

Асимптотическая теория машущего крыла.
Оценка эффективности движения
Вторая конференция Математических центров России 7–11
ноября 2022 г.

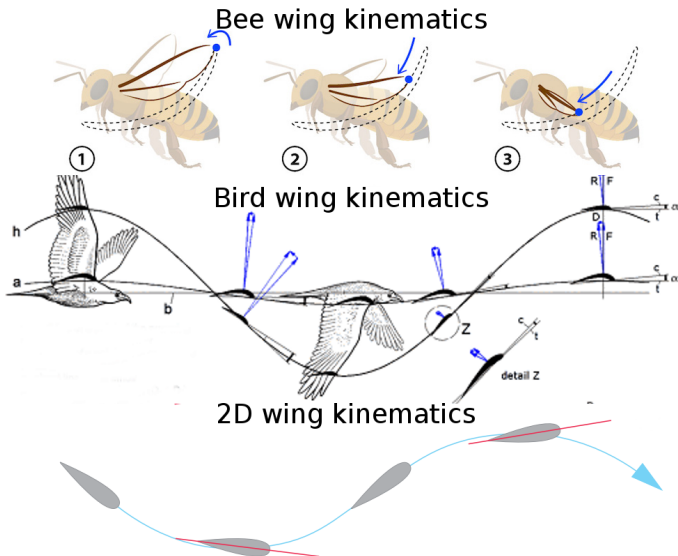
Нуриев Артем Наилевич



Kazan Federal
UNIVERSITY

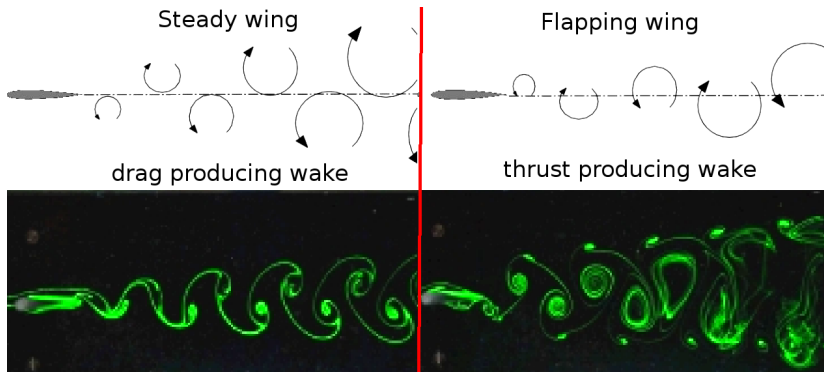
10.11.22

Кинематика крыла в машущем полете



Аэро-гидродинамика машущего крыла

Каковы ключевые гидродинамические механизмы пропульсивного движения?



Отличительные особенности аэрогидродинамики машущего крыла были описаны Карманом и Бюргерсом в 1935 году

Теоретические исследования машущего крыла

Теоретические исследования машущего крыла развиваются уже около 100 лет. Подавляющее большинство аналитических подходов основываются на **теории идеальной жидкости**.

Движение машущего крыла в идеальной жидкости

Основоположники этого направления:

Прандтль, Бирнбаум, Теодорсон, Кюсснер, Шварц, Лайтхилл; М.В. Келдыш, М.А. Лаврентьев, А.И. Некрасов, Л.И. Седов, В.В. Голубев, , Г.В. Логвинович.

Движение машущего крыла в вязкой несжимаемой жидкости

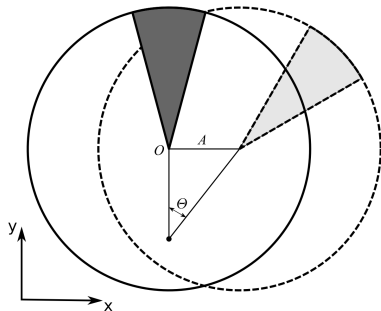
Большинство современных методов исследования основываются на прямом численном решении уравнения Навье-Стокса.

План выступления

- 1 Постановка задачи
- 2 Асимптотическое решение
- 3 Анализ структуры вторичных течений
- 4 Численное моделирование и апробация теории
- 5 Исследование эффективности двигателя

Постановка задачи.

Рассмотрим движение круглого цилиндрического крыла радиуса a , совершающего **синхронные поперечные и вращательные гармонические колебания** с частотой ω и амплитудами A , Θ соответственно, в вязкой несжимаемой жидкости.



Перейдем в подвижную полярную систему координат, перемещающуюся поступательно вместе с центром цилиндра, и обезразмерим пространственные переменные, время и скорость на a , ω^{-1} , $U = A\omega$ соответственно.

Постановка задачи. Уравнения движения

Запишем определяющие уравнения в виде

$$r > 1 : \quad w = \Delta\psi, \quad \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\gamma}{r} \frac{\partial(\psi, w)}{\partial(r, \theta)} = \beta^{-1} \Delta w, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\psi, w)}{\partial(r, \theta)} = \frac{\partial\psi}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial\theta} - \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \frac{\partial w}{\partial r}.$$

$$\beta = \frac{a^2 \omega}{\nu}, \quad \gamma = A/a.$$

$$r = 1 : \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial r} = \xi \cos t \quad (2)$$

$$r \rightarrow \infty : \quad \psi \sim -r \sin \theta \cos t + u_{\infty}^* r \cos(\theta + \alpha), \quad (3)$$

ξ – определяет отношение амплитуд вращательного (Θ) и поступательного (A) колебаний, $u_{\infty}^* = u_{\infty} \xi \gamma$. Величины u_{∞} и α будем определять из условия равенства нулю средних за период сил, действующих на цилиндр.

Постановка задачи. Силовые характеристики

Выпишем действующие на единицу длины цилиндра гидродинамические силы f_x , f_y и момент m .

$$f_y - if_x = \frac{i}{2} \sin t + \frac{1}{2\pi\beta} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial w}{\partial r} - w \right)_{r=1} e^{i\theta} d\theta, \quad (4)$$

$$m = \frac{2\xi}{\beta} \cos t - \frac{1}{2\pi\beta} \int_0^{2\pi} (w)_{r=1} d\theta$$

По силам и моментам определяется средняя по времени диссипация энергии.

$$d = d_x + \xi^2 d_\theta$$

$$d_x = -\langle f_x(t) \cos t \rangle, \quad d_\theta = \xi^{-1} \langle m(t) \cos t \rangle$$

Асимптотическое решение. Структура решения

Предположим, что $\gamma \ll 1$, а $\xi \sim 1$. Будем искать решение поставленной задачи в виде ряда по степеням γ :

$$\psi = \psi^{(0)} + \gamma \psi^{(1)} + \dots, \quad w = w^{(0)} + \gamma w^{(1)} + \dots \quad (5)$$

В главном члене $O(\gamma^0)$ получаем стоксовское приближение:

$$\frac{\partial}{\partial t} w^{(0)} - \beta^{-1} \Delta w^{(0)} = 0, \quad w^{(0)} = \Delta \psi^{(0)}$$

$$r = 1: \quad \psi^{(0)} = 0, \quad \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial r} = \xi \cos t, \quad r \rightarrow \infty: \quad \psi^{(0)} \sim -\cos t \cdot r \sin \theta.$$

Решение подзадачи во втором члене $O(\gamma^1)$

$$\frac{\partial}{\partial t} w^{(1)} - \beta^{-1} \Delta w^{(1)} = G, \quad w^{(1)} = \Delta \psi^{(1)}, \quad G = \frac{1}{r} \frac{\partial(\psi^{(0)}, w^{(0)})}{\partial(r, \theta)};$$

$$r = 1: \quad \psi^{(1)} = \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial r} = 0, \quad r \rightarrow \infty: \quad \psi^{(1)} \sim \xi u_{\infty} r \cos(\theta + \alpha);$$

содержит периодическую и стационарную составляющие.

Асимптотическое решение. Стоксовское приближение

В стоксовском приближении линейная задача расщепляется на две: задачу обтекания неподвижного цилиндра колебательным потоком и задачу о вращательных колебаниях цилиндра в неподвижной жидкости. Сумма этих двух решений записывается как:

$$\begin{aligned}\psi^{(0)} &= \sin \theta \operatorname{Re}(\Psi_1(r)e^{it}) + \xi \operatorname{Re}(\Psi_2(r)e^{it}), \\ w^{(0)} &= \sin \theta \operatorname{Re}(W_1(r)e^{it}) + \xi \operatorname{Re}(W_2(r)e^{it})\end{aligned}$$

Решение соответствующих одномерных задач дает:

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= -r + \frac{1}{r} + \frac{S_x}{r} + z^{-2}W_1, & W_1 &= -2z \frac{K_1(zr)}{K_0(z)}, & S_x(z) &= \frac{2K_1(z)}{zK_0(z)}, \\ \Psi_2 &= S_\theta + z^{-2}W_2, & W_2 &= -z \frac{K_0(zr)}{K_1(z)}, & S_\theta(z) &= \frac{K_0(z)}{zK_1(z)}, & z &= \sqrt{i\beta}\end{aligned}$$

Здесь K_j – модифицированные функции Бесселя.

Асимптотическое решение. Стоксовское приближение

По найденному решению можно определить характеристики силового гидродинамического воздействия на цилиндр (в первом приближении):

$$\begin{aligned} f_x^{(0)} &= \operatorname{Im} \left[e^{it} \left(\frac{1}{2} + S_x \right) \right], & m^{(0)} &= -\xi \operatorname{Im} [e^{it} (S_\theta)] \\ d_x^{(0)} &= -\frac{1}{2} \operatorname{Im} [S_x], & d_\theta^{(0)} &= -\frac{1}{2} \operatorname{Im} [S_\theta] \end{aligned} \quad (6)$$

В практически важном случае больших β поведение этих функций дается асимптотиками

$$\begin{aligned} z \rightarrow \infty : \\ S_\theta(z) &\sim \frac{1}{z} - \frac{1}{2z^2} + \frac{3}{8z^3} - \frac{3}{8z^4} + O(z^{-5}) \\ S_x(z) &\sim \frac{2}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{4z^3} + \frac{1}{4z^4} + O(z^{-5}) \end{aligned}$$

Асимптотическое решение. Задача о вторичных течениях

Во втором приближении нас будут интересовать лишь стационарные компоненты решения, описывающие вторичные течения. Представляя решение в виде

$$\psi^{(1)} = \Psi_x(r) \sin 2\theta + \xi \Psi_\theta(r) \cos \theta, \quad (8)$$

получим для нахождения Ψ_x и Ψ_θ следующие задачи

$$\mathcal{L}_2^2 \Psi_x = -\beta G_x, \quad \mathcal{L}_1^2 \Psi_\theta = -\beta G_\theta, \quad \mathcal{L}_k = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} - \frac{k^2}{r^2} \quad (9)$$

$$r = 1: \quad \Psi_x = \Psi'_x = \Psi_\theta = \Psi'_\theta = 0, \quad r \rightarrow \infty: \quad \Psi'_x = 0, \quad \Psi'_\theta = u_\infty$$

Асимптотическое решение. Задача о вторичных течениях

Их решение записывается в виде

$$\begin{aligned}\psi_x &= \tilde{\psi}_x - \frac{B_x}{r^2} + C_x \left(1 - \frac{1}{r^2}\right), \\ \psi_\theta &= \tilde{\psi}_\theta - \frac{B_\theta}{r} + C_\theta \left(r - \frac{1}{r}\right) + D \left(r \ln r - \frac{r}{2} + \frac{1}{2r}\right),\end{aligned}$$

Граничные условия при $r = 1$ удовлетворяются за счет выбора произвольных констант $B_{x,\theta}$, $C_{x,\theta}$

$$B_{x,\theta} = \tilde{\psi}_{x,\theta}(1), \quad C_\theta = -\frac{\tilde{\psi}'_\theta(1) + \tilde{\psi}_\theta(1)}{2}, \quad C_x = -\frac{\tilde{\psi}'_x(1) + 2\tilde{\psi}_x(1)}{2}.$$

Решение определяет крейсерскую скорость движения

$$\Theta u_\infty$$

Только при выборе $u_\infty = C_\theta$, условие на бесконечности выполняется, а константа D обращается в ноль.

Асимптотическое решение. Задача о вторичных течениях

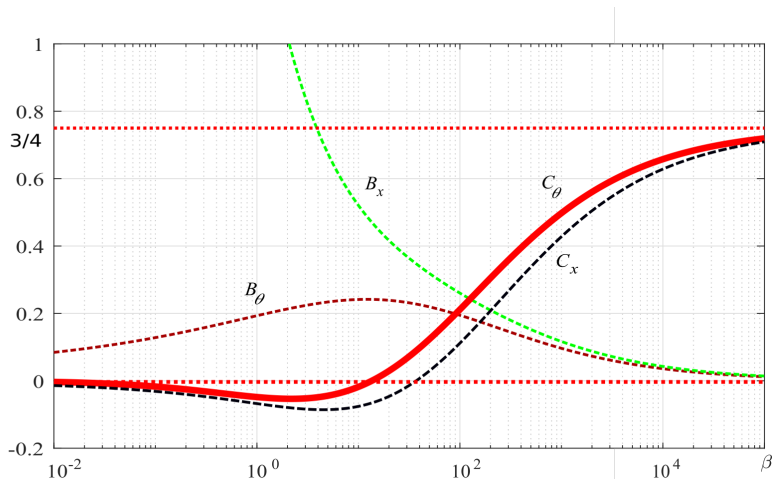


Рис.: Зависимость основных интегральных характеристик от безразмерной частоты β . **Сплошная красная линия** – коэффициент крейсерской скорости $u_\infty = C_\theta(\beta)$

Асимптотическое решение. Задача о вторичных течениях

Полученные результаты показывают наличие двух видов среднего стационарного движения цилиндра: прямого ($u_\infty > 0$) и обратного ($u_\infty < 0$).

Прямое движение

Реализуется при $\beta > \beta_\theta = 13.5355$ и характеризуется монотонным ростом скорости u_∞ с ростом β . Для случая $\beta \rightarrow \infty$:

$$u_\infty = C_\theta = \frac{3}{4} - 7\sqrt{2}\beta^{-1/2} + \frac{1117}{16}\beta^{-1} - \frac{3183}{8\sqrt{2}}\beta^{-3/2} + O(\beta^{-2})$$

Обратное движение

Происходит при $\beta < \beta_\theta$. Его безразмерная скорость достигает наименьшего значения $u_\infty = -0.0534$ при $\beta = 2.18$

Анализ структуры вторичных течений

Классификация режимов вторичных стационарных течений в плоскости (β, ξ) управляющих параметров процесса проводилась по числу и типу особых точек (в которых скорость течения обращается в ноль): центров циркуляционных ячеек и точек разделения потоков.

Regime		recirculation cells		stagnation points on dividing lines	
		on the cylinder	inside the flow	on the cylinder	inside the flow
Forward	A	2	0	2	2
	B	4	0	4	3
	C	2	2	4	2
	D	2	0	4	0
	E	2	4	4	5
	F	2	2	4	3
Reverse	G	0	0	2	0
	H	0	2	2	2
	I	2	0	4	1
	K	2	2	4	3

Анализ структуры вторичных течений

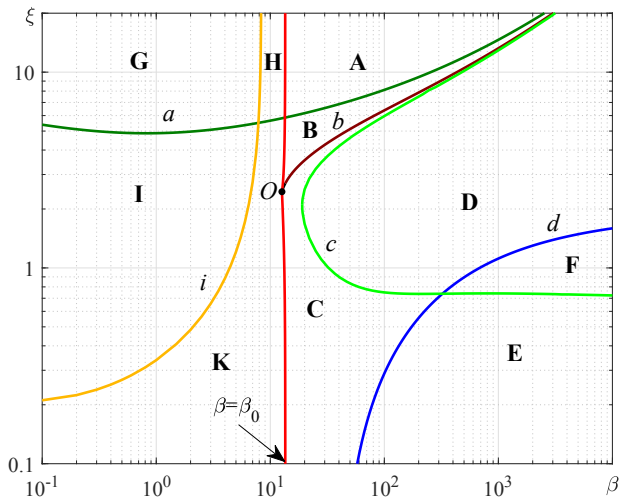


Рис.: Карта основных режимов в плоскости (ξ, β) .

Анализ структуры вторичных течений

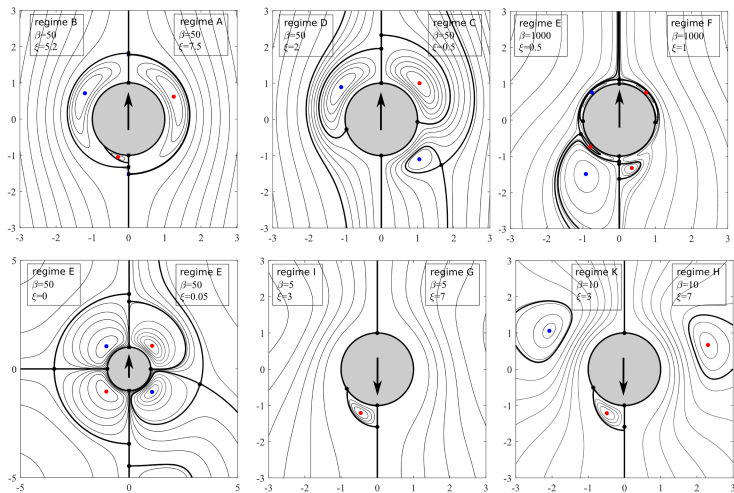


Рис.: Линии тока вторичных стационарных течений

Численное моделирование и апробация теории

Для апробации теории, проводилось численное решение полной нестационарной задачи в пакете OpenFOAM. Моделирование течений выполнялось в области размерами $(l_x, l_y) = (100, 100)$. Число узлов расчетных сеток N для всех расчетных случаев составляло $N \approx 3.8 \cdot 10^5$. Для дискретизации уравнений движения использовалась схема 2ого порядка точности.

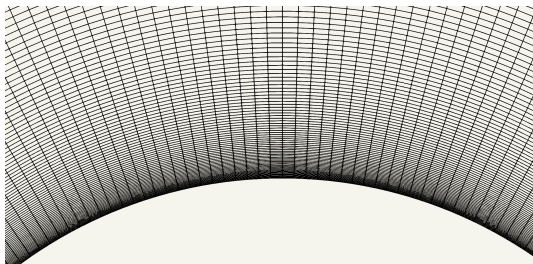


Рис.: Структура расчетной сетки вблизи поверхности цилиндра

Численное моделирование и апробация теории

Сравнение результатов асимптотической теории с данными прямого численного моделирования.

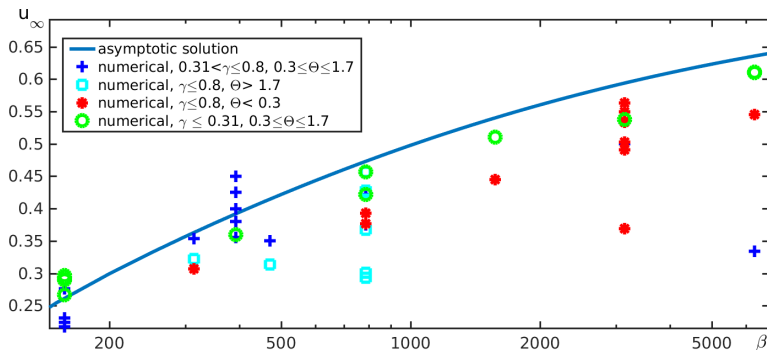


Рис.: Зависимость скорости u_∞ от частоты колебаний β

Численное моделирование и апробация теории

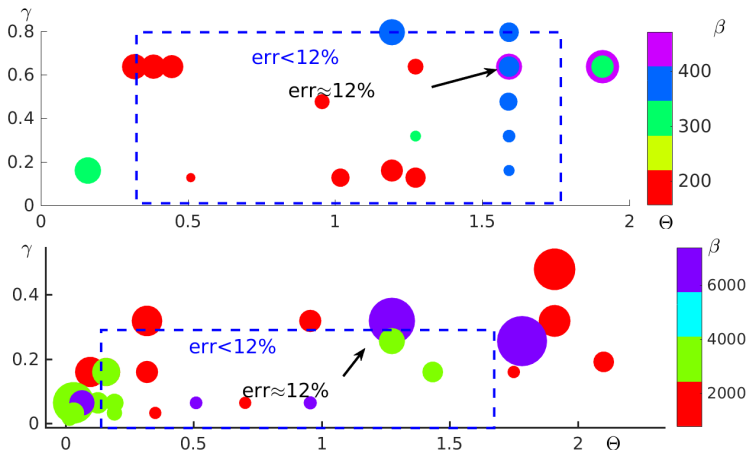


Рис.: Отклонения $err = (1 - u_{\infty}^{num}/u_{\infty}) \cdot 100\%$ численных значений коэффициента скорости u_{∞}^{num} от теоретической кривой

Численное моделирование и апробация теории

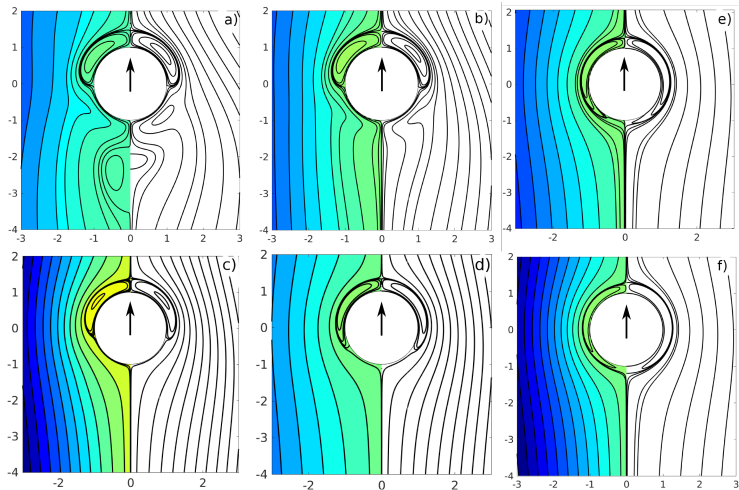


Рис.: Картиныны вторичных течений при $\beta = 157$ и $\gamma = 0.64$,
 $\xi = 0.46$ (a), $\gamma = 0.64$, $\xi = 0.72$ (b), $\gamma = 0.64$, $\xi = 2$, (c), $\gamma = 0.13$,
 $\xi = 4$, (d), $\gamma = 0.16$, $\xi = 7.3$ (e), $\gamma = 0.16$, $\xi = 11$ (f)

Численное моделирование и апробация теории

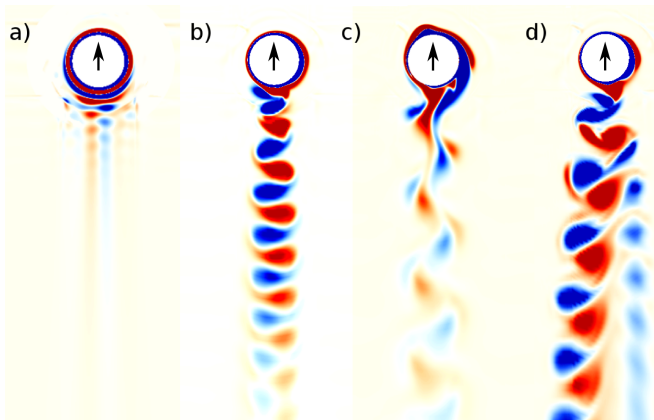


Рис.: Завихренность. Мгновенные картины течения при а) $\beta = 785$, $\Theta = 1.75$, $\gamma = 0.16$; б) $\beta = 785$, $\Theta = 1.9$, $\gamma = 0.48$; в) $\beta = 393$, $\Theta = 1.59$, $\gamma = 0.8$; д) $\beta = 785$, $\Theta = 1.9$, $\gamma = 0.64$

Оценка эффективности движения

Эффективность движения ε определим как

$$\varepsilon = D_0/D.$$

D_0 – диссипация при движении цилиндра с постоянной скоростью V .

$$D_0 = C_D(\text{Re})\rho a V^3$$

D – диссипация энергии при движении машущего цилиндрического крыла

$$D = 2\pi\rho a (\Theta^2 d_\theta + \gamma^2 d_x) \left(\frac{V}{\gamma\Theta u_\infty} \right)^3$$

Таким образом эффективность можно вычислить по формуле:

$$\varepsilon = \frac{D_0}{D} = \frac{C_D}{2\pi} \frac{\gamma^3 \Theta^3 u_\infty^3}{\Theta^2 d_\theta + \gamma^2 d_x} \quad (10)$$

Оценка эффективности движения

Согласно теории при фиксированной частоте наивысшая эффективность достигается при максимально допустимых значениях Θ и γ . Такой рост эффективности нарушается вне зон применимости теории, т.е. максимальная эффективность достигается на верхних границах применимости

β	314	393	393	393	471	3142	6283
γ	0.64	0.8	0.64	0.8	0.64	0.26	0.32
Θ	1.9	1.2	1.59	1.59	1.9	1.27	1.27
d_x	0.088	0.078	0.0749	0.0913	0.077	0.0145	0.0104
d_θ	0.022	0.0181	0.0193	0.0175	0.0172	0.0065	0.0046
$u_\infty(\beta)$	0.363	0.392	0.392	0.392	0.4146	0.5940	0.636
u_∞^{num}	0.323	0.457	0.356	0.425	0.314	0.502	0.334
ε_a	18.37 %	18.9 %	18.68 %	31.57 %	30.78 %	10.42 %	34.1 %
ε_{num}	10.94 %	18.8 %	10.67 %	26.38 %	10.25 %	5.95 %	4.72 %

Рис.: Численная и теоретическая оценка эффективности $\varepsilon_{num}, \varepsilon_a$

Оценка эффективности движения

Тип движителя	Re по средней скорости	Макс. эффект ивность	Источник
Рыбоподобное скомброидное движение	$2500 < Re < 5000$	40%	Maertens 2015
Угревидное движение	$2500 < Re < 5000$	30%	Maertens 2015
Трехзвенный пловец Перселла (Purcell's swimmer)	$Re \rightarrow 0$	1.5%	Becker 2003, Purcell 1976
Колеблющийся стержень (undulating rod)	$Re \rightarrow 0$	7.4%	Becker 2003, Hancock 1953
Спиральный пловец (helical swimmer)	$Re \rightarrow 0$	8.6%	Becker 2003, Hancock 1953
<i>Машущее цилиндрическое крыло</i>	<i>$Re \approx 420$</i>	<i>26.4%</i>	<i>Настоящие результаты</i>

В оптимальном режиме тело с диаметром (хордой) крыла 4 мм и частотой колебания 240 Гц согласно полученной теории может передвигаться в воздухе со средней скоростью 1,63 м/с. Это примерные параметры и скорость движения комнатной мухи

Основные публикации по теме исследования

Асимптотическая теория машущего крыла:

- Nuriev A.N., Egorov A.G. 2022 Asymptotic theory of a flapping wing of a circular cross-section **Journal of Fluid Mechanics** 941, A23.

Гидродинамика колеблющегося тела:

- Nuriev A.N., Kamalutdinov A.M., Egorov A.G. 2019 A numerical investigation of fluid flows induced by the oscillations of thin plates and evaluation of the associated hydrodynamic forces. **Journal of Fluid Mechanics** 874, 1057–1095.
- Nuriev A.N., Egorov A.G., Kamalutdinov A.M. 2021 Hydrodynamic forces acting on the elliptic cylinder performing high-frequency low-amplitude multi-harmonic oscillations in a viscous fluid. **Journal of Fluid Mechanics**, 913, A40.
- Nuriev, A.N., Kamalutdinov, A.M., Zaitseva, O.N. 2021 Hydrodynamics around long vibrating beams **Journal of Fluids and Structures**, 101, № 103203.

Препринты работ размещены в открытом доступе на сайте

https://www.researchgate.net/profile/Artem_Nuriev