\frac{\delta}{h^\delta} + C_3\frac{\alpha}{(h^\delta)^2} + C_4\alpha h^\delta\left(\frac{\alpha}{(h^\delta)^2}\right)^2\Big),$$

$$\|s(t)\| \leq \alpha^2\Big(C_5 + C_6\frac{\delta}{h^\delta} + C_7\frac{\alpha}{(h^\delta)^2} + C_8\alpha h^\delta\left(\frac{\alpha}{(h^\delta)^2}\right)^2\Big),$$

$$t \in [t_{i-1}, t_i], \quad i = 1, \ldots, N,$$

где константы $C_1, \ldots, C_6$ зависят от свойств функций $G(t, x)$ и $f(t, x)$ из динамики (1).

[16] *Субботина Н.Н, Крупенников Е.А.* Слабые со звездой аппроксимации решения задачи динамической реконструкции // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27, № 2. С. 208-220.

Алгоритм. 2. Вспомогательные управления.

Строятся вспомогательные функции

$$\tilde{u}^{\delta}(t) = u_i^{\delta}(t) = -\frac{1}{\alpha^2} G_i^{\top} s_i(t), \quad t \in [t_{i-1}, t_i], \quad i \in 1, \ldots, N, \tag{16}$$

где $s_i(t)$ — решение (13),(14), построенное на i-ом шаге.

Свойства вспомогательных управлений.

Показано, что траектории $\tilde{x}^\delta(\cdot)$ системы (1), порождаемые вспомогательными управлениями, удовлетворяют оценкам

$$\|\tilde{x}^\delta(t) - x^*(t)\| \leq \underbrace{h^\delta C_7 e^{C_8 T}}_{\|\tilde{x}^\delta(t) - x(t)\| \leq}$$

$$+ \underbrace{\alpha\left(C_1 + C_2 \frac{\delta}{h^\delta} + C_3 \frac{\alpha}{(h^\delta)^2} + C_4 \alpha h^\delta \left(\frac{\alpha}{(h^\delta)^2}\right)^2\right)}_{\|x(t) - y^\delta(t)\| \leq} + \underbrace{14(\delta + h^\delta K)}_{\|y^\delta(t) - x^*(t)\| \leq},$$

$$t \in [t_{i-1}, t_i], \quad i = 1, \ldots, N,$$

где константы C_7, C_8 зависят от свойств функций $G(t,x)$ и $f(t,x)$ из динамики (1).

[17] *Субботина Н.Н., Крупенников Е.А.* Слабое со звездой решение задачи динамической реконструкции // Труды Математического института им. В.А.Стеклова РАН, 315. 2021. С. 247–260.

Свойства вспомогательных управлений.

Лемма 1

Если выполнены предположения *1–4*, и параметры $\delta \le \delta_0,\ h^\delta \le h_0,\ \alpha$ стремятся к нулю **согласованно**

$$\frac{\delta}{h^\delta} \xrightarrow{\delta\to 0} 0, \quad \frac{\alpha}{(h^\delta)^2} \xrightarrow{\delta\to 0} K_0 > 0, \tag{17}$$

то функции $\tilde{u}^\delta(t)$ (16)

1. Равномерно по $\delta \le \delta_0,\ h^\delta \le h_0,\ \alpha$ ограничены.
2. Порождаемые ими траектории $\tilde{x}^\delta(\cdot)$ равномерно сходятся к базовой.
3. Эти управления сходятся к нормальному в смысле условия (7).

Свойства вспомогательных управлений.

Вспомогательные управления удовлетворяют 2 и 3 условиям ЗДР.

Но первое условие ЗДР **не выполняется**, так как эти управления лишь ограничены, но не гарантируется, что они укладываются в известные геометрические ограничения на управления $\mathbf{U}$!

Алгоритм. 3. Усреднение вспомогательных управлений.

Функции (16) **усредняются** на каждом шаге:

Усредненные управления

$$\bar{u}_i^\delta = \frac{1}{h^\delta} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \tilde{u}_i^\delta(\tau) d\tau. \tag{18}$$

Алгоритм. 3. Срезка усредненных управлений.

Усредненные управления (18) "срезаются":

"срезка"управлений

$$\hat{u}_i^\delta(t) = \begin{cases} \bar{u}_i^\delta, \ \bar{u}_i^\delta \in \mathrm{co}\mathbf{U} \\ \hat{u} \in \mathrm{co}\mathbf{U} : \ \|\hat{u} - \bar{u}_k^{\alpha,\delta}\| = \min\limits_{u \in \mathrm{co}\mathbf{U}} \|u - \bar{u}_i^\delta\|, \ \bar{u}_i^\delta \notin \mathrm{co}\mathbf{U} \end{cases},$$

$$t \in [t_{i-1}, t_i], \quad k = 1, \ldots, N. \tag{19}$$

Свойства срезанных управлений

Доказано, что срезанные управления (19) и порождаемые ими траектории $\hat{x}^\delta(\cdot)$ удовлетворяют оценкам

$$\|\hat{u}^\delta(t) - u^*(t)\| \le K_1\delta + K_2 e^{K_3 T} h^\delta + K_4 \frac{\alpha}{(h^\delta)^2} + \frac{o_t(h^\delta)}{h^\delta},$$

$$\|\hat{x}^\delta(t) - x^*(t)\| \le e^{K_5 T}\left(K_6\delta + K_7 h^\delta + K_1\delta + K_2 e^{K_3 T} h^\delta + K_4 \frac{\alpha}{(h^\delta)^2}\right),$$

$$t \in [t_{i-1}, t_i], \quad i = 1, \ldots, N,$$

где константы $K_1, \ldots, K_7$ зависят от свойств функций $G(t,x)$ и $f(t,x)$ из динамики (1).

Свойства срезанных управлений

Лемма 2

Если множество U, ограничивающее допустимые управления, выпукло.
Если выполнены предположения *1–4*, и параметры $\delta \le \delta_0,\ h^\delta \le h_0,\ \alpha$ стремятся к нулю **согласованно**

$$\frac{\delta}{h^\delta} \xrightarrow{\delta \to 0} 0, \qquad \frac{\alpha}{(h^\delta)^2} \xrightarrow{\delta \to 0} K_0 > 0, \tag{20}$$

то срезанные управления $\hat{u}^\delta(t)$ (19) удовлетворяют условиям

1. Удовлетворяют известным геометрическим ограничениям на управления (5)
2. Порождаемые ими траектории равномерно сходятся к базовой.
3. Они сходятся почти всюду к нормальному управлению:

Свойства срезанных управлений

Лемма 2 гарантирует, что срезанные управления являются допустимыми (в частности, удовлетворяют геометрическим ограничениям (5)) **только в случае выпуклости этих ограничений**.

Алгоритм. 6. Построение решения ЗДР.

Рассмотрим невыпуклые множества $\mathbf{U}$ со следующей структурой:

$$\mathbf{U} = \{u \in R^m : \ u_j \in \{\overline{U}_j, \underline{U}_j\}, \quad j = 1, \ldots, m\}. \tag{21}$$

Иначе говоря, пусть множество $\mathbf{U}$ **состоит из вершин m-мерного прямоугольника**.

Алгоритм. 6. Построение решения ЗДР.

На каждом шаге срезанная функция "разбивается"на две части:

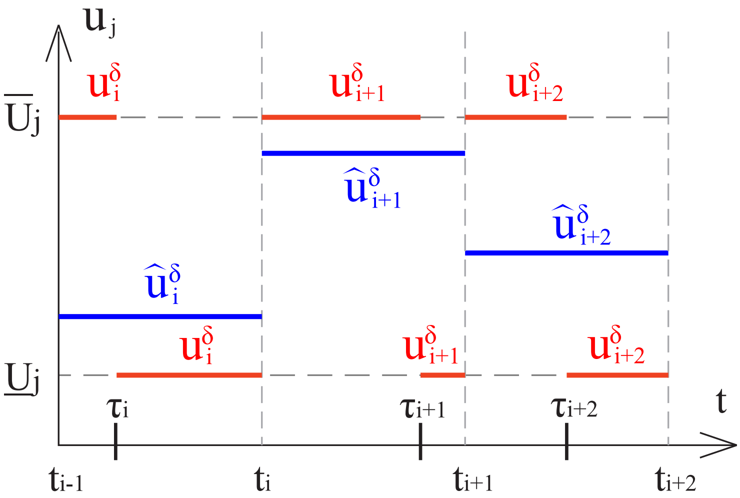
Аппроксимирующие управления

$$u_{i,j}^{\delta}(t) = \begin{cases} \overline{U}_j, & t \in [t_{i-1}, \tau_i] \\ \underline{U}_j, & t \in (\tau_i, t_i] \end{cases}, \quad \tau_i = t_i - \frac{h^{\delta}(\overline{U}_j - \hat{u}_{i,j}^{\delta})}{\overline{U}_j - \underline{U}_j}, \tag{22}$$

$$t \in [t_{i-1}, t_i], \quad i = 1, \ldots, N.$$

Алгоритм. 6. Построение решения ЗДР.

$$\hat{u}^{\delta}_{i,j} = (t_{i+1} - \tau_{i+1})\underline{U}_j + (\tau_{i+1} - t_i)\overline{U}_j$$



Свойства аппроксимирующих управлений.

Показано, что аппроксимирующие управления (22) удовлетворяют оценкам

$$\int_0^T \langle \varphi(t), u^\delta(t) - \hat{u}^\delta \rangle dt \leq C_9\, \omega_\varphi(h^\delta).$$

где $\omega_\varphi(\cdot)$ — модуль непрерывности "пробной" функции $\varphi(\cdot)$, а

$$C_9 = 2T\sqrt{m} \max_{u \in \mathbf{U}} \|u\|.$$

Главный результат. Сходимость алгоритма.

Теорема

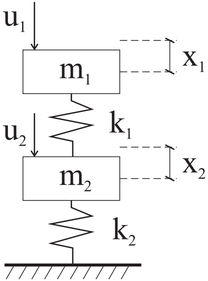
Если множество $\mathbf{U}$ имеет структуру (21), выполняются предположения *1–4*, а параметры $\delta \le \delta_0$, $h^\delta \le h_0$, α стремятся к нулю **согласованно**

$$\frac{\delta}{h^\delta} \xrightarrow{\delta \to 0} 0, \quad \frac{\alpha}{(h^\delta)^2} \xrightarrow{\delta \to 0} K_0 > 0, \tag{23}$$

то аппроксимирующие управления $u^\delta(t)$ (22) удовлетворяют условиям ЗДР.

Пример. Модель.

Модель динамического демпфера машины [14]



$x_1, \ x_2$ — **отклонения** пружин,
$k_1, \ k_2$ — **коэффициенты жесткости** пружин, $u_1, \ u_2$ — внешнее воздействие.

[14] *R.F. Gabasov, F.M. Kirillova, Vo Thi Thanh Ha* Optimal real-time control of multidimensional dynamic plant, Autom Remote Control 76 (2015) 98–110.

Пример. Модель.

Модель динамического демпфера машины [14].

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx_1(t)}{dt} \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix},$$

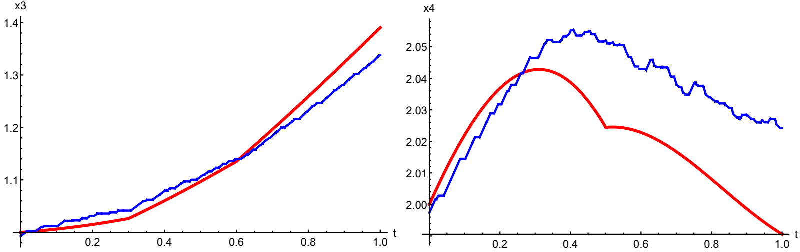
$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx_3(t)}{dt} \\ \dfrac{dx_4(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{x_1(t)}{m_1} + \dfrac{x_2(t)}{m_1} & 0 & \dfrac{1}{m_1} & 0 \\ \dfrac{x_1(t)}{m_2} - \dfrac{x_2(t)}{m_2} & -\dfrac{x_2(t)}{m_1} & 0 & \dfrac{1}{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1(t) \\ k_2(t) \\ u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix},$$

$$t \in [0,1],\ k_1(t) \in \{0, 0.5\},\ k_2(t) \in \{0, 0.8\},\ u_1 \in \{0,1\},\ u_2 \in \{0,1\}.$$

$x_1,\ x_2$ — **отклонения** пружин, $k_1,\ k_2$ — **коэффициенты жесткости** пружин, $u_1,\ u_2$ — **внешние силы**.

Пример. Восстановленные траектории 1.

$$\delta = 0.01,\ h^{\delta} = 0.02,\ (N = 50),\ \alpha = 0.01$$

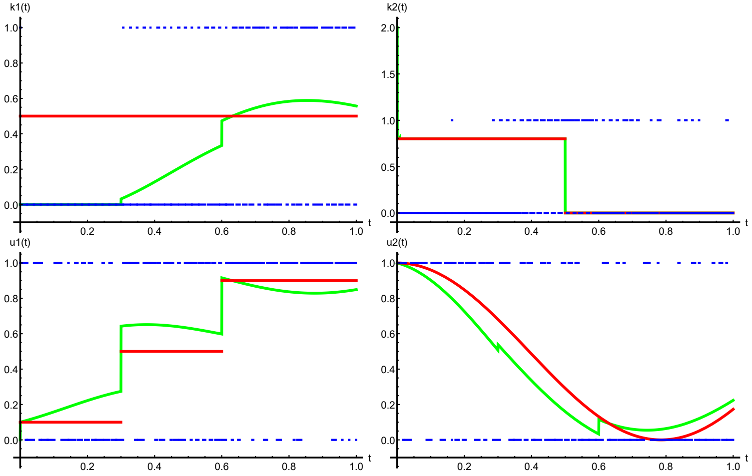


the basic trajectory

the reconstructed trajectory

Пример. Восстановленные управления 1.

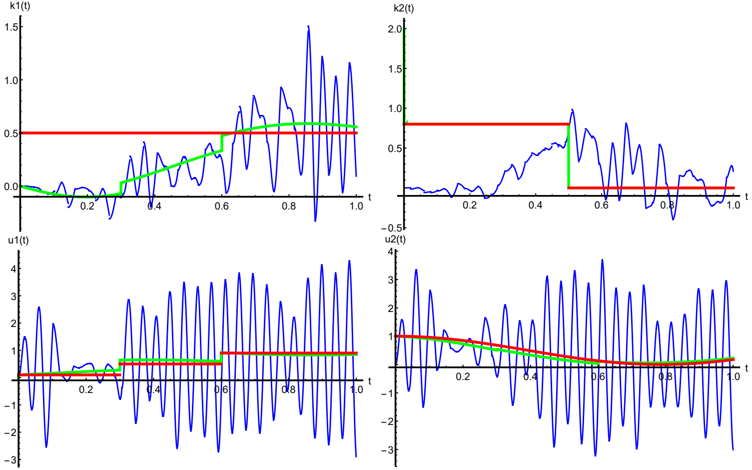
$$\delta = 0.01,\ h^{\delta} = 0.02,\ (N = 50),\ \alpha = 0.01$$



applied controls approximating controls the normal control

Пример. Вспомогательные управления 1.

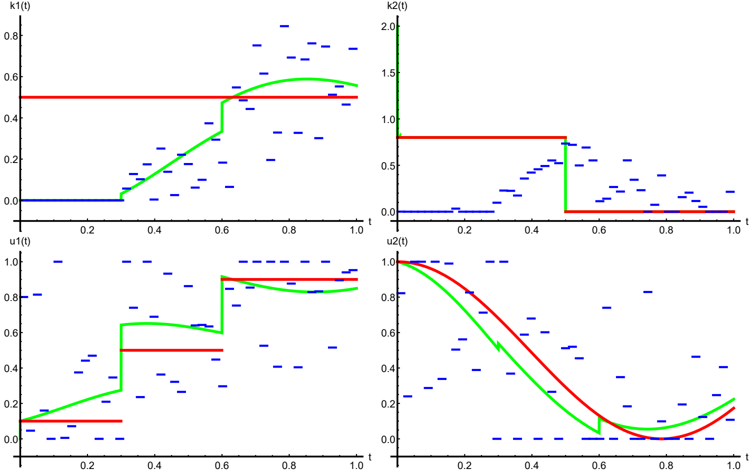
$$\delta = 0.01,\ h^{\delta} = 0.02,\ (N = 50),\ \alpha = 0.01$$



applied controls approximating controls the normal control

Пример. Обрезанные (усредненные) управления 1.

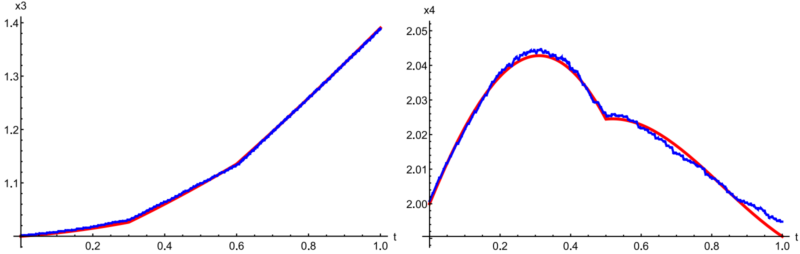
$$\delta = 0.01,\ h^{\delta} = 0.02,\ (N = 50),\ \alpha = 0.01$$



applied controls approximating controls the normal control

Пример. Восстановленные траектории 2.

$$\delta = 0.001,\ h^{\delta} = 0.01,\ (N = 100),\ \alpha = 0.0005$$

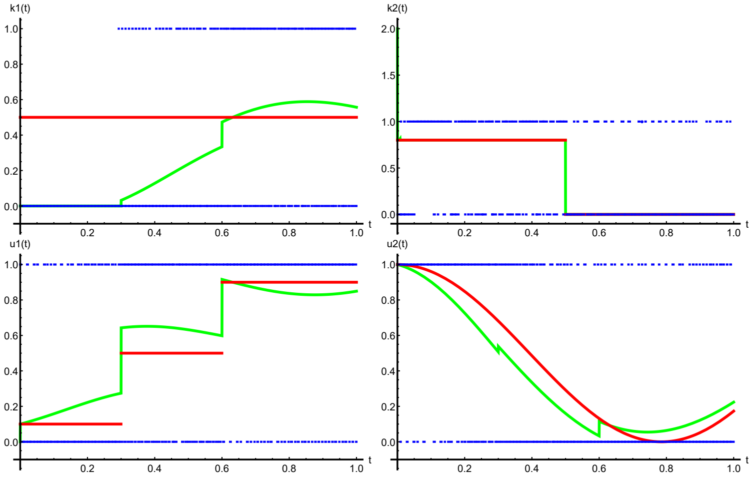


the basic trajectory $x^*(t)$

the reconstructed trajectory $\check{x}^{\delta}(t)$

Пример. Восстановленные управления 2.

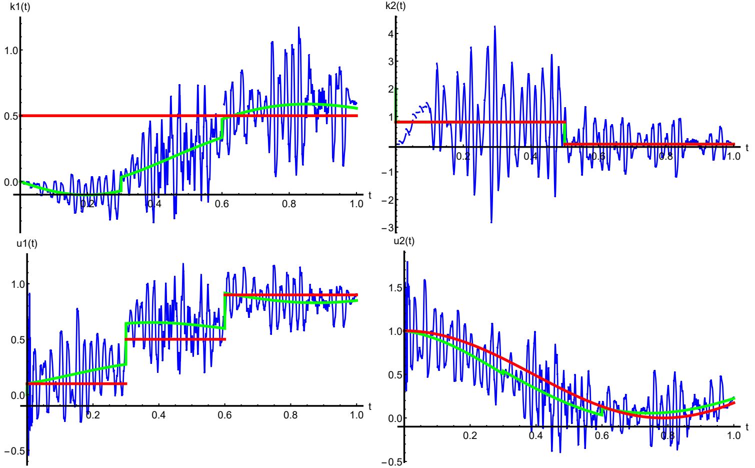
$$\delta = 0.001,\ h^{\delta} = 0.01,\ (N = 100),\ \alpha = 0.0005$$



applied controls approximating controls the normal control

Пример. Вспомогательные управления 2.

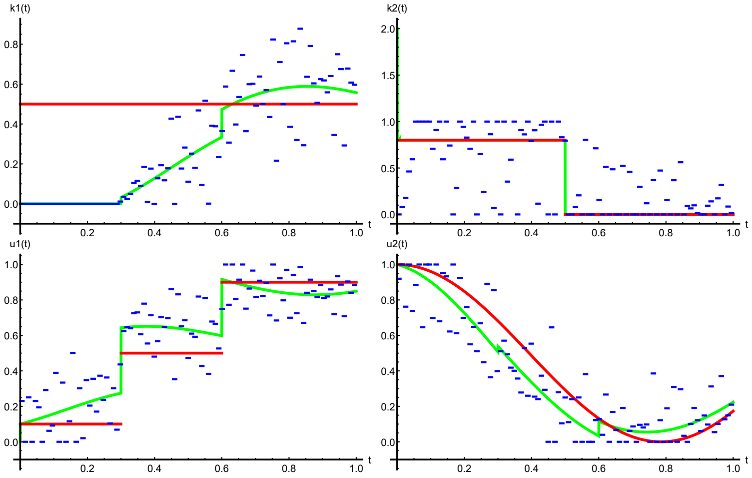
$$\delta = 0.001,\ h^{\delta} = 0.01,\ (N = 100),\ \alpha = 0.0005$$



applied controls approximating controls the normal control

Пример. Обрезанные (усредненные) управления 2.

$$\delta = 0.001,\ h^{\delta} = 0.01,\ (N = 100),\ \alpha = 0.0005$$



applied controls approximating controls the normal control

References I

Tikhonov A. N. (1963) Solution of Incorrectly Formulated Problems and the Regularization Method. Soviet Mathematics Doklady, 4, 1035-1038.

Гамкрелидзе Р.В. Основы оптимального управления. Изд-во Тбилисского ун-та, Тбилиси. 1975 . 230 с.

Warga J. Optimal Control of Differential and Functional Equations. Academic Press. 1972. 546 с.

Krasovskii N. N., Subbotin A. I. Game-theoretical control problems. New York: Springer, 1987. 517 p.

Kryazhimskij A. V., Osipov Yu. S. Modelling of a control in a dynamic system. // Eng. Cybern. № 21(2). 1983 P. 38–47.

Osipov Yu. S., Kryazhimskii A. V., Maksimov V. I. Some algorithms for the dynamic reconstruction of inputs. P. Steklov Inst. Math. (2011) doi: 10.1134/S0081543811090082 .

Kabanikhin S. I., Krivorotko O. I. Identification of biological models described by systems of nonlinear differential equations // J. of Inverse and Ill-posed Problems. 2015. Vol. 23, N. 5. P. 519–527. doi: 10.1515/jiip-2015-0072 .

Liu Y. C., Chen Y. W., Wang Y. T., Chang J. R. A high-order Lie groups scheme for solving the recovery of external force in nonlinear system. // Inverse Problems in Science and Engineering. 2018. Vol. 26,№ 12. P. 1749–1783. doi: 10.1080/17415977.2018.1433669 .

Schmitt U., Louis A. K., Wolters C., Vauhkonen M. Efficient algorithms for the regularization of dynamic inverse problems: I. Theory. // Inverse Problems. 2002. Vol. 18, № 3. P. 659—676 doi: 10.1088/0266-5611/18/3/309 .

References II

- *D'Autilia M. C., Sgura I. and Bozzini B.* Parameter identification in ode models with oscillatory dynamics: a fourier regularization approach. // Inverse Problems 33. 2017. doi: 10.1088/1361-6420/aa9834 .
- *Schuster N., Burger M., Hahn B.* Dynamic inverse problems: modelling—regularization—numerics. Preface. // Inverse Problems. 2018. Vol. 34, article ID 040301. 4 p. doi: 10.1088/1361-6420/aab0f5 .
- *V.I. Utkin* Sliding regimes in problems of optimisation and control, Nauka, Moscow, 1981 [In Russian].
- *Neudecker H., Magnus J. R.* Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics. New Jersey: John Wiley & Sons Ltd, 2019. 472 p. doi:10.1002/9781119541219/,. ISBN: 9781119541202
- *R.F. Gabasov, F.M. Kirillova, Vo Thi Thanh Ha* Optimal real-time control of multidimensional dynamic plant, Autom Remote Control 76 (2015) 98–110.
- *Subbotina N. N., Krupennikov E. A.* Hamiltonian Systems for Dynamic Control Reconstruction Problems. // Minimax Theory and its Applications 05 (2020), No. 2, pp.439-454.
- *Субботина Н.Н, Крупенников Е.А.* Слабые со звездой аппроксимации решения задачи динамической реконструкции // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27, № 2. С. 208-220.
- *Субботина Н.Н, Крупенников Е.А.* Слабое со звездой решение задачи динамической реконструкции // Тр. Математического Института Им. В.А. Стеклова, 2021, т. 315. (в печати)

References III

Subbotina N.N., Krupennikov Variational Approach to Solving Control Reconstruction Problems // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2022. Vol. 43, No. 6. P. 1428–1437.

Subbotina N.N., Krupennikov On Inverse Problems for Mechanical Systems. Materials of 20th International Conference "Aviation and Cosmonautics". Springer Nature, 2022.

Thank you for your attention!

Спасибо за внимание!