

# Построение неевклидовых моделей сплошной среды



Михаил Гузев

Институт прикладной математики  
Дальневосточное отделение Российской академии наук  
г.Владивосток

## **Цитата лекции**

«Мы подобны карликам, усевшимся на плечах великанов; мы видим больше и дальше, чем они, не потому, что обладаем лучшим зрением, и не потому, что выше их, но потому, что они нас подняли и увеличили наш рост собственным величием...»

**Бернар Шартрский** (1070—1130) французский философ-платоник, представитель шартрской философской школы

(в изложении Иоанна Солсберийского (1120-1180) англо-французский богослов, схоластик, писатель, педагог, епископ Шартра.)

# Поле эффективной деформации по С. К. Годунову

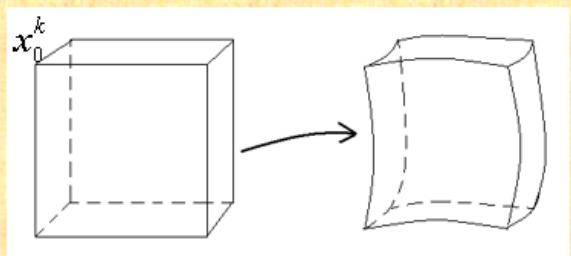


# Тензор эффективной упругой деформации

Линейная теория упругости:  $\sigma_{ij} = \left( \lambda + \frac{\pi^2}{\rho_0 \omega} \right) (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} + \frac{\pi}{\omega} (T - T_0) \delta_{ij}$

Измеряя  $\sigma_{ij}, T$  вычисляем  $\varepsilon_{ij}$  - тензор эффективной упругой деформации.

Восстановление метрики  $g_{ij} = \delta_{ij} - 2\varepsilon_{ij}$  по  $\sigma_{ij}, T$  - вычисление  $g_{ij}^{\text{ЭФФ}}$ .



В общем случае  $g_{ij}^{\text{ЭФФ}} \neq \frac{\partial x_0^k}{\partial x^i} \frac{\partial x_0^k}{\partial x^j} = G_{ij}$

**Нет евклидовой структуры**

## Характеристика неевклидовости

$$R_{lijq} = \frac{\partial}{\partial x^q} \Gamma_{ij,l} - \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma_{iq,l} - g^{ps} (\Gamma_{iq,s} \Gamma_{jl,p} - \Gamma_{ij,s} \Gamma_{ql,p}) \neq 0,$$

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g^{\text{ЭФФ}}_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g^{\text{ЭФФ}}_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g^{\text{ЭФФ}}_{ij}}{\partial x^k} \right], \quad g^{\text{ЭФФ}}_{ij} g^{kj} = \delta_i^k.$$

# Модель неевклидовых пластин

Классическая=Евклидова модель

$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad \sigma_{ij} n_j \Big|_{\partial V} = 0$       Теорема:       $\varepsilon_{ij} = 0$       stress-free configuration

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} I_1 + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad I_1 = \varepsilon_{jj},$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Non-Euclidean plates are a subset of the class of elastic bodies having no stress-free configuration. Such bodies exhibit residual stress when relaxed from all external

Journal of the Mechanics and Physics of Solids 57 (2009) 762–775

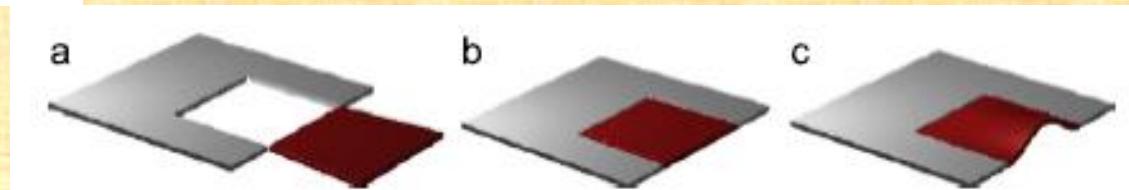
Contents lists available at ScienceDirect

Journal of the Mechanics and Physics of Solids

journal homepage: [www.elsevier.com/locate/jmps](http://www.elsevier.com/locate/jmps)

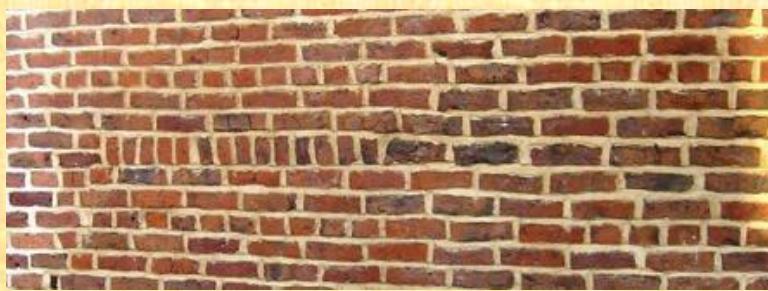
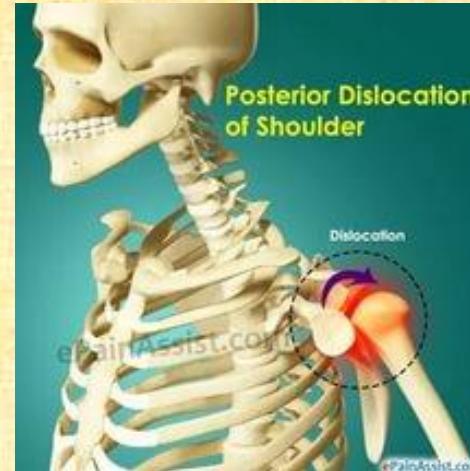
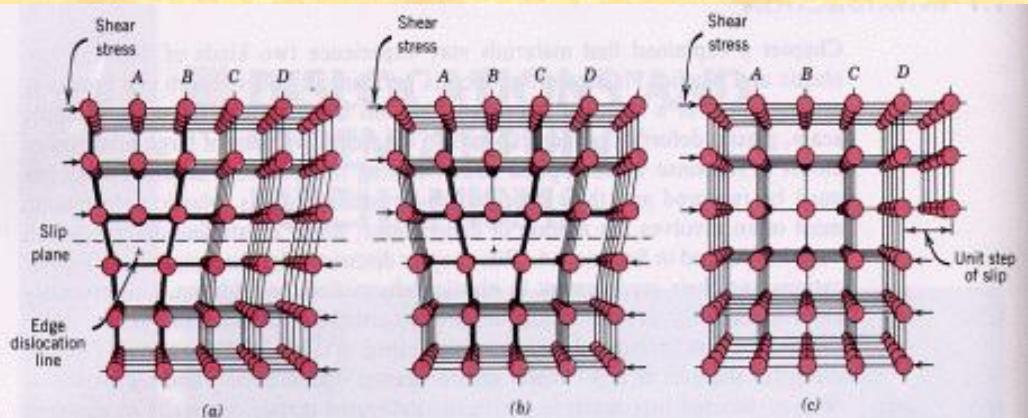
Elastic theory of unconstrained non-Euclidean plates

E. Efrati<sup>a</sup>, E. Sharon<sup>a,\*</sup>, R. Kupferman<sup>b</sup>



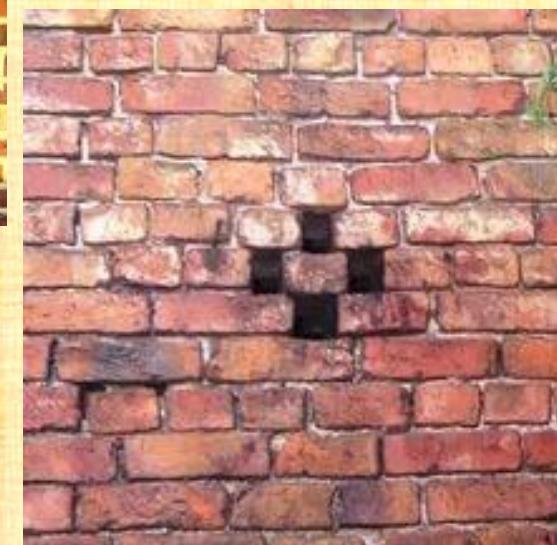
# Природа эффектов несовместности : дефекты

## Дислокации



Краевая дислокация

Наклонная дислокация



Точечные дефекты

6 июля 2012

14<sup>30</sup>

## НАУЧНЫЙ СЕМИНАР ИФПМ СО РАН

1. Академик Годунов С.К. «Термодинамически согласованная модель упругопластической среды и её приложение к задаче о сварке взрывом».
2. Академик Панин В.Е. «Физическая мезомеханика и неравновесная термодинамика деформируемого твёрдого тела как многоуровневой иерархически организованной системы».

Главный корпус института, конференц-зал.

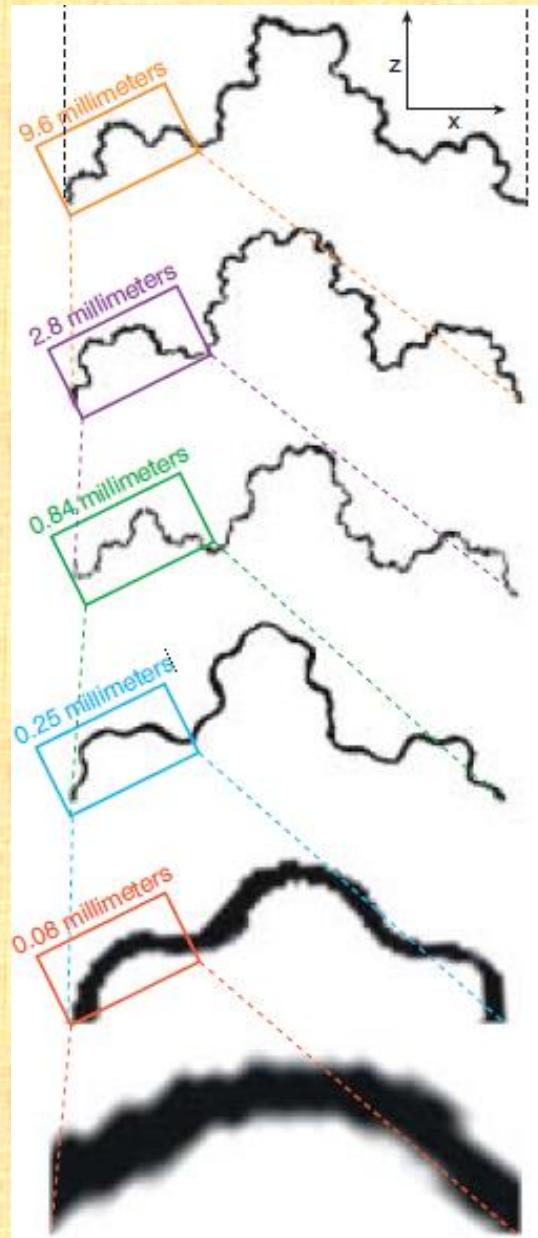


# Неевклидовые объекты вокруг нас

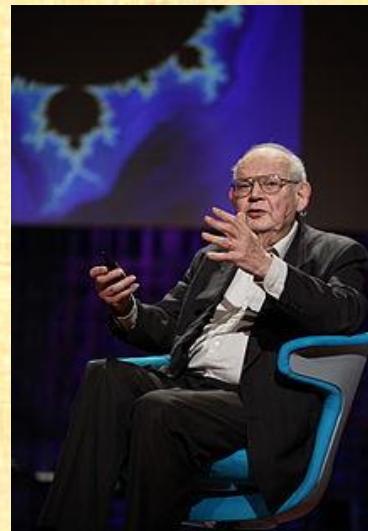
# Фрактальная геометрия



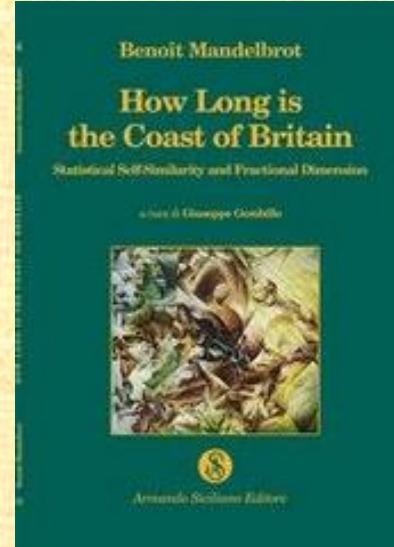
Разрыв тонкого  
полиэтиленового пакета



Buckling cascade



Benoit B. Mandelbrot



THE FRACTAL GEOMETRY OF NATURE  
Benoit B. Mandelbrot



## Неевклидовость при искусственном воздействии

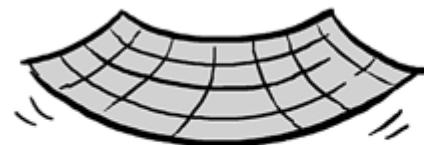


Изначально лист баклажана плоский, используется гормон для роста вблизи краев. Волны развились после 10 дней; на 12 и 14 дня волны увеличились, и волны внутри волн становятся заметными.

## Внутренняя геометрия листьев

Полосы, вырезанные из левого листа, показывают, что радиус дуг **увеличивается от центра.**

Радиус правого листа **уменьшается.**



POSITIVE CURVATURE



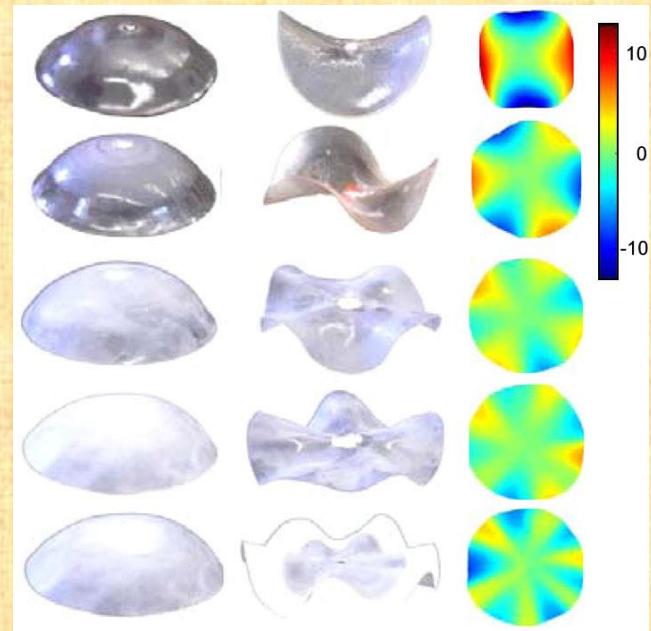
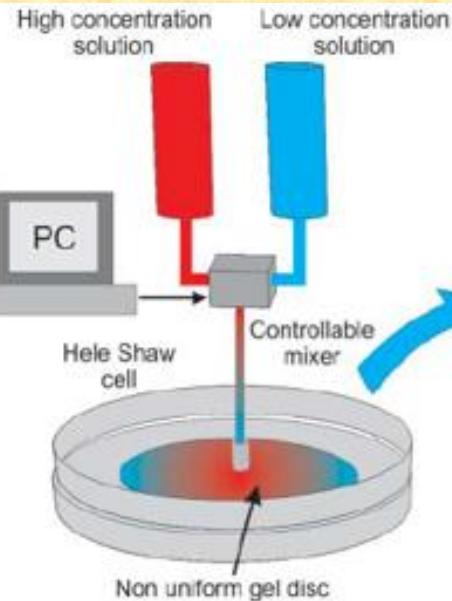
NEGATIVE CURVATURE

# Экспериментальный метод изготовления неевклидовых тел

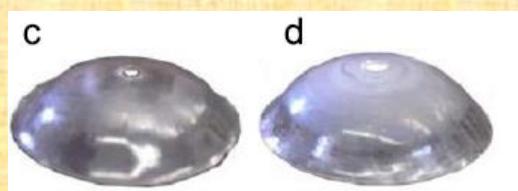
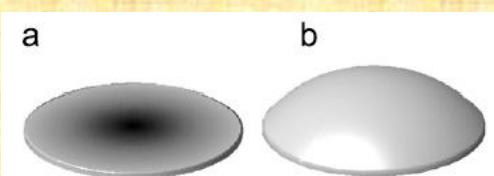
Yeal Klein, Efi Efrati, Eran Sharon

Shaping of Elastic Sheets by Prescription of non-Euclidean Metrics

Science vol 315 (2007) 1116-1120



## Неевклидовы пластины



Авторы использовали  
N-изопропилакриламид  
для построения листов.

Построенные листы плоские при  $T < T_c$ , но  
запрограммированы сжиматься  
дифференциально при активации в  $T > T_c$

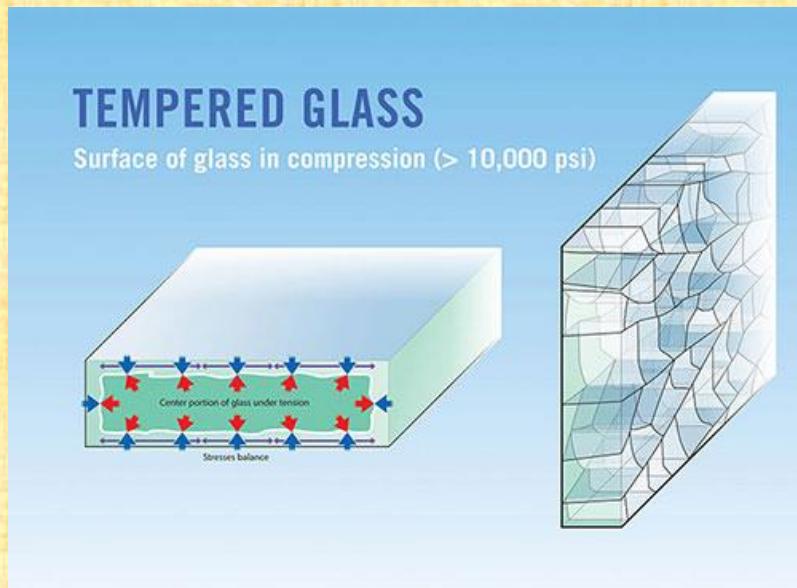
# Неевклидова природа закаленного стекла



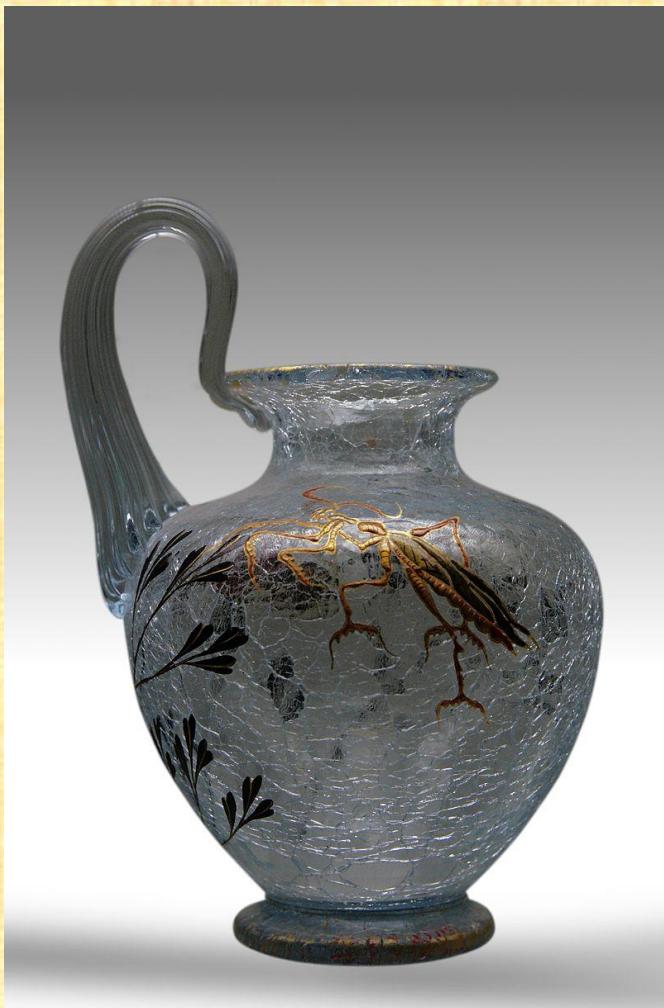
**Закаленное стекло - тип защитного стекла, имеющего большую прочность по сравнению с нормальным стеклом.**

**Закалка формирует напряженное состояние поверхности.**

**Разбиваясь, такое стекло разрушается на множество мелких осколков с тупыми гранями, которые не способны причинить серьёзные травмы.**

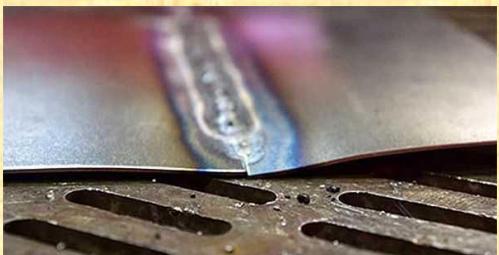


## Применение закаленного стекла

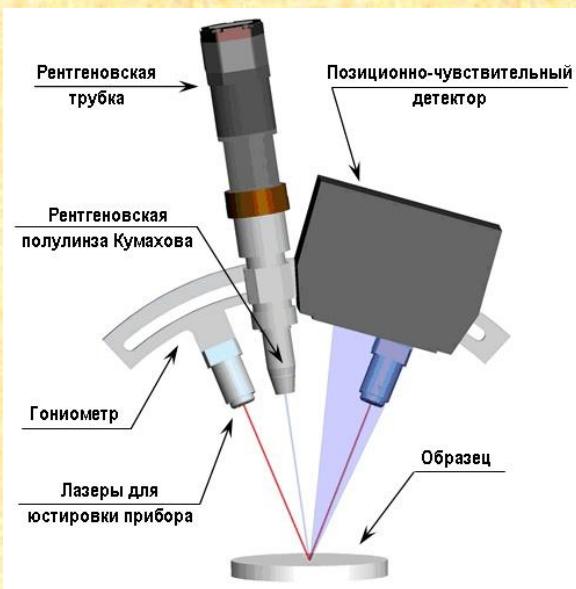
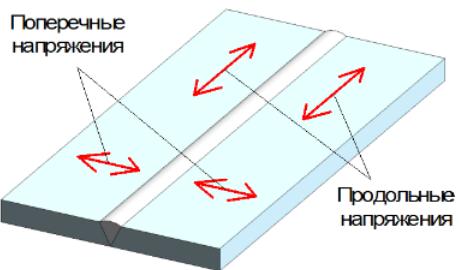


Стеклянная ваза с эффектом *craquelé*.  
Трещины - результат быстрого, но  
интенсивного воздействия, когда часть  
жидкости быстро погружается в воду.

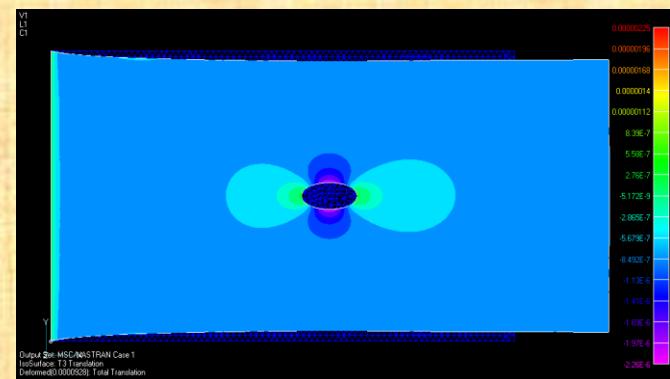
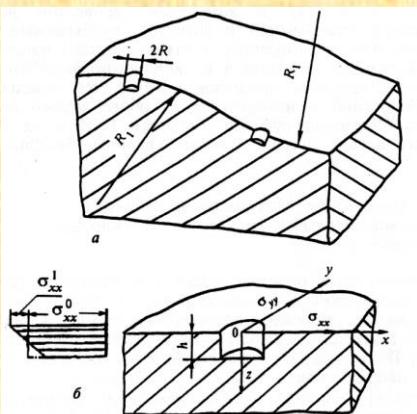
# Неевклидова природа напряжений в сварных конструкциях



## Остаточные напряжения



## Рентгеновский дифрактометр



Дифракционная картина  
при малых остаточных напряжениях

Дифракционная картина  
при наличии напряжений

# Неевклидова геометрия на кухне



Нагревание и последующее поджарка картофеля приводит к формам с гиперболической геометрией.

# Переход к неевклидовой модели по Кренеру



*Int. J. Solids Structures* Vol. 21, No. 7, pp. 747-756, 1985  
Printed in Great Britain.

0020-7683/85 \$3.00 + .00  
© 1985 Pergamon Press Ltd.

## INCOMPATIBILITY, DEFECTS, AND STRESS FUNCTIONS IN THE MECHANICS OF GENERALIZED CONTINUA

E. KRÖNER  
Institut für Theoretische und Angewandte Physik der Universität Stuttgart und Max-Planck-Institut für Metallforschung, Stuttgart

E. Kröner, Incompatibility, defects, and stress functions in the mechanics of generalized continua, International Journal of Solids and Structures, 21(7) (1985) 747-756

**Ekkehart Kröner:**

The most important device for that [transition] is  
the stress tensor function

# Функция напряжений Эйри

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x^1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x^2} = 0$$

AIRY, G. B. : On the strains in the interior of beams. Phil. Trans. Roy. Soc. London 153 (1863), 49--80.

Определяющие соотношения

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2 \partial x^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^1 \partial x^1}, \quad \sigma_{12} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^1 \partial x^2}$$

Условие совместности

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \lambda I_1 + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left[ \sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{\lambda \sigma}{3\lambda + 2\mu} \right], \quad \sigma = \sigma_{jj}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x^2 \partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x^1 \partial x^1} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x^1 \partial x^2} = 0$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i} \right)$$

$$\Delta \sigma = 0$$

$$\Delta \Delta \Phi = 0$$

# Функция напряжений Эйри неевклидовой модели

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x^1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x^2} = 0$$

Определяющие соотношения

Функция  
напряжений  
Эйри       $\Phi$

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \lambda I_1 + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left[ \sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{\lambda \sigma}{3\lambda + 2\mu} \right].$$

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2 \partial x^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^1 \partial x^1}, \quad \sigma_{12} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^1 \partial x^2}$$

Условие несовместности

$$\frac{R}{2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x^2 \partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x^1 \partial x^1} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x^1 \partial x^2}$$

“The simplicity of eq. makes the stress potential a most useful tool for incompatible strain problems.”

E. Kröner, 1985

$$\Delta\Delta\Phi = \frac{\mu}{1-\nu} R,$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

**Функция напряжений Эйри :**

**Classical+ non-Euclidean**

$$\Phi = \Phi_{clas} + \Phi_{non-Eucl}$$

$$\Delta\Delta\Phi_{clas} = 0, \quad \Delta\Delta\Phi_{non-Eucl} = \frac{\mu}{1-\nu} R$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij,clas} + \sigma_{ij,non-Eucl}$$

$$\sigma_{11,clas} = \frac{\partial^2 \Phi_{clas}}{\partial x^2 \partial x^2}, \quad \sigma_{22,clas} = \frac{\partial^2 \Phi_{clas}}{\partial x^1 \partial x^1}, \quad \sigma_{12,clas} = \frac{\partial^2 \Phi_{clas}}{\partial x^1 \partial x^2}$$

$$\sigma_{11,non-Eucl} = \frac{\partial^2 \Phi_{non-Eucl}}{\partial x^2 \partial x^2}, \quad \sigma_{22,non-Eucl} = \frac{\partial^2 \Phi_{non-Eucl}}{\partial x^1 \partial x^1}, \quad \sigma_{12,non-Eucl} = \frac{\partial^2 \Phi_{non-Eucl}}{\partial x^1 \partial x^2}$$

R ?

# Линейное приближение

Стационарное решение для скалярной кривизны  $\Delta^2 R = \gamma R$ ,  $\gamma > 0$ .

*Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, Vol. 42, No. 1, pp. 131–139, 2001

*Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, Vol. 52, No. 5, pp. 709–716, 2011

NON-EUCLIDEAN MODEL OF THE ZONAL DISINTEGRATION  
OF ROCKS AROUND AN UNDERGROUND WORKING

M. A. Guzev and A. A. Paroshin

STRUCTURE OF KINEMATIC AND FORCE FIELDS  
IN THE RIEMANNIAN CONTINUUM MODEL

M. A. Guzev

## Структура неевклидового вклада функции напряжений

$$\Delta\Delta\Phi_{non-Eucl} = \frac{\mu}{1-\nu} R, \quad \Phi_{non-Eucl} = \frac{R}{\gamma} .$$

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2(\Phi_{clas} + \Phi_{non-Eucl})}{\partial x^2 \partial x^2} = \sigma_{11,clas} + \sigma_{11,non-Eucl}, \quad \sigma_{11,non-Eucl} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial^2 R}{\partial x^2 \partial x^2},$$

$$\sigma_{22} = \frac{\partial^2(\Phi_{clas} + \Phi_{non-Eucl})}{\partial x^1 \partial x^1} = \sigma_{22,clas} + \sigma_{22,non-Eucl}, \quad \sigma_{22,non-Eucl} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial^2 R}{\partial x^1 \partial x^1},$$

$$\sigma_{12} = -\frac{\partial^2(\Phi_{clas} + \Phi_{non-Eucl})}{\partial x^1 \partial x^2} = \sigma_{12,clas} + \sigma_{12,non-Eucl}, \quad \sigma_{12,non-Eucl} = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial^2 R}{\partial x^1 \partial x^2}$$

## Полярные координаты

Безразмерная координата  $s = \sqrt[4]{\gamma} r$

$$R = R(s), \quad R = R_+ + R_-, \quad \frac{\partial^2 R_\pm}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial R_\pm}{\partial s} \pm R_\pm = 0$$

## Скалярная кривизна

$$R_+ = aJ_0(s) + bN_0(s), \quad R_- = cK_0(s) + dI_0(s)$$

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \sigma_{rr,clas} - a \frac{J_1(s)}{s} - b \frac{N_1(s)}{s} - c \frac{K_1(s)}{s} + d \frac{I_1(s)}{s}$$

## Компоненты

### напряжений :

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = \sigma_{\varphi\varphi,clas} + a \frac{J_1(s)}{s} + b \frac{N_1(s)}{s} + c \frac{K_1(s)}{s} - d \frac{I_1(s)}{s} -$$

$$- aJ_0(s) - bN_0(s) + cK_0(s) + dI_0(s)$$

$$\sigma_{rr,clas} = c_2 \ln s + \frac{c_1}{s^2} + c_2 + c_3, \quad \sigma_{\varphi\varphi,clas} = c_2 \ln s - \frac{c_1}{s^2} + \frac{3}{2}c_2 + c_3$$

## Asymptotic behavior at $s \rightarrow 0$

$$N_0(s) \sim \frac{2}{\pi} \ln s, \quad K_0(s) \sim -\ln s, \quad J_1(s) \sim \frac{s}{2}, \quad N_1(s) \sim \frac{s}{\pi} \ln s - \frac{2}{\pi s}, \quad K_1(s) \sim \frac{1}{s} + \frac{s}{2} \ln s, \quad I_1(s) \sim \frac{s}{2}$$

$\sigma_{rr}$  is finite       $\ln s : \quad c_2 - \frac{b}{\pi} - \frac{c}{2} = 0 \quad , \quad \frac{1}{s^2} : \quad c_1 + \frac{2b}{\pi} - c = 0$

$\sigma_{\varphi\varphi}$  is finite       $\ln s : \quad c_2 - \frac{c}{2} - \frac{b}{\pi} = 0 \quad , \quad \frac{1}{s^2} : \quad -c_1 - \frac{2b}{\pi} + c = 0$

$$c_2 = \frac{b}{\pi} + \frac{c}{2} \quad , \quad c_1 = -\frac{2b}{\pi} + c$$

Hidden parameters of the classical theory     $c_2$  ,     $c_1$

$$\sigma_{rr,clas} = c_2 \ln s + \frac{c_1}{s^2} + c_2 + c_3, \quad \sigma_{\varphi\varphi,clas} = c_2 \ln s - \frac{c_1}{s^2} + \frac{3}{2}c_2 + c_3$$

## Сравнение с экспериментальными измерениями для закаленного цилиндра

第 15 卷 第 3 期  
1994 年 9 月

# 金 属 热 处 理 学 报

TRANSACTIONS OF METAL HEAT TREATMENT

Vol. 15 No. 3  
September 1994

## 预测长圆柱体淬火残余应力的有限元方法

汪凌云 骆少明

**ABSTRACT** The finite element formula for calculating the internal stress and instantaneous temperature field is put forward on the basis of thermoelastoplastic constitution equation and heat conduction equation. The material parameters and its variation with temperature are determined by a series of tensile testing at different temperature, and the instantaneous internal stress and residual stress of 1Cr13 steel cylinder specimen during quenching are calculated as an example. The calculated results are in good agreement with the experimental results.

Wang, Lingyun;Luo, Shaoming.

## Finite element method predicting the residual stress of quenched long cylinder.

Jinshu Rechuli Xuebao.1994 (in Chinese).

doi : 10.13289/j.issn.1009-6264.1994.03.005

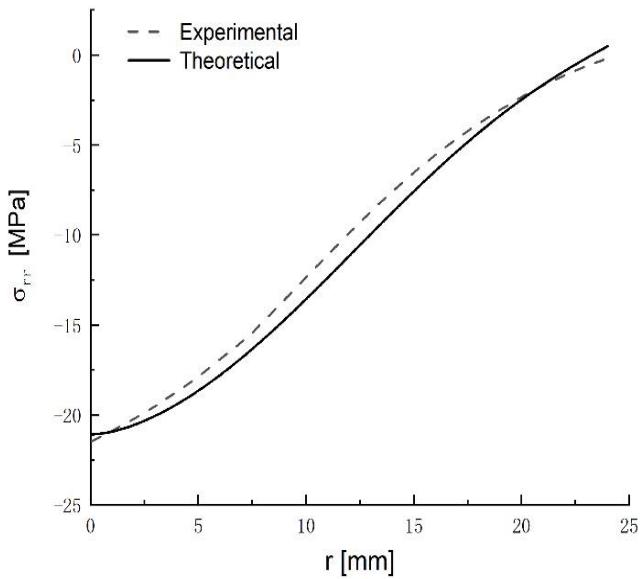
$$\sigma_{rr} = 2C_2 \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) + \frac{C_1}{s^2} + C_2 + 2C_3 - \frac{a}{s} J_1(s) - \frac{b}{s} N_1(s) - \frac{c}{s} K_1(s) + \frac{d}{s} I_1(s),$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\varphi\varphi} = & 2C_2 \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) - \frac{C_1}{s^2} + 3C_2 + 2C_3 + \frac{a}{s} J_1(s) + \frac{b}{s} N_1(s) + \frac{c}{s} K_1(s) - \frac{d}{s} I_1(s) \\ & - aJ_0(s) - bN_0(s) + cK_0(s) + dI_0(s)\end{aligned}$$

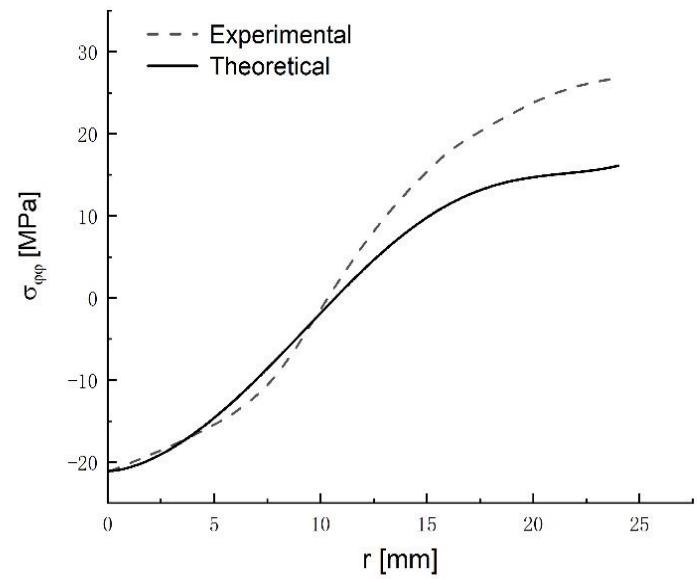
$$s = \sqrt[4]{\gamma}x, C_1 = -\frac{2b}{\pi} + c, 2C_2 = \frac{b}{\pi} + \frac{c}{2}$$

$$a = 11.22 \text{ MPa}, \quad b = 10.46 \text{ MPa}, \quad c = 16.97 \text{ MPa}, \quad d = 0.1 \text{ MPa}, \quad C_3 = -7.55 \text{ MPa}, \quad \sqrt[4]{\gamma} = 0.25 \frac{1}{mm}$$

# Результаты



Радиальное напряжение



Касательное напряжение

# Экспериментальные результаты для пластины с дыркой

Materials Science Forum Vols 490-491 (2005) pp 41-46

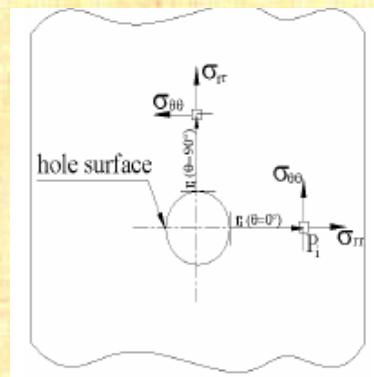
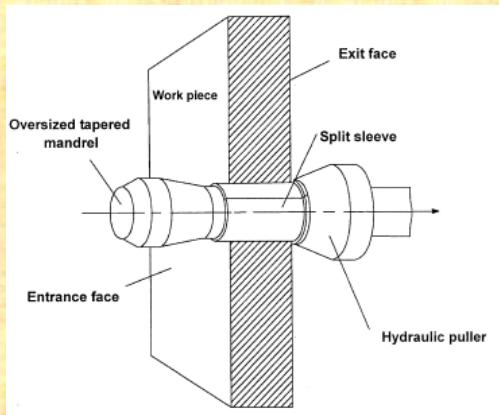
© (2005) Trans Tech Publications, Switzerland

doi:10.4028/www.scientific.net/MSF.490-491.41

Online: 2005-07-15

## Residual Stresses Around an Expanded Hole in an Aluminum Clad Sheet

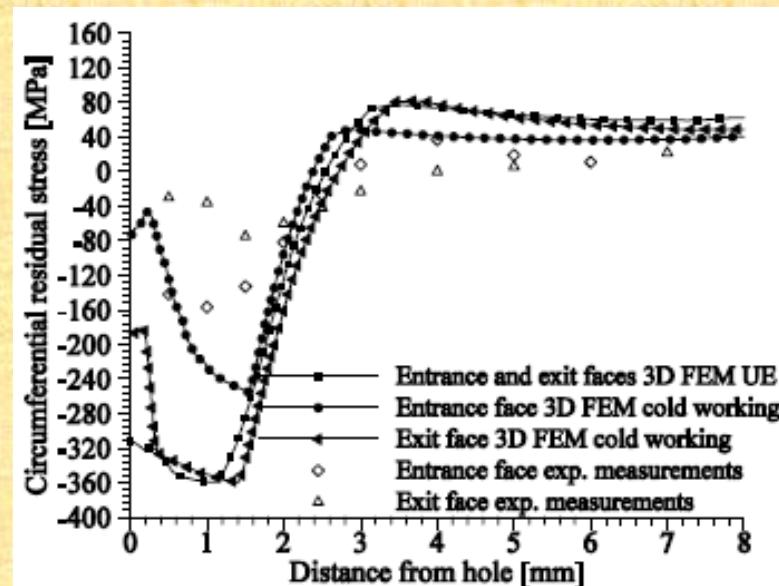
P. Matos<sup>1,a</sup>, P. Moreira<sup>1,b</sup>, J. Pina<sup>2,c</sup>, A.M. Dias<sup>3,d</sup> and P.M.S.T. de Castro<sup>1,e</sup>



Rectangular plate    280mm × 25mm × 2mm

Diameter of 4.83mm

The authors note:  
"The results disagree for  
distances in the vicinity  
of the hole"



## Формулы для моделирования

$$\sigma_{rr} = C_0 - \frac{a}{s} J_1(s) - \frac{b}{s} N_1(s) + d \frac{I_1(s)}{s},$$

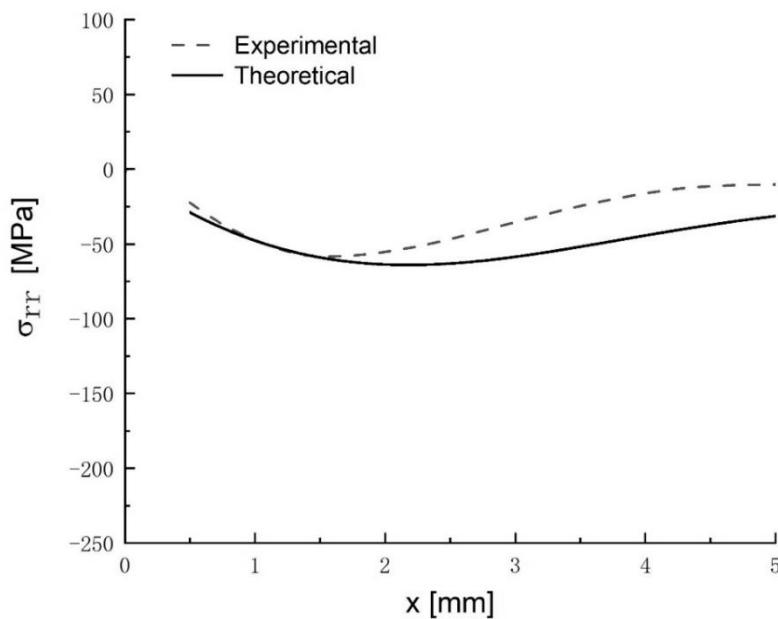
## Радиальное напряжение

$$\sigma_{\varphi\varphi} = C_0 + \frac{a}{s} J_1(s) + \frac{b}{s} N_1(s) - d \frac{I_1(s)}{s} - a J_0(s) - b N_0(s) + d I_0(s)$$

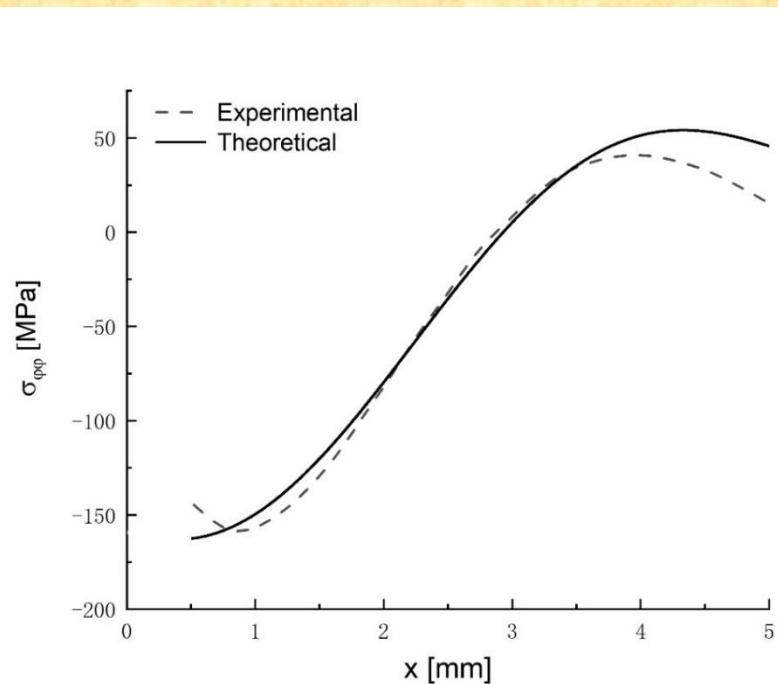
## Касательное напряжение

$$s = \sqrt[4]{\gamma} (r_{hole} + x) \quad \quad \sqrt[4]{\gamma} = 0.95 \frac{1}{mm}$$

$$a = -194.5 \text{ MPa}, b = 160.4 \text{ MPa}, d = 0.24 \text{ MPa},$$



## Радиальное напряжение



## Касательное напряжение

# Остаточные напряжения в прямоугольных образцах

Residual Stresses 2018 – ECRS-10

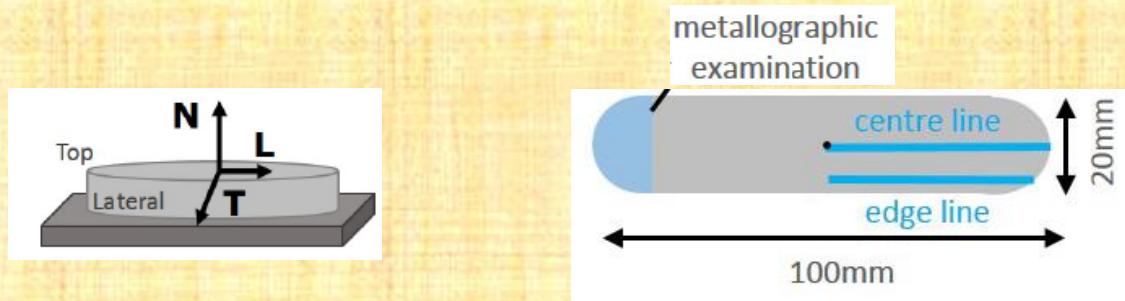
Materials Research Proceedings 6 (2018) 259-264

Materials Research Forum LLC

doi: <http://dx.doi.org/10.21741/9781945291890-41>

## Residual Stresses in Selective Laser Melted Samples of a Nickel Based Superalloy

Arne Kromm<sup>1,a,\*</sup>, Sandra Cabeza<sup>2,b</sup>, Tatiana Mishurova<sup>1,c</sup>, Naresh Nadammal<sup>1,d</sup>  
Tobias Thiede<sup>1,e</sup> and Giovanni Bruno<sup>1,f</sup>



*Schematic of the sample with measuring lines located in the centre and along the edge*

Additive manufacturing (AM) offers the opportunity to produce geometrically complex parts compared to the traditional production technologies. An important AM technology for metals is selective laser melting (SLM). However, residual stresses that arise during the process may limit the application of SLM parts.

For the residual stress analysis, X-ray, synchrotron and neutron diffraction methods were used.

# Формулы для моделирования

## Скалярная кривизна

$$(\Delta + \sqrt{\gamma})R_+ = 0, (\Delta - \sqrt{\gamma})R_- = 0$$

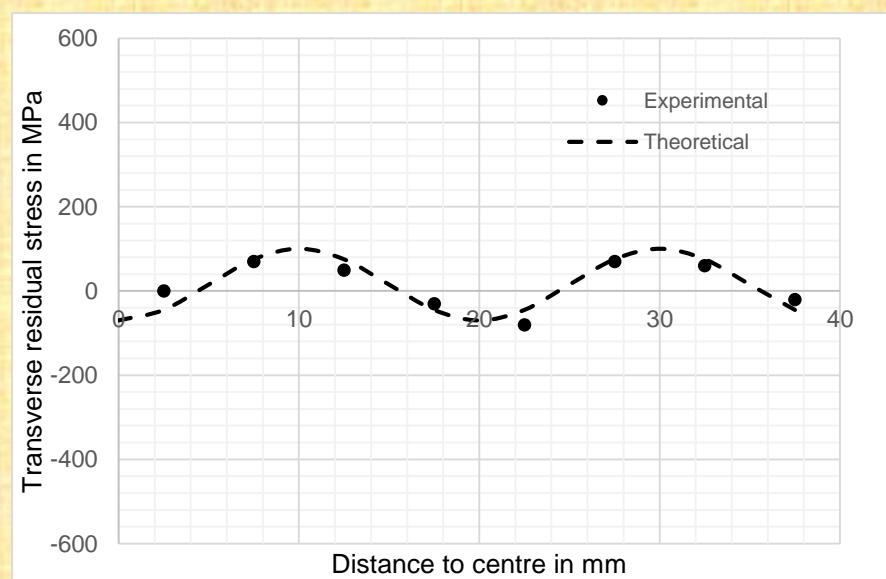
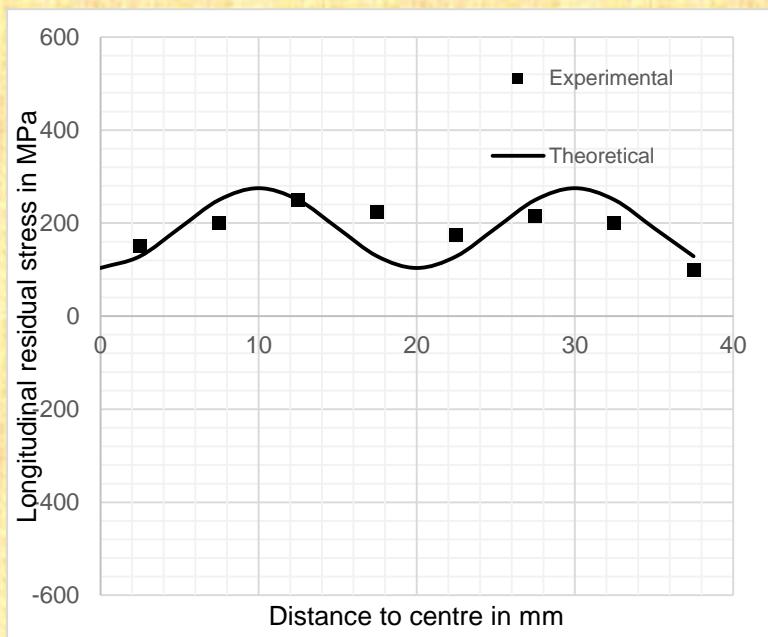
$$R = R_+ + R_- \quad R_- = 0 \quad R_+ = a\gamma \cos \omega_1 x^1 \cos \omega_2 x^2$$

## Напряжения

$$\sigma_{11}(x^1) = \sigma_{11,clas} - a[\sqrt{\gamma} - \omega_1^2] \cos \omega_1 x^1, \quad \sigma_{22}(x^1) = \sigma_{22,clas} - a\omega_1^2 \cos \omega_1 x^1$$

$$\sigma_{11,clas} = \frac{\sum_{i=1}^n \sigma_{11}(x_i^1)}{n}, \quad \sigma_{22,clas} = \frac{\sum_{i=1}^n \sigma_{22}(x_i^1)}{n}$$

$$\sigma_{11,clas} = 189 \text{ MPa}, \quad \sigma_{22,clas} = 15 \text{ MPa}, \quad \omega_1 = \frac{\pi}{10} (1 / \text{mm}), \quad a = 861 \text{ MPa} \cdot (\text{mm})^2, \quad \sqrt{\gamma} = 0.198 (1 / \text{mm}^2)$$





**Хороших идей  
каждому!**

**Не забывать  
старые идеи!**

